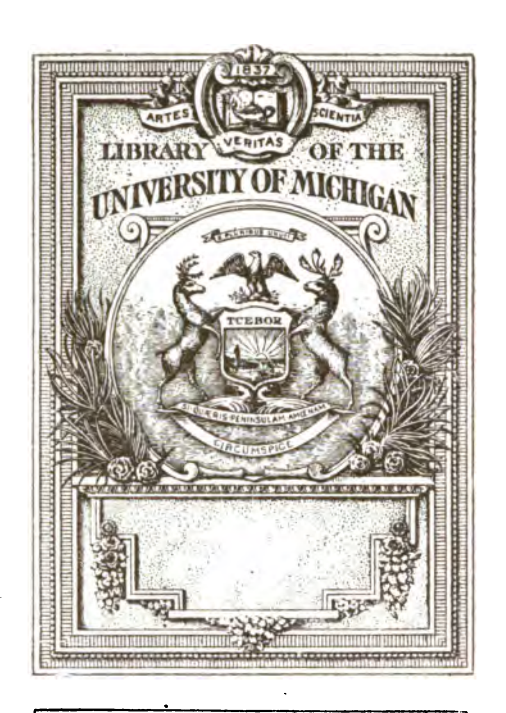

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Meier Hirsch's
Sammlung
geometrischer Aufgaben.

Vierter Theil,

von

Ludwig Immanuel Magnus.

Berlin, 1837.
Bei Duncker und Humblot.

Sammlung

von

Aufgaben und Lehrsätzen

aus der

analytischen Geometrie des Raumes,

von

Ludwig Immanuel Magnus.

Erste Abtheilung.

Berlin, 1837.
Bei Duncker und Humblot.

Prof Alex. Ziwet

1-30-1923

Vorrede.

In meiner Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene, welche vor einigen Jahren im Druck erschienen ist, habe ich bereits eine Sammlung von Aufgaben aus der Geometrie des Raumes angekündigt. Ich hatte die Absicht, diese Sammlung in zwei Abschnitte zu theilen, von welchen der erste Aufgaben, die vermittelst der endlichen Analysis zu lösen sind, und der zweite solche Aufgaben enthalten sollte, bei deren Lösung die Infinitesimalrechnung zur Anwendung kommt. Es zeigte sich aber sehr bald, daß jene erste Abtheilung, obgleich ich mich einer sehr gedrängten Kürze befleißigte, schon allein einen Band füllen würde, und dieser ist es, welchen ich hiermit dem mathematischen Publicum übergebe — erst jetzt, weil äußere Verhältnisse mir nur eine sehr geringe Muße für mathematische Arbeiten übrig ließen.

Alle Lehren der analytischen Geometrie, welche bei der Auflösung der Aufgaben zur Anwendung kommen, fand ich in den mir bekannten Lehrbüchern nicht sämmtlich oder nicht vollständig vorgetragen. Deshalb sah ich mich auch hier, wie in meiner ersten Sammlung, genöthigt, diese Lehren aufzunehmen; doch habe ich diejenigen, welche in den meisten Lehrbüchern enthalten sind, weil sie eben den Anfängern zum größten Theile bekannt seyn müssen, nur in der gedrängtesten Kürze vorgetragen. Und daher kommt es, daß nicht Alles mit gleicher Ausführlichkeit behandelt ist. Diese Ungleichförmigkeit in der Ausführung der einzelnen Lehren, die einem Lehrbuche allerdings zum

[illegible]

Prof Alex. Ziwet
1-30-1923

[illegible]

Vorrede.

In meiner Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene, welche vor einigen Jahren im Druck erschienen ist, habe ich bereits eine Sammlung von Aufgaben aus der Geometrie des Raumes angekündigt. Ich hatte die Absicht, diese Sammlung in zwei Abschnitte zu theilen, von welchen der erste Aufgaben, die vermittelst der endlichen Analysis zu lösen sind, und der zweite solche Aufgaben enthalten sollte, bei deren Lösung die Infinitesimalrechnung zur Anwendung kommt. Es zeigte sich aber sehr bald, daß jene erste Abtheilung, obgleich ich mich einer sehr gedrängten Kürze befleißigte, schon allein einen Band füllen würde, und dieser ist es, welchen ich hiermit dem mathematischen Publicum übergebe — erst jetzt, weil äußere Verhältnisse mir nur eine sehr geringe Muße für mathematische Arbeiten übrig ließen.

Alle Lehren der analytischen Geometrie, welche bei der Auflösung der Aufgaben zur Anwendung kommen, fand ich in den mir bekannten Lehrbüchern nicht sämmtlich oder nicht vollständig vorgetragen. Deshalb sah ich mich auch hier, wie in meiner ersten Sammlung, genöthigt, diese Lehren aufzunehmen; doch habe ich diejenigen, welche in den meisten Lehrbüchern enthalten sind, weil sie eben den Anfängern zum größten Theile bekannt seyn müssen, nur in der gedrängtesten Kürze vorgetragen. Und daher kommt es, daß nicht Alles mit gleicher Ausführlichkeit behandelt ist. Diese Ungleichförmigkeit in der Ausführung der einzelnen Lehren, die einem Lehrbuche allerdings zum

Tadel gereichen würde, mag bei dieser Aufgabensammlung durch deren Zweck sich rechtfertigen.

In den zwölf ersten §§. habe ich Alles, was die Bestimmung des Punktes, der Ebene und der geraden Linie durch rechtwinklige und schiefwinklige Coordinaten betrifft, und mehrere dahin gehörende Aufgaben in möglichster Kürze aufgenommen. — Der §. 13 enthält die Transformation der Coordinaten, die ich in gewisser Beziehung viel ausführlicher behandelt habe als dies in den bis jetzt vorhandenen Lehrbüchern geschieht. — Die §§. 15 bis 28 handeln von der Collineation und der Reciprocität. Die allgemeine Collineationsverwandtschaft, welche Herr Möbius zuerst aufgestellt hat, führt zunächst, durch die Betrachtung der gegenseitigen Lage zweier collinear-verwandten Systeme, auf eine besondere Art dieser Verwandtschaft, welche schon Herr Poncelet in dem Anhange zu seinem Traité des propriétés projectives etc. angedeutet hat, und die ich centrische Collineation nenne (§. 17). Nicht jede zwei collineare Systeme, sondern nur zwei centrisch-collineare lassen sich in eine solche Lage bringen, daß alle Verbindungslinien homologer Punkte sich in einem und demselben Punkte treffen. In dieser Lage nenne ich die beiden Systeme collinear-liegend. — Jene besondere Art der Collineation, welche Herr Möbius Affinität nennt, habe ich wiederum nur sehr kurz berührt und dasjenige, was die gegenseitige Lage affiner Systeme betrifft, unerörtert gelassen. Dagegen hielt ich es für angemessen, die Aehnlichkeit und die Gleichheit etwas ausführlicher zu behandeln (§§. 20 und 21). — Der vielen Anwendungen wegen, die sich von einer gewissen Verwandtschaft zweier Systeme machen lassen, von welchen das eine aus Punkten, die sämmtlich in einer Ebene liegen, das andere aber aus Geraden besteht, die sämmtlich durch einen Punkt gehen, habe ich diese Verwandtschaft, die ich Central-Collineation genannt, hier besonders betrachtet (§. 22). — Bei der Reciprocität, die ich hier unabhängig von den Flächen des zweiten Grades behandelt habe, stellen sich sogleich die Eigenschaften der conjugirten Durchmesser und des Mittelpunktes heraus. Jedes von zwei reciproken Systemen hat nämlich, allgemein zu reden, einen Mittelpunkt, und es sind blos specielle Arten der Reciprocität, in welchen den beiden Systemen keine Mittelpunkte zukommen. Ich habe, wie bei ebenen reciproken Systemen, zwei reciproke Systeme im Raume reciprok-liegend genannt, wenn einem jeden Punkte des Raumes die-

selbe Polarebene entspricht, sey es, daß man diesen Punkt als einen Punkt des einen, oder daß man ihn als einen Punkt des andern Systemes betrachte. Obgleich nun zwei collineare Systeme im Raume sich im Allgemeinen nicht in eine Lage bringen lassen, bei welcher sie collinear-liegend sind, so können doch, im Allgemeinen, zwei reciproke Systeme im Raume immer so gelegt werden, daß sie reciprok liegen, was ich angemessen hielt vollständig nachzuweisen (§. 25), wobei sich denn zwei Arten der allgemeinen Reciprocität im Raume, die ich die elliptische und die hyperbolische genannt habe, herausstellen. — Die Ausführung der speciellen Arten der Reciprocität, in welchen die Systeme keine Mittelpunkte haben (wobei allerdings einige feinere, von den Geometern bis jetzt noch nicht betrachtete, Unterscheidungen zu machen sind), habe ich, um die Anfänger nicht zu ermüden, unterlassen. Dagegen habe ich einige bestimmtere Particularisationen der allgemeinen Reciprocität den Anfängern vorgeführt (§. 26—28), unter welchen auch diejenige ist, die Herr Möbius, im 10ten Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik zuerst untersucht hat. Was unter der Directrix der Reciprocität verstanden wird, konnte ich erst später vollständig darlegen, und dies habe ich in dem §. 62 gethan, wo ich dann auch gezeigt habe, daß die so eben genannte particulaire Art der Reciprocität mit derjenigen übereinstimmt, deren Directrix ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid ist. — In den §§. 29 bis 32 habe ich Einiges, was die Cylinderflächen im Allgemeinen und diejenigen des zweiten Grades betrifft, aufgenommen, weil die Bestimmung der Curven im Raume vermittelst der projicirenden Cylinder geschieht; und in den §§. 33 bis 35 habe ich mehreres, was die Kegelflächen betrifft, den Anfängern vorgeführt, weil die Betrachtung der Berührungskegel an der Kugelfläche und an den Flächen des zweiten Grades überhaupt, nicht umgangen werden darf. — Die §§. 36 bis 41 enthalten mehrere, die Kugelfläche betreffende Aufgaben. — In den §§. 42 bis 76 befinden sich diejenigen Aufgaben und Lehrsätze, welche die Flächen des zweiten Grades betreffen. Bei der Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen den drei Veränderlichen x, y, z habe ich, um auf eine directe Weise zu den verschiedenen analytischen Bedingungen zu gelangen, welche erfüllt werden müssen, wenn jene Gleichung eine von den funfzehn verschiedenen geometrischen Bedeutungen haben soll, keinen der Wege eingeschlagen, welche die französischen Geometer bei jener Discussion gehen, sondern ich habe den-

jenigen Weg verfolgt, den Herr Plücker, bei der Discussion der Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, zuerst betreten hat. — Die §§. 77 bis 86 enthalten einige Aufgaben von Flächen höherer Grade; und die §§. 87 bis 104 mehrere Aufgaben, welche die Erzeugung der Flächen durch Curven betreffen, wobei der Anfänger mit den allgemeinen Gleichungen der Flächen, welche willkürliche Functionen enthalten, vertrauter wird.

Nur an wenigen Stellen war es nöthig, die Paragraphen meiner Sammlung von Aufgaben aus der Geometrie der Ebene zu citiren; da, wo es geschehen, ist dem angeführten §. eine I. vorgesetzt worden. — Ein Paar neue Bezeichnungen, die ich für angemessen hielt, sind folgende: Die Identität zweier analytischen Ausdrücke ist, wie in jener eben genannten Sammlung, durch das Zeichen $\equiv$ ausgedrückt. Die Winkel, welche die Coordinatenachsen mit einander bilden, habe ich durch $\hat{x}$, $\hat{y}$ und $\hat{z}$, und zwar den Winkel zwischen den Achsen der x und der y durch $\hat{z}$, denjenigen zwischen den Achsen der x und der z durch $\hat{y}$, den zwischen den Achsen der y und der z durch $\hat{x}$ bezeichnet; und dann auch öfters, zur Verkürzung der Formeln, für $\cos\hat{x}$, $\cos\hat{y}$ und $\cos\hat{z}$ bezüglich $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ geschrieben.

Von den Werken, welche Lehrsätze und Aufgaben aus der Geometrie des Raumes enthalten, habe ich am häufigsten benutzt: die Annales de mathématiques, das Journal für die reine und angewandte Mathematik, die Correspondance sur l'école polytechnique und den Barycentrischen Calcul.

Was die zweite Abtheilung der gegenwärtigen Sammlung betrifft, mit deren Ausarbeitung ich mich zu beschäftigen gedenke, so hängt der Zeitpunkt ihres Erscheinens hauptsächlich von der größern oder geringern Muße ab, welche darauf zu verwenden mir vergönnt seyn wird.

Im Merz 1837.

Der Verfasser.

§. 1.

1. Es sey die Lage von drei Ebenen A, B, C, welche sich in einem Punkte O schneiden, gegeben. Wir bezeichnen die Durchschnittslinie der Ebenen A und B durch XX′, diejenige der Ebenen A und C durch YY′ und die der Ebenen B und C durch ZZ′. Die Ebene A, welche die Geraden XX′ und YY′ enthält, heißt die Coordinatenebene oder Projectionsebene der xy, die Ebene B, welche die Geraden XX′ und ZZ′ enthält, heißt die Coordinatenebene oder Projectionsebene der xz, und die Ebene C, welche die Geraden YY′ und ZZ′ enthält, heißt die Coordinatenebene oder Projectionsebene der yz. Die Geraden XX′, YY′ und ZZ′ heißen Coordinatenachsen oder Projectionsachsen und zwar XX′ die Achse der x, YY′ die Achse der y und ZZ′ die Achse der z. Der Durchschnittspunkt O der Coordinatenebenen, welcher der Vereinigungspunkt der Coordinatenachsen ist, heißt der Anfangspunkt der Coordinaten, und die Winkel XOY, XOZ, YOZ, welche die Coordinatenachsen einschließen, und die wir respective durch $\hat{z}$, $\hat{y}$, $\hat{x}$, bezeichnen werden, heißen die Coordinatenwinkel.

Legen wir durch einen im Raume befindlichen Punkt P drei Ebenen, welche respective den drei Coordinatenebenen parallel sind, so schließen sämmtliche sechs Ebenen ein Parallelepiped ein, dessen Kanten mit den Coordinatenachsen gleiche Richtung haben. Es sind O und P zwei Eckpunkte dieses Parallelepipeds, und wir bezeichnen den zweiten in der Achse der x liegenden Eckpunkt durch a_x, den in der Achse der y liegenden durch a_y und den in der Achse der z befindlichen durch a_z. Ferner bezeichnen wir den vierten in der Ebene der xy liegenden Eckpunkt durch p_z, den in der Ebene der xz befindlichen durch p_y und den in der Ebene der yz liegenden durch p_x. Die Punkte a_x, a_y und a_z heißen die Projectionen des Punktes P respective

§. 1. auf den Achsen der x, y und z; die Punkte p_z, p_y, p_x aber werden die **Projectionen** des Punktes P respective auf den Ebenen der xy, xz, yz genannt. Die Kanten Pp_z, Pp_y, Pp_x und die Diagonalen der Seitenebenen, Pa_x, Pa_y, Pa_z, von welchen die ersteren den Coordinatenachsen, die letzteren die Coordinatenebenen parallel sind, heißen **projicirende Gerade.** Wir bezeichnen die Kanten des Parallelepipeds

$$Oa_x = a_y p_z = a_z p_y = Pp_x \text{ durch } x$$
$$Oa_y = a_x p_z = a_z p_x = Pp_y \text{ durch } y$$
$$Oa_z = a_y p_x = a_x p_y = Pp_z \text{ durch } z$$

und nennen diese drei Größen die **Coordinaten** des Punktes P. Nehmen wir die Geraden OX, OY und OZ als die positiven Seiten, und demnach OX′, OY′ und OZ′ als die negativen Seiten der Coordinatenachsen an, so sind die Werthe der Coordinaten eines Punktes P im Raume positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Projectionen a_x, a_y, a_z dieses Punktes auf den zuerst oder auf den zuletzt genannten Seiten der Coordinatenachsen liegen (I. §. 1.). Sind also P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 und P_8 acht, respective innerhalb der körperlichen Winkel XOYZ, X′OYZ, XOY′Z, X′OY′Z, XOYZ′, X′OYZ′, XOY′Z′, und X′OY′Z′ gelegene Punkte, deren drei Coordinaten absolut genommen gleiche Längen a, b, c haben, so ist

für P_1	$x = +a$,	$y = +b$,	$z = +c$
» P_2	$x = -a$,	$y = +b$,	$z = +c$
» P_3	$x = +a$,	$y = -b$,	$z = +c$
» P_4	$x = -a$,	$y = -b$,	$z = +c$
» P_5	$x = +a$,	$y = +b$,	$z = -c$
» P_6	$x = -a$,	$y = +b$,	$z = -c$
» P_7	$x = +a$,	$y = -b$,	$z = -c$
» P_8	$x = -a$,	$y = -b$,	$z = -c$

Die Coordinaten zweier Punkte, welche in zwei körperlichen Scheitelwinkeln liegen, wie P_1 und P_8, P_2 und P_7, P_3 und P_6, P_4 und P_5, haben also entgegengesetzte Vorzeichen.

Wenn ein Punkt P gegeben ist, so sind seine Coordinaten als gegebene Größen zu betrachten, und umgekehrt, wenn die Coordinaten eines Punktes P gegeben sind, so ist dieser Punkt gegeben.

Die Coordinaten und Projectionen heißen **rechtwinklige (orthogonale)** oder **schiefwinklige**, je nachdem alle drei Coordinatenwinkel rechte sind, oder nicht.

II. Wird die Lage eines Punktes P durch seine Entfernung u von ei-

nem gegebenen Punkte O, und durch die Lage der Verbindungslinie OP bestimmt, so heißen die, die Lage des Punktes P bestimmenden Größen **Polarcoordinaten** des Punktes P. Der feste Punkt O wird der **Pol** oder **Anfangspunkt**, und die Gerade OP = u der **Radius vector** (Leitstrahl) genannt. Die Lage des Leitstrahls OP kann auf mancherlei Weise bestimmt werden; die folgenden Bestimmungsarten sind die gebräuchlichsten.

1) Fällt man von dem Punkte P eine Senkrechte Pp_z auf die Ebene der xy und zieht Op_z, so ist die Lage von OP gegeben, wenn die Winkel XOp_z und POp_z gegeben sind. Bezeichnen wir XOp_z durch t und POp_z durch ϑ, so sind t, ϑ und u die Polarcoordinaten des Punktes P. Zur Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten in solche Polarcoordinaten, und umgekehrt, dienen folgende leicht herzuleitende Formeln:

$$z = u \sin\vartheta \;\; ; \;\; y = u \cos\vartheta \sin t \;\; ; \;\; x = u \cos\vartheta \cos t \, ; \qquad (1)$$

$$u = \sqrt{z^2 + y^2 + x^2} \, ; \qquad (2)$$

$$\tan t = \frac{y}{x} \;\; ; \;\; \sin t = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} \;\; ; \;\; \cos t = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} \;\; ; \qquad (3)$$

$$tg\,\vartheta = \frac{z}{\sqrt{y^2 + x^2}} \, ; \; \sin\vartheta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}} \, ; \; \cos\vartheta = \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}} . \qquad (4)$$

2) Legt man durch OP und OX eine Ebene, so ist die Lage von OP gegeben, wenn der Neigungswinkel dieser Ebene gegen die Ebene der xy und der ebene Winkel XOP gegeben sind. Bezeichnen wir jenen Neigungswinkel durch δ und XOP durch α, so sind α, δ und u die Polarcoordinaten des Punktes P. Zur Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten in solche Polarcoordinaten findet man leicht folgende Formeln:

$$x = u \cos\alpha \;\; ; \;\; y = u \sin\alpha \cos\delta \;\; ; \;\; z = u \sin\alpha \sin\delta \;\; ; \qquad (5)$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2}} \;\; ; \;\; \tan\delta = \frac{z}{y} . \qquad (6)$$

3) Legt man durch OP und OX, durch OP und OY, durch OP und OZ drei Ebenen, so ist, wie leicht einzusehen, die Lage von OP gegeben, wenn zwei von den drei Winkeln XOP, YOP und ZOP gegeben sind. Bezeichnen wir diese drei Winkel, der Reihe nach, durch α, β und γ, so sind α, β, γ und u die Polarcoordinaten des Punktes P. Zur Transformation rechtwinkliger Coordinaten in solche Polarcoordinaten findet man leicht folgende Formeln;

$$x = u \cos\alpha \;\; ; \;\; y = u \cos\beta \;\; ; \;\; z = u \cos\gamma \, ; \qquad (7)$$

§. 1. $$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}};\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}};\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}},\quad (8)$$

und zwischen den Winkeln α, β, γ findet, wie sich aus diesen Formeln ergiebt, folgende Relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (9)$$

Statt.

4) Fällen wir von dem Punkte P zwei Senkrechte Pp_z und Pp_y auf die Coordinatenebenen xy und xz, die wir rechtwinklig annehmen wollen, so ist offenbar die Lage von OP gegeben, wenn die Winkel XOp_z und XOp_y gegeben sind. Setzen wir Winkel $XOp_z = t$ und $XOp_y = \tau$, so sind t, τ und u die Polarcoordinaten des Punktes P. Zur Transformation rechtwinkliger Coordinaten in solche Polarcoordinaten finden wir, da offenbar

$$y = x\, tang\, t \;,\; z = x\, tang\, \tau \text{ und } u = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$x = \frac{u}{\sqrt{1+tg^2t+tg^2\tau}};\ y = \frac{u\, tang\, t}{\sqrt{1+tg^2t+tg^2\tau}};\ z = \frac{u\, tang\, \tau}{\sqrt{1+tg^2t+tg^2\tau}} \quad (10)$$

$$tang\, t = \frac{y}{x};\quad tang\, \tau = \frac{z}{x} \quad (11)$$

§. 2.

Es seyen P′ und P″ zwei Punkte im Raume, a'_x und a''_x, a'_y und a''_y, a'_z und a''_z ihre Projectionen auf den Achsen der x, der y und der z; alsdann heißt das Stück $a'_xa''_x$ der Achse der x die Projection der geraden Verbindungslinie P′P″ auf der Achse der x; eben so wird das Stück $a'_ya''_y$ die Projection auf der Achse der y, und $a'_za''_z$ die Projection auf der Achse der z genannt. Bezeichnen wir die Winkel, welche die Gerade P′P″, oder, was dasselbe ist, die Winkel, welche eine durch den Anfangspunkt O der P′P″ parallel laufende Gerade mit den drei Achsen bildet, respective durch α, β, γ, so ist, wie man leicht einsehen wird, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, $a'_x a''_x = P'P'' \cdot \cos\alpha$, $a'_ya''_y = P'P'' \cdot \cos\beta$, $a'_za''_z = P'P'' \cdot \cos\gamma$; d. i. **die orthogonale Projection einer Geraden auf eine Achse ist dem Producte dieser Geraden in den Cosinus des Winkels gleich, welchen sie mit jener Achse bildet.**

Aufgabe [1]. Die Coordinaten $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ zweier Punkte P_1 und P_2 sind gegeben; es soll die Entfernung $\overline{P_1P_2}$ dieser Punkte durch jene Coordinaten ausgedrückt werden.

Wir legen durch jeden der Punkte P_1, P_2 drei, den Coordinatenebenen parallele Ebenen; diese bilden ein Parallelepiped, dessen Kanten offenbar

$x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ und $z_2 - z_1$ sind, und in welchem $\overline{P_1P_2}$ eine Diagonale ist. Wir bezeichnen die Coordinatenwinkel durch $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ (§. 1.), und die Winkel, welche die Diagonale $\overline{P_1P_2}$ mit den Kanten $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ macht, der Reihe nach, durch α, β, γ. Bilden wir nun die orthogonalen Projectionen der Diagonale auf die drei von P_1 ausgehenden (verlängerten) Kanten, so sind diese Projectionen respective gleich $\overline{P_1P_2} \cdot \cos\alpha$, $\overline{P_1P_2} \cos\beta$, $\overline{P_1P_2} \cos\gamma$; und bilden wir die orthogonalen Projectionen auf dieselben Geraden respective von je zwei ihnen folgenden und in P_2 endigenden Kanten, so haben wir offenbar

§. 2.

$$\left.\begin{aligned} \overline{P_1P_2} \cdot \cos\alpha &= (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \cos\hat{z} + (z_2 - z_1) \cos\hat{y}\,, \\ \overline{P_1P_2} \cdot \cos\beta &= (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1) \cos\hat{x} + (x_2 - x_1) \cos\hat{z}\,, \\ \overline{P_1P_2} \cdot \cos\gamma &= (z_2 - z_1) + (y_2 - y_1) \cos\hat{x} + (x_2 - x_1) \cos\hat{y}\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Projiciren wir aber drei auf einander folgende Kanten, deren erste von P_1 ausgeht, senkrecht auf die Diagonale P_1P_2, so haben wir ferner

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1) \cos\alpha + (y_2 - y_1) \cos\beta + (z_2 - z_1) \cos\gamma\,. \quad (2)$$

Multipliciren wir die letzte Gleichung mit $\overline{P_1P_2}$, und substituiren in dem zweiten Theile des Productes für $\overline{P_1P_2} \cos\alpha$, $\overline{P_1P_2} \cos\beta$, $\overline{P_1P_2} \cos\gamma$ die Ausdrücke (1), so erhalten wir durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left\{\begin{aligned} &(z_2-z_1)^2+(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2+2(y_2-y_1)(z_2-z_1)\cos\hat{x} \\ &+ 2(x_2-x_1)(z_2-z_1)\cos\hat{y} + 2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\hat{z} \end{aligned}\right\}}\,, \quad (3)$$

welches der verlangte Ausdruck ist.

Sind die Coordinaten rechtwinklig, so ist $\cos\hat{x} = \cos\hat{y} = \cos\hat{z} = 0$, und dann haben wir

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left\{ (z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right\}}\,. \quad (4)$$

Zwischen den drei Winkeln, welche eine Gerade $\overline{P_1P_2}$ mit den drei Coordinatenachsen bildet, findet eine Relation Statt, die wir jetzt aus den Gleichungen (1) und (2) leicht auffinden können. Eliminiren wir nämlich zwischen diesen Gleichungen die Größen $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ und $(z_2 - z_1)$, so gehet die Größe $\overline{P_1P_2}$ von selbst fort, und wir erhalten, indem wir $\cos\hat{x}$, $\cos\hat{y}$, $\cos\hat{z}$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, der Kürze wegen, durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, bezeichnen, die Relation

$$\left.\begin{aligned} &1-\bar{x}^2-\bar{y}^2-\bar{z}^2+2\bar{x}\bar{y}\bar{z}-(1-\bar{x}^2)\bar{\alpha}^2-(1-\bar{y}^2)\bar{\beta}^2-(1-\bar{z}^2)\bar{\gamma}^2 \\ &\quad + 2(\bar{x}-\bar{y}\bar{z})\bar{\beta}\bar{\gamma} + 2(\bar{y}-\bar{x}\bar{z})\bar{\alpha}\bar{\gamma} + 2(\bar{z}-\bar{x}\bar{y})\bar{\alpha}\bar{\beta} \end{aligned}\right\} = 0\,. \quad (5)$$

Sind die Coordinaten rechtwinklig, so reducirt sich diese Gleichung auf

§. 2.

$$\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \bar{\gamma}^2 = 1 \quad , \tag{6}$$

welches die, bereits im vorigen § gefundene, Bedingungsgleichung (9) ist.

Fläche ersten Grades.

§. 3.

Wenn nur eine von den drei rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines Punktes gegeben ist, so ist dieser Punkt nicht gänzlich bestimmt. Es sey also

$$z = k \quad , \tag{1}$$

und auf der Achse der z ein Stück OC = k, vom Anfangspunkte O aus, abgeschnitten, ferner durch den Endpunkt C dieses Abschnittes eine, der Ebene der xy parallele, unbegrenzte Ebene K gelegt, so wird, für einen jeden Punkt dieser Ebene K, $z = k$ seyn, und für einen jeden Punkt, welcher nicht in dieser Ebene K liegt, wird z nicht gleich k seyn. Deshalb heißt die Gleichung (1) die Gleichung der Ebene K. Ist $k = 0$, also

$$z = 0 \quad , \tag{2}$$

so drückt diese Gleichung (2) die Coordinatenebene der xy aus. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, daß die Gleichungen $y = h$, $x = g$ Ebenen ausdrücken, welche respective den Ebenen der xz und der yz parallel sind und auf den Achsen der y und der x die Stücke h und g abschneiden; ferner daß die Gleichungen $y = 0$ und $x = 0$ respective der Ebene der xz und der Ebene der yz angehören.

Eine Gleichung vom ersten Grade zwischen zwei rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes

$$ay + bx + c = 0 \tag{3}$$

drückt eine Ebene aus, welche der Achse der z parallel ist. Denn legen wir durch die Gerade, welche die Gleichung (3) in der Ebene der xy ausdrückt (I. §. 4.), eine der Achse der z parallele Ebene (K), so findet offenbar zwischen den Coordinaten x und y irgend eines Punktes P dieser Ebene (K) die durch die Gleichung (3) angegebene Relation Statt, während z, so lange die Lage des Punktes P in der Ebene (K) unbestimmt ist, selbst unbestimmt bleibt. Auf gleiche Weise ergiebt sich, daß eine Gleichung

$$a'z + b'x + c' = 0 \quad (4) \qquad \text{oder} \qquad a''z + b''y + c'' = 0 \quad (5)$$

eine Ebene (H) oder (G) ausdrückt, welche der Achse der y oder der Achse

der x parallel ist, und welche die Coordinatenebene der xz oder der yz in derjenigen Geraden schneidet, welche durch die Gleichung (4) oder (5) angegeben wird. §. 3.

Wenn, in den Gleichungen (3, 4, 5), $c = 0$, $c' = 0$, $c'' = 0$ ist, so sind die Ebenen (K), (H), (G) nicht respective den Achsen der z, der y, der x parallel, sondern sie enthalten diese Achsen.

Jede Ebene, welche einer der Coordinatenachsen parallel ist, ist durch eine Gleichung vom ersten Grade zwischen zwei Coordinaten auszudrücken, die zugleich die Gleichung der Durchschnittslinie dieser Ebene mit derjenigen Coordinatenebene ist, welche die genannte Achse nicht enthält.

Eine Gleichung vom ersten Grade zwischen den drei rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines Punktes, welche sich immer auf die Form

$$Az + By + Cx + 1 = 0 \qquad (6)$$

oder

$$z = ay + bx + c \qquad (7)$$

bringen läßt, drückt keine andere Fläche als eine Ebene aus. Um dies zu erweisen, dürfen wir nur zeigen, daß die gerade Verbindungslinie von jeden zwei Punkten, welche in der durch die Gleichung (6) oder (7) ausgedrückten Fläche liegen, oder, mit anderen Worten, deren Coordinaten diese Gleichung befriedigen, sich gänzlich in dieser Fläche befindet. Nehmen wir zu dem Ende zwei beliebige Punkte in der in Rede stehenden Fläche an, und legen durch dieselben eine Ebene der Achse der y parallel, so wird diese, welches auch die beiden Punkte seyn mögen, nach dem vorher Erwiesenen, durch eine Gleichung vom ersten Grade zwischen x und z ausgedrückt werden, der wir die Form

$$z = a'x + b' \qquad (8)$$

geben können. Die Werthe von x, y und z, welche die beiden Gleichungen (7) und (8) zugleich befriedigen, sind offenbar Coordinaten derjenigen Punkte, welche sowohl in der Fläche (7) als in der Ebene (8) liegen, also Coordinaten der Durchschnittslinie der Fläche (7) und der Ebene (8). Dieselben Werthe werden aber auch der Gleichung

$$ay + (b - a')x + c - b' = 0 \qquad (9)$$

genugthun, weil diese durch Subtraction, aus den Gleichungen (7) und (8) hervorgehet. Es wird also die so eben genannte Durchschnittslinie auch in der durch die Gleichung (9) ausgedrückten Fläche liegen, welche nach dem vorher Erwiesenen eine Ebene ist. Die Durchschnittslinie der Fläche (7) und der Ebene (8), welche nothwendigerweise die beiden beliebig angenommenen Punkte enthält, befindet sich also nicht nur gänzlich in der Fläche (7), sondern auch in der Ebene (8) und in der Ebene (9), sie ist also zugleich

§. 3. die Durchschnittslinie der beiden Ebenen (8) und (9) und als solche eine Gerade. Da nun diese Gerade die beiden genannten Punkte enthält und gänzlich in der **Fläche** (7) liegt, so ist diese Fläche eine **Ebene**.

§. 4.

Das System zweier Gleichungen vom ersten Grade zwischen den rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines Punktes, wie

$$z = ay + bx + c\ , \qquad (1)$$
$$z = a'y + b'x + c'\ , \qquad (2)$$

von denen eine jede für sich betrachtet, eine Ebene darstellt, drückt eine Gerade im Raume, nämlich die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen, aus, weil die Coordinatenwerthe, welche beide Gleichungen zugleich befriedigen, nur denjenigen Punkten angehören, die sowohl in der einen als in der anderen Ebene liegen.

In dem besonderen Falle, in welchem $a' = a$ und $b' = b$ ist, drückt das System der beiden Gleichungen (1) und (2) keine in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten liegende Gerade aus, weil in diesem Falle jene Gleichungen durch keine endlichen Werthe von x, y und z zugleich befriedigt werden.

Legt man durch irgend eine Gerade G im Raume eine Ebene E_1, welche einer der Coordinatenachsen z. B. der Achse der z parallel ist, so schneidet diese Ebene E_1 die Ebene der xy in einer Geraden G_1. Die Ebene E_1 enthält offenbar die projicirenden Geraden aller Punkte der Linie G; daher wird sie die **projicirende Ebene** der Geraden G genannt. Die Gerade G_1 enthält die Projectionen aller Punkte der Geraden G; daher wird sie die **Projection der Geraden** G genannt.

Aufgabe [2]. *Die Gleichungen (1) und (2) einer Geraden im Raume sind gegeben; man soll die Gleichungen ihrer Projectionen auf den drei Coordinatenebenen finden.*

Da die Gleichung einer Projection offenbar auch die Gleichung der projicirenden Ebene ist, so kommt es nur darauf an, die Gleichungen der projicirenden Ebenen zu finden. Die projicirende Ebene aber ist, als eine Ebene, die einer Coordinatenachse parallel ist, durch eine Gleichung zwischen zwei Coordinaten auszudrücken. Eliminiren wir also nach einander z, y, x zwischen den gegebenen Gleichungen (1) und (2), so erhalten wir als Gleichung der Projection unserer Geraden:

auf der Ebene der xy : $(a - a')y + (b - b')x + c' - c = 0 \qquad (3)$

auf der Ebene der xz : $(a-a')z+(a'b-ab')x+a'c-ac'=0$ (4) §. 4.
auf der Ebene der yz : $(b-b')z+(ab'-a'b)y+b'c-bc'=0$ (5)

Wir bemerken hierbei noch Folgendes. Je zwei der fünf Gleichungen (1 bis 5) drücken die gegebene Gerade aus. Gewöhnlich stellt man eine Gerade im Raume durch die Gleichungen ihrer Projectionen auf zwei Coordinatenebenen oder, was dasselbe ist, durch die Gleichungen von zwei projicirenden Ebenen dar, weil jede dieser beiden Gleichungen nur zwei Coordinaten enthält.

Das System der beiden Gleichungen:

$\begin{cases} x = g \\ y = h \end{cases}$ drückt eine der Achse der z parallele und die Ebene der xy in dem Punkte gh schneidende Gerade aus;

$\begin{cases} x = g \\ z = k \end{cases}$ drückt eine der Achse der y parallele und die Ebene der xz in dem Punkte gk schneidende Gerade aus;

$\begin{cases} y = h \\ z = k \end{cases}$ drückt eine der Achse der x parallele und die Ebene der yz in dem Punkte hk schneidende Gerade aus.

Aufgabe [3]. *Die Gleichung einer Ebene in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten*

$$z = ay + bx + c \qquad (1)$$

ist gegeben. Es sollen die Gleichungen derjenigen Geraden gefunden werden, in welchen diese Ebene die Coordinatenebenen schneidet.

Da die Gleichungen der Ebenen der xy, der xz, der yz respective

$$z = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x = 0$$

sind (vor. §.), so drücken die Gleichungssysteme, welche aus einer dieser Gleichungen und aus der gegebenen bestehen, die gesuchten Geraden aus, und da auch durch die erste Gleichung eines solchen Systems die zweite reducirt wird, so werden der gegebenen Ebene Durchschnittslinien mit den drei Coordinatenebenen durch folgende Gleichungssysteme

$$\begin{Bmatrix} z = 0 \\ ay + bx + c = 0 \end{Bmatrix} (6) \; ; \; \begin{Bmatrix} y = 0 \\ z - bx - c = 0 \end{Bmatrix} (7) \; ; \; \begin{Bmatrix} x = 0 \\ z - ay - c = 0 \end{Bmatrix} (8)$$

ausgedrückt.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die zweite dieser Durchschnittslinien mit der Achse der x macht, durch β', und denjenigen, welchen die dritte Durchschnittslinie mit der Achse der y bildet, durch α', so ergiebt sich aus den Gleichungen (7) und (8), zufolge (I. §. 4.)

$$a = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\hat{x}-\alpha')} \; ; \quad b = \frac{\sin\beta'}{\sin(\hat{y}-\beta')} \; ;$$

§. 4. oder wenn die Coordinaten rechtwinklig, also wenn $\hat{x} = \hat{y} = \frac{1}{2}\pi$,

$$a = tang\, \alpha' \quad ; \quad b = tang\, \beta' \; ;$$

wodurch die geometrische Bedeutung der Coefficienten a und b in der Gleichung (1) angegeben ist.

Aufgabe [4]. Die Gleichung einer Ebene und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben. Es soll die Gleichung derjenigen Ebene gefunden werden, welche durch diesen Punkt gehet, und jener Ebene parallel ist.

Es sey

$$z = ay + bx + c \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Ebene und x_1, y_1, z_1 seyen die Coordinaten des gegebenen Punktes. Soll nun

$$z = a'y + b'x + c'$$

die Gleichung der gesuchten Ebene seyn, so muß es unmöglich seyn, diese Gleichung und die Gleichung (1) durch endliche Werthe von x, y und z zugleich zu befriedigen, weil, wenn dies möglich wäre, beide Ebenen diejenigen Punkte mit einander gemein hätten, denen diese Coordinatenwerthe angehörten, und dann also nicht parallel wären. Es werden aber solche endlichen Werthe nur dann nicht vorhanden seyn, wenn $a' = a$ und $b' = b$ ist. Demnach ist

$$z = ay + bx + c'.$$

Da aber diese Ebene auch durch den Punkt $x_1y_1z_1$ gehen soll, so müssen diese Coordinaten die eben gefundene Gleichung befriedigen, so daß wir haben

$$z_1 = ay_1 + bx_1 + c'.$$

Ziehen wir nun, um c' zu eliminiren, diese Gleichung von der vorher genannten ab, so kommt

$$z - z_1 = a(y - y_1) + b(x - x_1), \qquad (9)$$

welches die verlangte Gleichung ist.

Wir bemerken hierbei Folgendes. Die Durchschnittslinien der gegebenen Ebene (1) mit den Ebenen der xz und yz werden, nach der vorigen Aufgabe, durch die Gleichungen (7) und (8) ausgedrückt, während die Durchschnittslinie der ihr parallelen Ebene (9) mit denselben Coordinatenebenen durch

$$\left\{\begin{matrix} y = 0 \\ (z - z_1) - b(x - x_1) + ay_1 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ (z - z_1) - a(y - y_1) + bx_1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

ausgedrückt wird. Diese Durchschnittslinien sind also den zuerst genannten parallel (I. §. 4.), wie es offenbar auch seyn muß.

Wenn der gegebene Punkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so §. 4. ist $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, und statt der Gleichung (9) finden wir

$$z = ay + bx \; . \qquad (10)$$

Aufgabe [5]. Die Gleichungen einer Geraden und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben. Es sollen die Gleichungen der Geraden gefunden werden, welche durch diesen Punkt geht und jener Geraden parallel ist.

Es seyen

$$\left\{ z = ax + b \quad \text{und} \quad y = a'x + b' \right\} \qquad (11)$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des gegebenen Punktes. Die Gleichungen (11) sind die Gleichungen der Projectionen der gegebenen Geraden auf den Ebenen der xz und der xy, zugleich aber auch diejenigen der projicirenden Ebenen. Legen wir nun durch den gegebenen Punkt zwei Ebenen, welche respective diesen projicirenden (sich in der gegebenen Geraden schneidenden) Ebenen parallel sind, so wird ihre Durchschnittslinie den gegebenen Punkt enthalten und der gegebenen Geraden parallel seyn, weil parallele Ebenen sich in parallelen Geraden schneiden. Es sind aber die Gleichungen dieser durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gehenden den projicirenden parallele Ebenen, nach der vorigen Aufgabe,

$$z - z_1 = a(x - x_1) \quad \text{und} \quad y - y_1 = a'(x - x_1) \; , \qquad (12)$$

und diese Gleichungen (12) sind zugleich diejenigen der gesuchten Geraden.

Wenn der gegebene Punkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so ist $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, wodurch die Gleichungen (12) in

$$z = ax \quad \text{und} \quad y = a'x \qquad (13)$$

übergehen.

Die Gleichung einer Ebene in Polarcoordinaten ist im Allgemeinen nicht vom ersten Grade. Geht aber die Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten, und ist also in rechtwinkligen Coordinaten

$$z = ay + bx \; , \qquad (10)$$

ihre Gleichung (Aufg. 4.), so ergiebt sich durch Transformation in Polarcoordinaten der vierten Art (§. 1. F. 10.)

$$tang\,\tau = a\,tang\,t + b \; , \qquad (14)$$

eine Gleichung, die allerdings nur vom ersten Grade ist und welche, wie die Gleichung einer Geraden in der Ebene, nur zwei veränderliche Coordinaten, $tang\,\tau$ und $tang\,t$, enthält.

Eben so sind die Gleichungen einer Geraden im Raume, wenn sie in

§. 4. Polarcoordinaten ausgedrückt wird, im Allgemeinen nicht vom ersten Grade. Geht aber die Gerade durch den Anfangspunkt der Coordinaten, und ist ihr Gleichungssystem in rechtwinkligen Coordinaten (Aufg. 5.)

$$\left\{ z = ax \quad ; \quad y = a'x \right\}, \qquad (13)$$

so ergiebt sich durch Transformation in Polarcoordinaten der vierten Art (§. 1. F. 10.)

$$\left\{ tang\,\tau = a \quad ; \quad tang\,t = a' \right\}. \qquad (15)$$

Eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade läßt sich also, wie ein Punkt in der Ebene, durch zwei constante Coordinatenwerthe ausdrücken.

§. 5.

Aufgabe [6]. Es sind die Gleichungen zweier Geraden und die Coordinaten eines Punktes gegeben. Man soll die Gleichung der Ebene finden, welche durch diesen Punkt gehet und den beiden Geraden parallel ist.

Es seyen

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma x = \alpha z + a \\ \gamma y = \beta z + b \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma' x = \alpha' z + a' \\ \gamma' y = \beta' z + b' \end{array} \right\}$$

die gegebenen Gleichungssysteme der beiden Geraden, in welchen wir, der Symmetrie wegen, dem x und y einen Coefficienten beigefügt haben; ferner seyen x_1, y_1, z_1 die gegebenen Coordinaten des Punktes.

Soll nun $z + gy + hx + k = 0$ die Gleichung der gesuchten Ebene seyn, so muß diese Gleichung in Verbindung mit einem jeden der beiden genannten Gleichungssysteme von endlichen Werthen von x, y und z nicht befriedigt werden können, weil, wenn dies wäre, eine der beiden Geraden mit der Ebene denjenigen Punkt gemein hätte, dem diese Coordinatenwerthe angehören und die Ebene also jener Geraden nicht parallel seyn könnte. Entwickeln wir nun x, y und z aus der Gleichung $z + gy + hx + k = 0$ und dem ersten Gleichungssystem, sodann aus derselben Gleichung und dem zweiten Gleichungssystem, so ergeben sich für diese Größen zweimal drei Ausdrücke, welche dieselben Nenner haben. Diese Nenner sind gleich Null zu setzen, damit die Werthe jener Ausdrücke unendlich werden, wodurch sich die Gleichungen

$$\gamma + g\beta + h\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \gamma' + g\beta' + h\alpha' = 0$$

ergeben. Aus diesen Gleichungen bestimmen wir g und h, nämlich

$$g = \frac{\alpha'\gamma - \alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \quad ; \quad h = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$

Da die gesuchte Ebene aber auch durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gehen soll, so haben wir ferner §. 5.

$$z_1 + gy_1 + hx_1 + k = 0 ,$$

und wenn wir diese Gleichung, um k zu eliminiren, von der Gleichung $z + gy + hx + k = 0$ abziehen,

$$z - z_1 + g(y - y_1) + h(x - x_1) = 0 .$$

Substituiren wir hierin die für g und h gefundenen Ausdrücke, so kommt

$$(\beta'\alpha - \beta\alpha')(z - z_1) + (\alpha'\gamma - \alpha\gamma')(y - y_1) + (\gamma'\beta - \gamma\beta')(x - x_1) = 0 \quad (1)$$

als Gleichung der gesuchten Ebene.

Aufgabe [7]. Es sind die Gleichungen zweier Ebenen und die Coordinaten eines Punktes gegeben. Man soll die Gleichungen der Geraden finden, welche durch diesen Punkt gehet und jenen Ebenen parallel ist.

Es seyen

$$az + by + cx + 1 = 0 \quad \text{und} \quad a'z + b'y + c'x + 1 = 0$$

die gegebenen Gleichungen der beiden Ebenen, und x_1, y_1, z_1 die gegebenen Coordinaten des Punktes.

Nun können wir, wenn

$$\left\{ x = gz + k \quad ; \quad y = hz + m \right\}$$

das Gleichungssystem der gesuchten Geraden seyn soll, genau eben so wie in der vorigen Aufgabe verfahren, um g, h, k und m zu bestimmen. Wir können aber auch folgendermaßen verfahren. Legen wir nämlich durch den gegebenen Punkt zwei Ebenen, welche den gegebenen parallel sind, so werden ihre Gleichungen (§. 4. Aufg. 4.)

$$a(z - z_1) + b(y - y_1) + c(x - x_1) = 0$$
$$a'(z - z_1) + b'(y - y_1) + c'(x - x_1) = 0$$

seyn. Diese Ebenen schneiden sich aber in einer Geraden, welche offenbar durch den gegebenen Punkt gehet und den gegebenen Ebenen parallel ist. Die beiden so eben aufgestellten Gleichungen zusammen genommen drücken also die gesuchte Gerade aus. Soll diese Gerade durch die Gleichungen ihrer Projectionen ausgedrückt werden, so ist weiter nichts nöthig, als nacheinander y und x oder besser $(y - y_1)$ und $(x - x_1)$ zwischen den gefundenen Gleichungen zu eliminiren, wodurch sich das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} (bc' - b'c)(x - x_1) = (ab' - a'b)(z - z_1) \\ (bc' - b'c)(y - y_1) = (a'c - ac')(z - z_1) \end{array} \right\} \quad (2)$$

ergiebt.

§. 5. **Aufgabe [8].** Es sind zwei Punkte und eine Gerade gegeben. Man soll die Ebene finden, welche durch jene beiden Punkte gehet und die dieser Geraden parallel ist.

Es seyen x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der gegebenen Punkte, und

$$\left\{ \gamma x = \alpha z + a \;\; ; \;\; \gamma y = \beta z + b \right\}$$

die Gleichungen der gegebenen geraden Linie. Soll nun $z + gy + hx + k = 0$ die Gleichung der gesuchten Ebene seyn, so haben wir, weil diese Ebene der gegebenen Geraden parallel seyn soll, wie in Aufg. [6],

$$\gamma + \beta g + \alpha h = 0,$$

und, weil sie durch die gegebenen Punkte gehen soll,

$$z_1 + gy_1 + hx_1 + k = 0 \quad , \quad z_2 + gy_2 + hx_2 + k = 0 .$$

Entwickeln wir aus diesen drei Gleichungen die Werthe von g, h und k, und substituiren sie in die angenommene Gleichung, so ergiebt sich

$$[\alpha(y_2-y_1)-\beta(x_2-x_1)](z-z_1)+[\gamma(x_2-x_1)-\alpha(z_2-z_1)](y-y_1)+[\beta(z_2-z_1)-\gamma(y_2-y_1)](x-x_1)=0, \quad (3)$$

als Gleichung der gesuchten Ebene.

Aufgabe [9]. Es sind zwei Gerade gegeben. Man soll die Gleichung der Ebene finden, welche die eine dieser Geraden enthält und die der anderen parallel ist.

Es seyen

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma x = \alpha z + \gamma a \\ \gamma y = \beta z + \gamma b \end{array} \right\} \; ; \; \left\{ \begin{array}{l} \gamma' x = \alpha' z + \gamma' a' \\ \gamma' y = \beta' z + \gamma' b' \end{array} \right\}$$

die gegebenen Gleichungen der beiden Geraden. Soll $z + gy + hx + k = 0$ die Gleichung der Ebene seyn, welche die erste Gerade enthält und die der zweiten parallel ist, so muß, wenn man x und y zwischen dem ersten Gleichungssystem und der Gleichung $z + gy + hx + k = 0$ eliminirt, eine Finalgleichung in z sich ergeben, welche diese Größe unbestimmt läßt; denn wenn z aus dieser Finalgleichung einen bestimmten Werth erhielte, so würden, in Folge des genannten Gleichungssystems, auch x und y bestimmte Werthe erhalten, und die Gerade würde mit der in Rede stehenden Ebene nur den Punkt gemein haben, dem diese Coordinatenwerthe angehören, sie würde also nicht gänzlich in dieser Ebene liegen. Eliminiren wir nun x und y zwischen den genannten Gleichungen, so ergiebt sich als Finalgleichung

$$(\gamma + g\beta + h\alpha)z + gb + ha + k = 0,$$

und damit z unbestimmt bleibe, muß diese Gleichung von jedem beliebigen Werthe dieser Größe befriedigt werden, woraus

$$\gamma + g\beta + h\alpha = 0 \quad \text{und} \quad gb + ha + k = 0$$ §. 5.

folgt. Damit aber die gesuchte Ebene der zweiten Geraden parallel sey, muß auch, wie in der Aufgabe [6],

$$\gamma' + g\beta' + h\alpha' = 0$$

seyn. Entwickeln wir aus den drei letzten Gleichungen die Größen g, h und k, und setzen ihre Werthe in $z + gy + hx + k = 0$, so ergiebt sich

$$(\beta'\alpha - \beta\alpha')z + (\alpha'\gamma - \alpha\gamma')(y - b) + (\gamma'\beta - \gamma\beta')(x - a) = 0 \quad (4)$$

als Gleichung der gesuchten Ebene.

§. 6.

Aufgabe [10]. Es soll die Gleichung der Geraden gefunden werden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Sind x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte, und sollen

$$\left\{ x = az + b \quad ; \quad y = a'z + b' \right\}$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden seyn, so müssen diese Gleichungen von jenen Coordinaten befriedigt werden, so daß man hat

$$x_1 = az_1 + b \quad ; \quad y_1 = a'z_1 + b' \; ;$$
$$x_2 = az_2 + b \quad ; \quad y_2 = a'z_2 + b' \; ;$$

vier Gleichungen, welche hinreichen, die vier Größen a, a′, b und b′ zu bestimmen. Eliminiren wir diese Größen aus dem angenommenen Gleichungssysteme, so kommt

$$\left\{ x - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) \quad ; \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) \right\}. \quad (1)$$

Zu denselben Gleichungen gelangen wir durch die Betrachtung, daß die Projectionen der durch die beiden gegebenen Punkte gehenden Geraden, die Projectionen dieser Punkte enthalten müssen.

Ist einer der beiden Punkte, z. B. $x_2y_2z_2$, der Anfangspunkt der Coordinaten, so haben wir, aus den Gleichungen (1), für diesen Fall

$$\left\{ z_1x = x_1z \quad ; \quad z_1y = y_1z \right\}. \quad (2)$$

Aufgabe [11]. Es soll die Gleichung der Ebene gefunden werden, welche drei gegebene Punkte enthält

Es seyen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 die gegebenen Coordinaten der drei Punkte. Soll nun

$$Az + By + Cx + 1 = 0$$

§. 6. die Gleichung der gesuchten Ebene seyn, so muß sie von den Coordinaten jener drei Punkte befriedigt werden. Wir haben also

$$Az_1 + By_1 + Cx_1 + 1 = 0,$$
$$Az_2 + By_2 + Cx_2 + 1 = 0,$$
$$Az_3 + By_3 + Cx_3 + 1 = 0,$$

drei Gleichungen, welche hinreichen, die Coefficienten A, B und C zu bestimmen, und aus welchen wir erhalten

$$A = \frac{y_1(x_2 - x_3) - y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_1 - x_2)}{x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)},$$

$$B = \frac{x_1(z_2 - z_3) - x_2(z_1 - z_3) + x_3(z_1 - z_2)}{x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)},$$

$$C = \frac{z_1(y_2 - y_3) - z_2(y_1 - y_3) + z_3(y_1 - y_2)}{x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)}.$$

Man kann die gesuchte Gleichung auch auf folgende Weise auffinden. Zieht man nämlich die erste der drei obigen Bedingungsgleichungen von der angenommenen Gleichung der Ebene ab, so ergiebt sich

$$A(z - z_1) + B(y - y_1) + C(x - x_1) = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, welche jede Ebene ausdrückt, die durch den Punkt $x_1y_1z_1$ geht, so lange die Coefficienten A, B, C unbestimmt gelassen werden. Soll diese Ebene auch durch die Punkte $x_2y_2z_2$ und $x_3y_3z_3$ gehen, so müssen diese Coordinaten dieselbe Gleichung befriedigen. Substituiren wir also für x, y und z diese Coordinaten, so erhalten wir

$$A(z_2 - z_1) + B(y_2 - y_1) + C(x_2 - x_1) = 0 \quad ,$$
$$A(z_3 - z_1) + B(y_3 - y_1) + C(x_3 - x_1) = 0 \quad ,$$

zwei Gleichungen, aus welchen wir die Quotienten $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ bestimmen können. Entwickeln wir diese Größen und substituiren sie in die vorige Gleichung der Ebene, so ergiebt sich nach Wegschaffung des Nenners

$$\left.\begin{array}{l} \{(x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) - (y_2x_1 + y_3x_2 + y_1x_3)\} \cdot (z - z_1) \\ + \{(z_2x_1 + z_3x_2 + z_1x_3) - (x_2z_1 + x_3z_2 + x_1z_3)\} \cdot (y - y_1) \\ + \{(y_2z_1 + y_3z_2 + y_1z_3) - (z_2y_1 + z_3y_2 + z_1y_3)\} \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} = 0 \quad (3)$$

als Gleichung der gesuchten Ebene. Wir bemerken hierbei, daß die Coefficienten von $(z - z_1)$, $(y - y_1)$ und $(x - x_1)$ in dieser Gleichung respective den doppelten Flächeninhalt der Projectionen des von den gegebenen drei

Punkten

Punkten gebildeten Dreieckes ausdrücken, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, was sich aus (I. §. 10.) unmittelbar ergiebt. §. 6.

Ist einer der gegebenen Punkte der Anfangspunkt der Coordinaten, so reducirt sich die Gleichung (3) bedeutend; denn setzen wir in (3) $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, so ergiebt sich

$$(x_3y_2 - y_3x_2)z + (z_3x_2 - x_3z_2)y + (y_3z_2 - z_3y_2)x = 0 \qquad (4)$$

als Gleichung der Ebene, welche durch die Punkte $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ und durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

Eine sehr bemerkenswerthe Form nimmt die Gleichung (3) an, wenn die drei gegebenen Punkte auf den Coordinatenachsen liegen. Setzt man nämlich in (3) x_1, y_1, x_2, z_2, y_3 und z_3 gleich Null, so kommt $x_3y_2z + z_1x_3y + z_1y_2x - x_3y_2z_1 = 0$, oder, wenn wir durch $x_3y_2z_1$ dividiren,

$$\frac{z}{z_1} + \frac{y}{y_2} + \frac{x}{x_3} = 1 \ . \qquad (5)$$

§. 7.

Nachdem wir die vorhergehenden Aufgaben gelöst haben, wollen wir, ehe wir uns mit anderen Aufgaben beschäftigen, einige allgemeine Betrachtungen über die Gleichungen der geraden Linie und der Ebene machen.

Da die gerade Linie durch zwei Gleichungen ausgedrückt wird, deren einfachste Form

$$\left\{ x = az + b \ ; \ y = a'z + b' \right\}$$

ist, worin vier Constanten, a, a', b und b', vorkommen, so sind zur vollständigen Bestimmung einer Geraden im Raume vier Bedingungsgleichungen zwischen den eben erwähnten Constanten nöthig und im Allgemeinen hinreichend. Sind weniger als vier Bedingungsgleichungen vorhanden, oder sind eine oder mehrere derselben eine Folge der übrigen, so ist eine Gerade durch sie nicht vollständig bestimmt. Sind hingegen die vier Bedingungsgleichungen mit einander im Widerspruch, so ist keine Gerade möglich, an welcher sie befriedigt werden können. — Die Bedingung, daß eine Gerade durch einen gegebenen Punkt gehe, liefert zwei Bedingungsgleichungen; die Bedingung, daß sie durch zwei gegebene Punkte gehe, liefert also vier, und da diese, wenn die beiden Punkte nicht etwa in einen einzigen zusammen fallen, von einander unabhängig sind, so ist eine Gerade durch zwei Punkte völlig bestimmt oder individualisirt (§. 6. Aufg. 10). — Die Bedingung, daß eine Gerade einer Ebene parallel sey, liefert eine Bedingungsgleichung; die Bedin-

§ 7. gung, daß sie zweien Ebenen oder, was dasselbe ist, einer Geraden (nämlich der Durchschnittslinie der beiden Ebenen) parallel sey, giebt also zwei Bedingungsgleichungen; daher ist eine Gerade dadurch, daß sie durch einen gegebenen Punkt gehen und einer gegebenen Geraden oder zwei gegebenen Ebenen parallel seyn soll, im Allgemeinen, völlig bestimmt (§. 4. Aufg. 5 und §. 5. Aufg. 7). In dem letztern Falle zweier gegebenen Ebenen kann die Gerade, obgleich eigentlich vier Bedingungsgleichungen existiren, dennoch unbestimmt bleiben, und dies findet Statt, wenn die beiden gegebenen Ebenen einander parallel sind; alsdann ist in den beiden, in der Aufgabe (7) gefundenen Gleichungen

$$a(z-z_1)+b(y-y_1)+c(x-x_1)=0\ ;\ a'(z-z_1)+b'(y-y_1)+c'(x-x_1)=0$$

$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ und $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$, diese Gleichungen selbst also, nach der Division respective durch a und a′ mit einander identisch, so daß sie eine und dieselbe Ebene ausdrücken, welche der Ort aller Geraden ist, die durch den gegebenen Punkt gehen, und den gegebenen parallelen Ebenen parallel sind. — Die Bedingung, daß eine Gerade zweien anderen Geraden parallel sey, liefert vier Bedingungsgleichungen; da diese aber nur zwei von den vier Constanten der zu bestimmenden Geraden enthalten und daher im Allgemeinen mit einander im Widerspruch stehen, so ist auch im Allgemeinen keine Gerade möglich, welche zweien anderen parallel ist.

Da die Gleichung der Ebene

$$az+by+cx+1=0 \quad \text{oder} \quad z=gy+hx+k$$

drei Constanten a, b und c oder g, h und k enthält, so sind zur vollständigen Bestimmung oder Individualisirung einer Ebene drei Bedingungsgleichungen zwischen den eben erwähnten Constanten nöthig und im Allgemeinen hinreichend. Sind weniger als drei Bedingungsgleichungen vorhanden oder sind eine oder zwei derselben eine Folge der anderen, so ist eine Ebene durch sie nicht völlig bestimmt. Sind hingegen die drei Bedingungsgleichungen mit einander im Widerspruch, so ist keine Ebene möglich, an welcher sie befriedigt werden können. — Die Bedingung, daß eine Ebene durch einen Punkt gehe, liefert eine Bedingungsgleichung; daher sind drei Punkte im Allgemeinen hinreichend, eine Ebene zu bestimmen (§. 6. Aufg. 11). Liegen diese drei Punkte aber in einer und derselben Geraden, so wird jede Ebene, welche durch zwei derselben geht, diese Gerade, also auch den dritten Punkt enthalten; solche drei Punkte bestimmen also eine Ebene nicht vollständig, und die Werthe der Coefficienten A, B, C (Aufg. 11) werden $\frac{0}{0}$. — Die

Bedingung, daß eine Ebene einer anderen parallel sey, liefert zwei Bedingungsgleichungen; daher ist eine Ebene dadurch, daß sie durch einen gegebenen Punkt gehen und einer gegebenen Ebene parallel seyn soll, völlig bestimmt (§. 4. Aufg. 4). — Die Bedingung, daß eine Ebene einer gegebenen Geraden parallel sey, liefert eine Bedingungsgleichung; daher ist eine Ebene dadurch, daß sie zweien gegebenen Geraden parallel seyn und einen gegebenen Punkt enthalten soll, im Allgemeinen, völlig bestimmt (§. 5. Aufg. 6). Wenn aber die beiden gegebenen Geraden einander parallel sind, bleibt die Ebene unbestimmt, weil alsdann die beiden Bedingungsgleichungen, $\gamma + g\beta + h\alpha = 0$, $\gamma' + g\beta' + h\alpha' = 0$, aus welchen g und h zu bestimmen sind (S. 12), nach der Division durch γ und γ', identisch werden, indem unter jener Voraussetzung $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\gamma'}$ und $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'}$ ist. Inzwischen schneiden sich alle Ebenen, welche die auf diese Weise particularisirten Bedingungen erfüllen, in einer und derselben Geraden, nämlich in derjenigen, welche durch den gegebenen Punkt gehet und den beiden gegebenen parallelen Linien parallel ist. — Aehnliche Bemerkungen sind bei den Bedingungen der Aufgaben (8) und (9) zu machen. Wir schließen diese Betrachtungen mit einigen Bemerkungen, die für die Behandlung mehrerer der folgenden Aufgaben von Nutzen seyn werden.

§. 7

Wenn wir

$$az+by+cx+1 = A \;;\; a'z+b'y+c'x+1 = A' \;;\; a''z+b''y+c''x+1 = A''$$

setzen, wo a, b, c, a', b', ꝛc. gegebene constante Größen bedeuten, so drückt eine jede der Gleichungen

$$A = 0 \;;\; A' = 0 \;;\; A'' = 0$$

eine bestimmte Ebene aus; ein jedes der Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ A' = 0 \end{array}\right\} (1) \;;\; \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ A'' = 0 \end{array}\right\} (2) \;;\; \left\{\begin{array}{l} A' = 0 \\ A'' = 0 \end{array}\right\} (3)$$

drückt eine gerade Linie, und zwar die Durchschnittslinie von je zwei dieser Ebenen, und das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ A' = 0 \\ A'' = 0 \end{array}\right\} (4)$$

drückt einen Punkt, den Durchschnittspunkt der drei Ebenen, aus. Bedeuten λ, λ', λ'' und μ, unbestimmte constante Factoren, so drücken die Gleichungen

§. 7. $A + \lambda A' = 0$ (5) ; $A + \lambda' A'' = 0$ (6) ; $A' + \lambda'' A'' = 0$ (7) jede drei Ebenen aus, von welchen die erste (5) die Gerade (1), die zweite (6) die Gerade (2) und die dritte (7) die Gerade (3) enthält, weil diese Gleichungen vom ersten Grade sind, und alle Coordinatenwerthe, welche die Gleichungssysteme (1), (2) und (3) befriedigen, respective auch den Gleichungen (5), (6) und (7) genug thun. Es drückt ferner die Gleichung

$$A + \lambda A' + \mu A'' = 0 \qquad (8)$$

jede Ebene aus, welche den Durchschnittspunkt (4) enthält, weil diese Gleichung (8) vom ersten Grade ist, und die Coordinatenwerthe, welche das System (4) befriedigen, auch der Gleichung (8) genugthun. Endlich drückt, aus denselben Gründen, das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} A + \lambda A' = 0 \\ A + \lambda' A'' = 0 \end{array} \right\} \qquad (9)$$

jede Gerade aus, welche durch den Durchschnittspunkt (4) gehet.

§. 8.

Aufgabe [12]. Die Gleichungen einer Geraden und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben. Es soll die Gleichung der Ebene gefunden werden, welche diesen Punkt und jene Gerade enthält.

Es sey

$$\left\{ az + by + cx + 1 = 0 \;\; ; \;\; a'z + b'y + c'x + 1 = 0 \right\}$$

das Gleichungssystem der gegebenen Geraden, und x_1, y_1, z_1, seyen die Coordinaten des gegebenen Punktes. Jede Ebene, welche die gegebene Gerade enthält, läßt sich (vor. §.) durch die Gleichung

$$(az + by + cx + 1) + \lambda(a'z + b'y + c'x + 1) = 0$$

darstellen. Damit aber die Ebene durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gehe, muß ihre Gleichung von diesen Coordinatenwerthen befriedigt werden, so daß

$$(az_1 + by_1 + cx_1 + 1) + \lambda(a'z_1 + b'y_1 + c'x_1 + 1) = 0$$

ist. Eliminiren wir nun den Factor λ, so ergiebt sich

$$\frac{az + by + cx + 1}{az_1 + by_1 + cx_1 + 1} = \frac{a'z + b'y + c'x + 1}{a'z_1 + b'y_1 + c'x_1 + 1} \qquad (1)$$

als die Gleichung der gesuchten Ebene.

Aufgabe [13]. Die Gleichungen zweier Geraden sind gegeben. Es soll die Relation zwischen den Coefficienten in diesen Gleichungen gefunden werden, welche Statt findet, wenn die Geraden in einer und derselben Ebene liegen.

Es seyen §. 8.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha z + a \\ y = \beta z + b \end{array}\right\} \; ; \; \left\{\begin{array}{l} x = \alpha' z + a' \\ y = \beta' z + b' \end{array}\right\}$$

die beiden Gleichungssysteme der gegebenen Geraden.

Jede Ebene, welche die erste Gerade enthält, kann durch die Gleichung

$$(x - \alpha z - a) + \lambda(y - \beta z - b) = 0 \quad ,$$

und jede Ebene, in welcher die zweite Gerade liegt, kann durch die Gleichung

$$(x - \alpha' z - a') + \mu(y - \beta' z - b') = 0$$

dargestellt werden. Da nun aber beide Geraden in einer und derselben Ebene liegen sollen, so muß es möglich seyn, die Factoren λ und μ so zu bestimmen, daß die eben aufgestellten Gleichungen identisch werden und diese Ebene ausdrücken. Bringen wir diese Gleichungen auf die Formen

$$x + \lambda y - (\alpha + \beta\lambda)z - (a + b\lambda) = 0 \quad ,$$
$$x + \mu y - (\alpha' + \beta'\mu)z - (a' + b'\mu) = 0 \quad ,$$

so haben wir für die Identität derselben folgende drei Bedingungsgleichungen

$$\lambda = \mu \quad ; \quad \alpha + \beta\lambda = \alpha' + \beta'\mu \quad ; \quad a + b\lambda = a' + b'\mu \; ,$$

welche, wie die Elimination von λ und μ ergiebt, nur erfüllt werden können, wenn

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\beta' - \beta} = \frac{a' - a}{b' - b}$$

oder, was dasselbe ist, wenn

$$(\alpha' - \alpha)(b' - b) = (a' - a)(\beta' - \beta) \; . \qquad (2)$$

Diese Gleichung drückt also die gesuchte Relation aus. Zu derselben Gleichung gelangen wir auch durch die einfache Betrachtung, daß wenn die beiden gegebenen Geraden in einer und derselben Ebene liegen, sie sich entweder schneiden oder parallel sind, daß sie also in beiden Fällen einen Durchschnittspunkt haben, dessen Coordinaten in dem Falle des wirklichen Schneidens endliche, im Falle des Parallelismus aber unendliche Werthe haben werden, daß also in beiden Fällen die vier Gleichungen der beiden Geraden von denselben Werthen von x, y und z zugleich befriedigt werden müssen. Eliminiren wir nun diese drei Größen zwischen jenen vier Gleichungen, so erhalten wir unmittelbar die Gleichung (2).

Aufgabe [14]. Die Gleichungen von drei Ebenen sind gegeben. Es sollen die Relationen gefunden werden, welche Statt finden: 1stens wenn diese Ebenen sich in einer und derselben Geraden, 2tens wenn sie sich in parallelen Geraden schneiden.

Es seyen

2) $D_1 = 0$ ist, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Es können nämlich beide Gleichungen entweder dieselbe [illegible] wenn $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ oder wenn $\frac{A_2}{A_3} = \frac{B_2}{B_3}$ und $\frac{A_3}{A_1} = \frac{C_3}{C_1}$ ist. In dem ersten Falle ist $a_1 = a_2 = a_3$ und die drei Ebenen schneiden sich auf der Achse der z in einem Punkte, dessen Ordinate $z = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{a_3}$ ist. In dem zweiten Falle aber ist auch $\frac{B_1}{B_3} = \frac{C_1}{C_3}$, also $B_1C_3 = B_3C_1$, [illegible] $N_2 = 0$ und folglich zugleich $D = 0$, so daß $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ und $z = \frac{0}{0}$ werden; weil aber die Gleichungen $N_1 = 0$ und $N_2 = 0$, d. i. $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$ und $C_1A_3 - C_3A_1 = 0$ nichts anders als die Gleichungen (3) in der vorigen Aufgabe sind, so schneiden sich in diesem zweiten Falle die drei Ebenen nicht in einem Punkte, sondern in einer und derselben Geraden. 3) Wenn nur $D = 0$ ist, so werden die Werthe von x, y und z gleich ∞. Die drei Ebenen sind dann entweder parallel oder sie schneiden sich (weil $D = 0$ nichts anders als die Gleichung (4) in der vorigen Aufgabe ist) in parallelen Geraden.

§. 9.

Aufgabe 10. *Die Gleichungen zweier Geraden sind gegeben. Es soll der Winkel gefunden werden, welchen sie mit einander bilden.*

Es seyen L_1, L_2 zwei Gerade und

$$\left\{\begin{array}{l} gx = kz + a \\ gy = hz + b \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} g'x = k'z + a' \\ g'y = h'z + b' \end{array}\right\}$$

die beiden sie darstellenden Gleichungssysteme. Es mögen nun diese Linien einander schneiden oder nicht schneiden, so bilden sie bekanntermaßen denselben Winkel als zwei andere, sich in irgend einem Punkte schneidende Gerade L_1 und L_{II}, die ihnen parallel sind. Nehmen wir den Anfangspunkt der Coordinaten, O, zu diesem Durchschnittspunkte, so sind die Gleichungen der Geraden L_I und L_{II} (§. 4. Aufg. 5)

$$\left\{\begin{array}{l} gx = kz \\ gy = hz \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} g'x = k'z \\ g'y = h'z \end{array}\right\}$$

Nehmen wir nun auf der Geraden L_1 einen Punkt p, und auf L_2 einen Punkt p' beliebig an, und ziehen die Gerade pp', so haben wir, wenn wir den gesuchten Winkel durch $(l_1 l_2)$ bezeichnen, in dem Dreiecke pOp',

$$\cos(l_1 l_2) = \frac{\overline{Op}^2 + \overline{Op'}^2 - \overline{pp'}^2}{2 \cdot \overline{Op} \cdot \overline{Op'}} .$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte p und p' respective durch x, y, z und x', y', z', so haben wir ferner, weil diese Punkte auf den Geraden L_1 und L_2 liegen,

$$x = \frac{k}{g} z \; ; \; y = \frac{h}{g} z \; ; \; x' = \frac{k'}{g'} z' \; ; \; y' = \frac{h'}{g'} z' .$$

Vermittelst dieser Ausdrücke und der Formel (3) des §. 2. finden wir

$$\overline{Op}^2 = \left\{ g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\cos\hat{x} + 2gk\cos\hat{y} + 2hk\cos\hat{z} \right\} \frac{z^2}{g^2}$$

$$\overline{Op'}^2 = \left\{ g'^2 + h'^2 + k'^2 + 2g'h'\cos\hat{x} + 2g'k'\cos\hat{y} + 2h'k'\cos\hat{z} \right\} \frac{z'^2}{g'^2}$$

$$\overline{pp'}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\cos\hat{x} + 2gk\cos\hat{y} + 2hk\cos\hat{z} \right\} \frac{z^2}{g^2} \\ -2 \left\{ gg' + hh' + kk' + (gh' + g'h)\cos\hat{x} + (gk' + g'k)\cos\hat{y} + (hk' + h'k)\cos\hat{z} \right\} \frac{zz'}{gg'} \\ + \left\{ g'^2 + h'^2 + k'^2 + 2g'h'\cos\hat{x} + 2g'k'\cos\hat{y} + 2h'k'\cos\hat{z} \right\} \frac{z'^2}{g'^2} \end{array} \right. .$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in den oben für $\cos(l_1 l_2)$ angegebenen, so kommt, nach einigen sich von selbst darbietenden Reductionen,

$$\cos(l_1 l_2) = \frac{gg' + hh' + kk' + (gh' + g'h)\cos\hat{x} + (gk' + g'k)\cos\hat{y} + (hk' + h'k)\cos\hat{z}}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\cos\hat{x} + 2gk\cos\hat{y} + 2hk\cos\hat{z}} \cdot \sqrt{g'^2 + h'^2 + k'^2 + 2g'h'\cos\hat{x} + 2g'k'\cos\hat{y} + 2h'k'\cos\hat{z}}} , \quad (1)$$

welches der gesuchte Ausdruck ist.

Sind die Coordinaten rechtwinklig, so reducirt sich die gefundene Formel (1), da alsdann $\cos\hat{x} = \cos\hat{y} = \cos\hat{z} = 0$, auf

$$\cos(l_1 l_2) = \frac{gg' + hh' + kk'}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2} \cdot \sqrt{g'^2 + h'^2 + k'^2}} . \quad (2)$$

Hieraus ergiebt sich zugleich die Relation, welche zwischen den Coefficienten g, h, k, g', h', k' Statt finden muß, wenn die Geraden l_1 und l_2 auf einander senkrecht seyn sollen; denn da alsdann $\cos(l_1 l_2) = 0$ seyn muß, so ist diese Relation für schiefwinklige Coordinaten

$$gg' + hh' + kk' + (gh' + g'h)\cos\hat{x} + (gk' + g'k)\cos\hat{y} + (hk' + h'k)\cos\hat{z} = 0 , \quad (3)$$

und für rechtwinklige Coordinaten

$$gg' + hh' + kk' = 0 . \quad (4)$$

§. 9. Vermittelst der Formeln (1 und 2) lassen sich leicht die Winkel finden, welche eine Gerade

$$\left\{ gx = kz + a \;;\; gy = hz + b \right\}$$

mit den Coordinatenachsen bildet. Denn, da die Gleichungen dieser Achsen respective

$$\left\{ \begin{matrix} z = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} ; \left\{ \begin{matrix} z = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \right\} ; \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\}$$

sind, so brauchen wir, in den obigen Formeln, nur respective

$$g' = 0 \text{ und } h' = 0 \;;\; g' = 0 \text{ und } k' = 0 \;;\; h' = 0 \text{ und } k' = 0$$

zu setzen, und erhalten dadurch, wenn wir die genannten Winkel respective durch α, β und γ bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} cos\,\alpha &= \frac{k + g\,cos\,\hat{y} + h\,cos\,\hat{z}}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\,cos\,\hat{x} + 2gk\,cos\,\hat{y} + 2hk\,cos\,\hat{z}}} \\ cos\,\beta &= \frac{h + g\,cos\,\hat{x} + k\,cos\,\hat{z}}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\,cos\,\hat{x} + 2gk\,cos\,\hat{y} + 2hk\,cos\,\hat{z}}} \\ cos\,\gamma &= \frac{g + h\,cos\,\hat{x} + k\,cos\,\hat{y}}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\,cos\,\hat{x} + 2gk\,cos\,\hat{y} + 2hk\,cos\,\hat{z}}} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und diese Formeln gehen für rechtwinklige Coordinaten in

$$cos\,\alpha = \frac{k}{\sqrt{g^2+h^2+k^2}} \;;\; cos\,\beta = \frac{h}{\sqrt{g^2+h^2+k^2}} \;;\; cos\,\gamma = \frac{g}{\sqrt{g^2+h^2+k^2}} \quad (6)$$

über. Setzen wir, der Kürze wegen, $g^2+h^2+k^2+2gk\,cos\,\hat{x}+2gh\,cos\,\hat{y}+2hk\,cos\,\hat{z} = \Delta^2$, so haben wir, zufolge (5),

$$\Delta cos\,\alpha = k + g\,cos\,\hat{y} + h\,cos\,\hat{z} \;;\; \Delta cos\,\beta = k\,cos\,\hat{z} + g\,cos\,\hat{x} + h \;;\; \Delta cos\,\gamma = k\,cos\,\hat{y} + g + h\,cos\,\hat{x} \;;$$

aus welchen drei Gleichungen

$$g = \frac{(1 - cos^2\hat{z})cos\,\gamma + (cos\,\hat{y}\,cos\,\hat{z} - cos\,\hat{x})cos\,\beta + (cos\,\hat{x}\,cos\,\hat{z} - cos\,\hat{y})cos\,\alpha}{1 - cos^2\hat{x} - cos^2\hat{y} - cos^2\hat{z} + 2cos\,\hat{x}\,cos\,\hat{y}\,cos\,\hat{z}} \cdot \Delta \,,$$

$$h = \frac{(cos\,\hat{y}\,cos\,\hat{z} - cos\,\hat{x})\,cos\,\gamma + (1 - cos^2\hat{y})cos\,\beta + (cos\,\hat{x}\,cos\,\hat{y} - cos\,\hat{z})cos\,\alpha}{1 - cos^2\hat{x} - cos^2\hat{y} - cos^2\hat{z} + 2cos\,\hat{x}\,cos\,\hat{y}\,cos\,z} \cdot \Delta \,,$$

$$k = \frac{(cos\,\hat{x}\,cos\,\hat{z} - cos\,\hat{y})cos\,\gamma + (cos\,\hat{x}\,cos\,\hat{y} - cos\,\hat{z})cos\,\beta + (1 - cos^2\hat{x})cos\,\alpha}{1 - cos^2\hat{x} - cos^2\hat{y} - cos^2\hat{z} + 2cos\,\hat{x}\,cos\,\hat{y}\,cos\,\hat{z}} \cdot \Delta$$

folgt. Für eine andere Gerade, deren Gleichungen

$$\left\{ g'x = k'z + a' \;;\; g'y = h'z + b' \right\}$$

sind und welche die drei Winkel α', β', γ' mit den Coordinatenachsen bildet,

haben wir ähnliche Ausdrücke für g', h' und k'. Substituiren wir alle diese Ausdrücke in die Formel (1), und bezeichnen, der Kürze wegen, $\cos\hat{x}$, $\cos\hat{y}$, $\cos\hat{z}$, $\cos\alpha$, ꝛc. durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{\alpha}$ ꝛc., so haben wir §. 9.

$$\cos(l_1 l_2) = \frac{\left\{\begin{array}{c} (1-\bar{z}^2)\bar{\gamma}\bar{\gamma}' + (\bar{x}\bar{y}-\bar{z})(\bar{\alpha}\bar{\beta}' + \bar{\alpha}'\bar{\beta}) \\ + (1-\bar{y}^2)\bar{\beta}\bar{\beta}' + (\bar{x}\bar{z}-\bar{y})(\bar{\alpha}\bar{\gamma}' + \bar{\alpha}'\bar{\gamma}) \\ + (1-\bar{x}^2)\bar{\alpha}\bar{\alpha}' + (\bar{y}\bar{z}-\bar{x})(\bar{\beta}\bar{\gamma}' + \bar{\beta}'\bar{\gamma}) \end{array}\right\}}{1-\bar{x}^2-\bar{y}^2-\bar{z}^2+2\bar{x}\bar{y}\bar{z}}. \quad (7)$$

Diese Formel (7) drückt den Winkel, den zwei Gerade l_1 und l_2 bilden, durch die Winkel aus, welche diese Geraden mit den Coordinatenachsen machen *). Sind die Coordinaten rechtwinklig, so nimmt diese Formel die einfache Gestalt

$$\cos(l_1 l_2) = \cos\gamma\cos\gamma' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\alpha\cos\alpha' \quad (8)$$

an. Aus den Formeln (7) und (8) ergeben sich die Relationen, welche zwischen den Winkel α, α', β, β', γ und γ' Statt finden, wenn die Geraden l_1 und l_2 auf einander senkrecht sind. Da nämlich alsdann $\cos(l_1 l_2) = 0$, so haben wir für schiefwinklige Coordinaten

$$(1-\bar{z}^2)\bar{\gamma}\bar{\gamma}'+(1-\bar{y}^2)\bar{\beta}\bar{\beta}'+(1-\bar{x}^2)\bar{\alpha}\bar{\alpha}'+(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})(\bar{\alpha}\bar{\beta}'+\bar{\alpha}'\bar{\beta})+(\bar{x}\bar{z}-\bar{y})(\bar{\alpha}\bar{\gamma}'+\bar{\alpha}'\bar{\gamma})+(\bar{y}\bar{z}-\bar{x})(\bar{\beta}\bar{\gamma}'+\bar{\beta}'\bar{\gamma}) = 0, \quad (9)$$

und für rechtwinklige Coordinaten

$$\cos\gamma\cos\gamma' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\alpha\cos\alpha' = 0 \quad . \quad (10)$$

Wir fügen noch folgende Bemerkung hinzu. Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, so geben die Gleichungen (6)

$$g = \cos\gamma\sqrt{g^2+h^2+k^2}\ ;\ h = \cos\beta\sqrt{g^2+h^2+k^2}\ ;\ k = \cos\alpha\sqrt{g^2+h^2+k^2},$$

und substituiren wir diese Ausdrücke in die Gleichungen

$$\left|\ g(x-x_1) = k(z-z_1)\ ;\ \ g(y-y_1) = h(z-z_1)\ \right|$$

der geraden Linie, welche durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ geht, so haben wir

$$\left|\ \cos\gamma(x-x_1) = \cos\alpha(z-z_1)\ ;\ \cos\gamma(y-y_1) = \cos\beta(z-z_1)\ \right|. \quad (11)$$

Dies ist die Form der Gleichungen einer Geraden, welche in der analytischen Mechanik die gebräuchlichste ist.

Aufgabe [17]. Die Gleichungen einer Geraden und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben. Es soll gefunden werden: 1stens der

*) Fallen die beiden Geraden auf einander oder sind sie parallel, so ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ und $\cos(l_1 l_2) = 1$. Diese Werthe in die Formel (7) substituirt geben, wie es seyn muß, die Bedingungsgleichung (5) des §. 2.

§. 9. Ort aller Geraden, welche durch diesen Punkt gehen und welche auf jener Geraden senkrecht sind, 2tens die Gleichungen derjenigen Geraden, welche durch den gegebenen Punkt gehet und welche die gegebene Gerade rechtwinklig schneidet, 3tens die Länge dieses eben erwähnten Perpendikels.

Es seyen

$$\left\{ c(x-x') = a(z-z') \quad ; \quad c(y-y') = b(z-z') \right\}$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des gegebenen Punktes.

I. Die Gleichungen einer Geraden, welche durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gehet, haben die Form (§. 4. S. 12)

$$c'(x-x_1) = a'(z-z_1) \quad ; \quad c'(y-y_1) = b'(z-z_1)\ .$$

Soll aber diese Gerade auf der gegebenen senkrecht seyn, so muß (S. 3)

$$aa' + bb' + cc' + (cb' + c'b)\cos\hat{x} + (ca' + c'a)\cos\hat{y} + (ba' + ab')\cos\hat{z} = 0$$

seyn. Eliminiren wir zwischen diesen drei Gleichungen die Quotienten $\frac{a'}{c'}$ und $\frac{b'}{c'}$, so kommt

$$(c + b\cos\hat{x} + a\cos\hat{y})(z - z_1) + (b + c\cos\hat{x} + a\cos\hat{z})(y - y_1) + (a + c\cos\hat{y} + b\cos\hat{z})(x - x_1) = 0 \quad (12)$$

und dies ist die Gleichung des gesuchten Ortes, welcher also, da die Gleichung vom ersten Grade, eine Ebene ist.

Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, so gehet die gefundene Gleichung in

$$c(z-z_1) + b(y-y_1) + a(x-x_1) = 0 \qquad (13)$$

über.

II. Da die Gerade, welche durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ geht, und die gegebene Gerade senkrecht schneidet, nothwendigerweise in der gefundenen Ebene (12) oder (13) liegt, so wird der Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden auch der Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden und der genannten Ebene seyn. Setzen wir rechtwinklige Coordinaten voraus und bezeichnen diejenigen des eben erwähnten Durchschnittspunktes durch x_2, y_2, z_2, so müssen diese die Gleichungen der gegebenen Geraden und die Gleichung (13) befriedigen, so daß wir haben

$$c(x_2 - x') = a(z_2 - z') \quad ; \quad c(y_2 - y') = b(z_2 - z')$$

$$c(z_2 - z_1) + b(y_2 - y_1) + a(x_2 - x_1) = 0\ .$$

Wir geben diesen Gleichungen die Formen

$$c(x_2-x_1)=a(z_2-z_1)+a(z_1-z')-c(x_1-x'),$$ §. 9.

$$c(y_2-y_1)=b(z_2-z_1)+b(z_1-z')-c(y_1-y'),$$

$$c(z_2-z_1)+b(y_2-y_1)+a(x_2-x_1)=0,$$

und finden nun durch Entwicklung

$$z_2-z_1=\frac{bc(y_1-y')+ac(x_1-x')-(a^2+b^2)(z_1-z')}{a^2+b^2+c^2},$$

$$y_2-y_1=\frac{bc(z_1-z')+ab(x_1-x')-(a^2+c^2)(y_1-y')}{a^2+b^2+c^2},$$

$$x_2-x_1=\frac{ac(z_1-z')+ab(y_1-y')-(b^2+c^2)(x_1-x')}{a^2+b^2+c^2}.$$

Da nun die gesuchte Gerade durch die Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ bestimmt ist, und also (§. 6. G. 1) durch die Gleichungen

$$(z_2-z_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(z-z_1)\ ;\ (z_2-z_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(z-z_1)$$

ausgedrückt wird, so ist jetzt nichts weiter nöthig als die eben gefundenen Ausdrücke für (z_2-z_1), (y_2-y_1) und (x_2-x_1) in diese Gleichungen zu substituiren, um die Gleichungen der gesuchten Geraden vollständig zu erhalten.

Diese Gerade läßt sich auch auf folgende Weise ausdrücken. Da sie nämlich sowohl in der Ebene (13) als in derjenigen Ebene liegt, welche die gegebene Gerade und den gegebenen Punkt enthält, deren Gleichung also, nach Aufgabe [12] in §. 8, unmittelbar aufgestellt werden kann, so ist sie die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen und folglich durch die Gleichungen derselben, d. i. durch das Gleichungssystem

$$c(z-z_1)+b(y-y_1)+a(x-x_1)=0 \qquad (13)$$

$$\frac{a(z-z')-c(x-x')}{a(z_1-z')-c(x_1-x')}-\frac{b(z-z')-c(y-y')}{b(z_1-z')-c(y_1-y')}=0 \qquad (14)$$

vollständig ausgedrückt.

III. Da die Länge des, vom Punkte $x_1y_1z_1$ auf die gegebene Gerade gefällten Perpendikels nichts anders als die Entfernung der Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ ist, so erhalten wir, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, durch Substitution der für (z_2-z_1), (y_2-y_1) und (x_2-x_1) oben gefundenen Ausdrücke in die Formel (4) des §. 2, indem wir jenen Perpendikel durch p bezeichnen, nach einigen leichten Reductionen,

$$p=\frac{\sqrt{\{a(z_1-z')-c(x_1-x')\}^2+\{b(z_1-z')-c(y_1-y')\}^2+\{a(y_1-y')-b(x_1-x')\}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (15)$$

Geben wir den Gleichungen der gegebenen Geraden die Formen

§. 9. $a(z-z') - c(x-x') = 0 \quad ; \quad b(z-z') - c(y-y') = 0$
und eliminiren $(z-z')$, wodurch wir

$$a(y-y') - b(x-x') = 0$$

erhalten, so ist ersichtlich, daß der Zähler des gefundenen Ausdruckes (15) die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der ersten Theile dieser drei Gleichungen ist, wenn darin x_1, y_1 und z_1 für x, y, und z gesetzt werden.

IV. Wir bemerken hierbei noch Folgendes. Wenn der Punkt $x_1y_1z_1$ in der gegebenen Geraden liegt, so werden seine Coordinaten die Gleichungen derselben befriedigen; alsdann reduciren sich in dem Ausdrucke (15) die unter dem Wurzelzeichen des Zählers enthaltenen Quadrate auf Null, und es ist demnach, wie es auch seyn muß, $p = 0$. Die Gleichung (14) bekommt in demselben Falle eine unbestimmte Form und drückt jede Ebene aus, welche die gegebene Linie enthält. Die Gleichung (13) aber bleibt ungeändert; sie drückt dann diejenige Ebene aus, welche die gegebene Gerade in dem gegebenen Punkte senkrecht schneidet. Dasselbe gilt von der Gleichung (12).

Aufgabe [18]. Die Gleichungen zweier Geraden sind gegeben; es soll das Gleichungs-System derjenigen geraden Linie gefunden werden, welche die gegebenen rechtwinklig schneidet.

Es seyen

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\gamma'(x-x') = \cos\alpha'(z-z') \\ \cos\gamma'(y-y') = \cos\beta'(z-z') \end{array}\right\} \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\gamma''(x-x'') = \cos\alpha''(z-z'') \\ \cos\gamma''(y-y'') = \cos\beta''(z-z'') \end{array}\right\}$$

die Gleichungssysteme der beiden gegebenen Geraden in rechtwinkligen Coordinaten. Sollen nun

$$\left\{ \cos\gamma\, x = \cos\alpha\, z + a \quad ; \quad \cos\gamma\, y = \cos\beta\, z + b \right\}$$

die Gleichungen der gesuchten geraden Linie seyn, so müssen, weil diese Gerade auf den gegebenen senkrecht seyn soll (Aufg. 16. S. 10), folgende Gleichungen Statt finden

$$\cos\gamma' \cos\gamma + \cos\beta' \cos\beta + \cos\alpha' \cos\alpha = 0 \ ,$$
$$\cos\gamma'' \cos\gamma + \cos\beta'' \cos\beta + \cos\alpha'' \cos\alpha = 0 \ ,$$

und außerdem ist (§. 1. S. 9)

$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1 \ .$$

Aus diesen drei Gleichungen finden wir durch Entwicklung, und wenn wir den Winkel, welchen die beiden gegebenen Geraden mit einander machen,

durch δ bezeichnen, zugleich aber bemerken, daß, weil

$$\cos^2\gamma' + \cos^2\beta' + \cos^2\alpha' = 1 \quad ; \quad \cos^2\gamma'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\alpha'' = 1 \; ;$$
$$\cos\gamma' \cos\gamma'' + \cos\beta' \cos\beta'' + \cos\alpha'' \cos\alpha' = \cos\delta \; ,$$

ist, auch

$$(\cos\beta'\cos\gamma'' - \cos\beta''\cos\gamma')^2 + (\cos\gamma'\cos\alpha'' - \cos\gamma''\cos\alpha')^2 + (\cos\alpha'\cos\beta'' - \cos\alpha''\cos\beta')^2$$
$$= 1 - \left\{\cos\gamma'\cos\gamma'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\alpha'\cos\alpha''\right\}^2 = 1 - \cos^2\delta = \sin^2\delta \; ,$$
$$\cos\gamma = \frac{\cos\beta''\cos\alpha' - \cos\beta'\cos\alpha''}{\sin\delta} \; ; \; \cos\beta = \frac{\cos\alpha''\cos\gamma' - \cos\alpha'\cos\gamma''}{\sin\delta} \; ; \; \cos\alpha = \frac{\cos\gamma''\cos\beta' - \cos\gamma'\cos\beta''}{\sin\delta} \; .$$

Nachdem wir diese drei Größen bestimmt haben, könnten wir noch die Constanten a und b in den angenommenen Gleichungen der gesuchten Geraden vermittelst der Bedingung bestimmen, daß diese Gerade mit jeder der gegebenen in einer Ebene liegen muß, indem wir dadurch zwei Gleichungen zwischen a und b erhielten (§. 8. S. 2). Da wir aber auf diese Weise ziemlich zusammengesetzte Ausdrücke erhalten würden, so wählen wir den folgenden Weg, um zu den gesuchten Gleichungen zu gelangen. Die oben angenommenen Gleichungen drücken, wenn wir a und b beliebig bestimmen und den Größen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die schon gefundenen Werthe beilegen, eine Gerade aus, welche der gesuchten parallel ist; wir wollen sie durch L bezeichnen. Legen wir nun eine Ebene e', welche die erste gegebene Gerade enthält, und die zugleich der Geraden L parallel ist, so wird sie offenbar die gesuchte Gerade enthalten; legen wir ferner eine Ebene e'', welche die zweite gegebene Gerade enthält und die zugleich ebenfalls der Geraden L parallel ist, so wird auch sie die gesuchte Gerade enthalten. Da nun die gesuchte Gerade in den Ebenen e' und e'' enthalten ist, so ist sie die Durchschnittslinie dieser Ebenen e' und e'', deren Gleichungen wir also nur aufzusuchen brauchen, um die gesuchte Gerade auszudrücken. Nach §. 5. (Aufg. [9]) finden wir als Gleichungen der beiden Ebenen e' und e'' unmittelbar

$$(\cos\beta\cos\alpha' - \cos\beta'\cos\alpha)(z-z') + (\cos\alpha\cos\gamma' - \cos\alpha'\cos\gamma)(y-y') + (\cos\gamma\cos\beta' - \cos\gamma'\cos\beta)(x-x') = 0 \, ,$$
$$(\cos\beta\cos\alpha'' - \cos\beta''\cos\alpha)(z-z'') + (\cos\alpha\cos\gamma'' - \cos\alpha''\cos\gamma)(y-y'') + (\cos\gamma\cos\beta'' - \cos\gamma''\cos\beta)(x-x'') = 0 \, .$$

Die Substitution der oben gefundenen Ausdrücke für $\cos\gamma$, $\cos\beta$ und $\cos\alpha$ in diese Gleichungen giebt, nach einigen leichten Reductionen,

$$\left.\begin{array}{l} \{\cos\gamma''(z-z') + \cos\beta''(y-y') + \cos\alpha''(x-x')\} - \cos\delta\,\{\cos\gamma'(z-z') + \cos\beta'(y-y') + \cos\alpha'(x-x')\} = 0 \\ \{\cos\gamma'(z-z'') + \cos\beta'(y-y'') + \cos\alpha'(x-x'')\} - \cos\delta\,\{\cos\gamma''(z-z'') + \cos\beta''(y-y'') + \cos\alpha''(x-x'')\} = 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

als dasjenige Gleichungssystem, welches die gesuchte Gerade ausdrückt.

Aufgabe [19]. Die Gleichung einer Ebene und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben; es sollen die Gleichungen der Geraden ge-

§. 8.

$$a_1z + b_1y + c_1x + 1 = 0\ ,$$
$$a_2z + b_2y + c_2x + 1 = 0\ ,$$
$$a_3z + b_3y + c_3x + 1 = 0$$

die Gleichungen der drei Ebenen.

I. Da jede Ebene, welche die Durchschnittslinie der ersten und zweiten Ebene enthält, durch die Gleichung

$$(a_1z + b_1y + c_1x + 1) + \lambda(a_2z + b_2y + c_2x + 1) = 0$$

dargestellt werden kann, so muß auch die dritte Ebene, die, der Voraussetzung zufolge, diese Linie enthalten soll, durch diese Gleichung ausgedrückt werden können, d. i. es muß sich λ so bestimmen lassen, daß die dritte Gleichung der eben genannten identisch wird. Bringen wir diese letztere auf die Form

$$\frac{a_1 + a_2\lambda}{1+\lambda}z + \frac{b_1 + b_2\lambda}{1+\lambda}y + \frac{c_1 + c_2\lambda}{1+\lambda}x + 1 = 0\ ,$$

so ergiebt sich

$$\frac{a_1 + a_2\lambda}{1+\lambda} = a_3\ ;\quad \frac{b_1 + b_2\lambda}{1+\lambda} = b_3\ ;\quad \frac{c_1 + c_2\lambda}{1+\lambda} = c_3\ ;$$

woraus

$$(a_3 - a_2)\lambda = (a_1 - a_3)\ ;\ (b_3 - b_2)\lambda = (b_1 - b_3)\ ;\ (c_3 - c_2)\lambda = (c_1 - c_3).$$

Eliminiren wir λ, so ergeben sich

$$(a_3-a_2)(b_3-b_1)-(a_3-a_1)(b_3-b_2)=0;\ (a_3-a_2)(c_3-c_1)-(a_3-a_1)(c_3-c_2)=0 \quad (3)$$

als die beiden Bedingungsgleichungen, welche erfüllt werden müssen, wenn die drei Ebenen sich in einer und derselben Geraden schneiden sollen.

II. Für die Durchschnittslinien der drei Ebenen finden wir durch Elimination von y und x die folgenden drei Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{l} (a_1b_2 - a_2b_1)z + (c_1b_2 - c_2b_1)x + (b_2 - b_1) = 0 \\ (a_1c_2 - a_2c_1)z - (c_1b_2 - c_2b_1)y + (c_2 - c_1) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (a_1b_3 - a_3b_1)z + (c_1b_3 - c_3b_1)x + (b_3 - b_1) = 0 \\ (a_1c_3 - a_3c_1)z - (c_1b_3 - c_3b_1)y + (c_3 - c_1) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (a_2b_3 - a_3b_2)z + (c_2b_3 - c_3b_2)x + (b_3 - b_2) = 0 \\ (a_2c_3 - a_3c_2)z - (c_2b_3 - c_3b_2)y + (c_3 - c_2) = 0 \end{array}\right\}$$

Sollen diese drei Geraden einander parallel seyn, so muß

$$\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{c_1b_3 - c_3b_1}{a_1b_3 - a_3b_1} = \frac{c_2b_3 - c_3b_2}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

$$\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{c_1b_3 - c_3b_1}{a_1c_3 - a_3c_1} = \frac{c_2b_3 - c_3b_2}{a_2c_3 - a_3c_2}$$

seyn. Diese beiden Doppelgleichungen reduciren sich nach Wegschaffung der Nenner von selbst auf eine einzige Gleichung, nämlich auf §. 8.

$$c_1(b_2a_3 - b_3a_2) - c_2(b_1a_3 - b_3a_1) + c_3(b_1a_2 - b_2a_1) = 0 \quad (4)$$

welches die Bedingungsgleichung ist, die befriedigt werden muß, wenn die drei Ebenen sich in parallelen Geraden schneiden sollen.

Aufgabe [15]. *Die Gleichungen von drei Ebenen sind gegeben; man soll die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes finden.*

Es seyen

$$a_1z + b_1y + c_1x + 1 = 0 \ ,$$
$$a_2z + b_2y + c_2x + 1 = 0 \ ,$$
$$a_3z + b_3y + c_3x + 1 = 0$$

die gegebenen Gleichungen der drei Ebenen. Da in ihrem Durchschnittspunkte die Coordinaten dieselben sind, so finden wir diese durch Entwicklung aus den gegebenen Gleichungen. Wir erhalten auf diese Weise

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2)}{c_1(b_2a_3 - b_3a_2) - c_2(b_1a_3 - b_3a_1) + c_3(b_1a_2 - b_2a_1)} \ , \\ y &= \frac{c_1(a_2 - a_3) - c_2(a_1 - a_3) + c_3(a_1 - a_2)}{c_1(b_2a_3 - b_3a_2) - c_2(b_1a_3 - b_3a_1) + c_3(b_1a_2 - b_2a_1)} \ , \\ z &= \frac{b_1(c_2 - c_3) - b_2(c_1 - c_3) + b_3(c_1 - c_2)}{c_1(b_2a_3 - b_3a_2) - c_2(b_1a_3 - b_3a_1) + c_3(b_1a_2 - b_2a_1)} \ , \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

welches die gesuchten Ausdrücke sind.

Hierbei ist Folgendes zu bemerken. Wenn wir, der Kürze wegen, die Zähler der Ausdrücke (5) respective durch N_x, N_y, N_z, und ihren gemeinschaftlichen Nenner durch D bezeichnen, so daß

$$x = \frac{N_x}{D} \ ; \ y = \frac{N_y}{D} \ ; \ z = \frac{N_z}{D}$$

ist; wenn wir ferner

$$a_3 - a_2 = A_1 \ ; \ b_3 - b_2 = B_1 \ ; \ c_3 - c_2 = C_1 \ ;$$
$$a_3 - a_1 = A_2 \ ; \ b_3 - b_1 = B_2 \ ; \ c_3 - c_1 = C_2$$

setzen, so ist, wie wir leicht finden,

$$N_x = A_2B_1 - A_1B_2 \ ; \ N_y = C_2A_1 - C_1A_2 \ ; \ N_z = B_2C_1 - B_1C_2 \ ;$$

$$D = -\{a_1N_z + b_1N_y + c_1N_x\} = -\{a_2N_z + b_2N_y + c_2N_x\} = -\{a_3N_z + b_3N_y + c_3N_x\} \ .$$

1) Wenn nun in besonderen Fällen $N_x = 0$ oder $N_y = 0$ oder $N_z = 0$ ist, so liegt der gesuchte Durchschnittspunkt offenbar in der Ebene der yz oder der xz oder der xy. 2) Wenn aber zu gleicher Zeit $N_x = 0$ und

§. 8. $N_y = 0$ ist, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Es finden nämlich diese Gleichungen entweder deshalb Statt, weil $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$, oder weil $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}$ und $\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_2}{C_1}$ ist. In dem ersten Falle ist $a_3 = a_2 = a_1$ und die drei Ebenen schneiden sich auf der Achse der z in einem Punkte, dessen Ordinate $z = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{a_3}$ ist. In dem zweiten Falle aber ist auch $\frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$, also $B_2C_1 = B_1C_2$, somit auch $N_z = 0$ und folglich zugleich $D = 0$, so daß $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ und $z = \frac{0}{0}$ werden; weil aber die Gleichungen $N_x = 0$ und $N_y = 0$, d. i. $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$ und $C_2A_1 - C_1A_2 = 0$ nichts anders als die Gleichungen (3) in der vorigen Aufgabe sind, so schneiden sich in diesem zweiten Falle die drei Ebenen nicht in einem Punkte, sondern in einer und derselben Geraden. 3) Wenn nur $D = 0$ ist, so werden die Werthe von x, y und z gleich ∞. Die drei Ebenen sind dann entweder parallel oder sie schneiden sich (weil $D = 0$ nichts anders als die Gleichung (4) in der vorigen Aufgabe ist) in parallelen Geraden.

§. 9.

Aufgabe [16]. Die Gleichungen zweier Geraden sind gegeben. Es soll der Winkel gefunden werden, welchen sie mit einander bilden.

Es seyen l_1, l_2 zwei Gerade und

$$\left\{\begin{array}{l} gx = kz + a \\ gy = hz + b \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} g'x = k'z + a' \\ g'y = h'z + b' \end{array}\right\}$$

die beiden sie darstellenden Gleichungssysteme. Es mögen nun diese Linien einander schneiden oder nicht schneiden, so bilden sie bekanntermaßen denselben Winkel als zwei andere, sich in irgend einem Punkte schneidende Gerade L_1 und L_2, die ihnen parallel sind. Nehmen wir den Anfangspunkt der Coordinaten, O, zu diesem Durchschnittspunkte, so sind die Gleichungen der Geraden L_1 und L_2 (§. 4. Aufg. 5)

$$\left\{\begin{array}{l} gx = kz \\ gy = hz \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} g'x = k'z \\ g'y = h'z \end{array}\right\}$$

Nehmen wir nun auf der Geraden L_1 einen Punkt p, und auf L_2 einen Punkt p' beliebig an, und ziehen die Gerade pp', so haben wir, wenn wir den gesuchten Winkel durch (l_1l_2) bezeichnen, in dem Dreiecke pOp',

§. 9.

$$cos(l_1 l_2) = \frac{\overline{Op}^2 + \overline{Op'}^2 - \overline{pp'}^2}{2 \cdot \overline{Op} \cdot \overline{Op'}}.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte p und p' respective durch x, y, z und x', y', z', so haben wir ferner, weil diese Punkte auf den Geraden L_1 und L_2 liegen,

$$x = \frac{k}{g}z \;;\; y = \frac{h}{g}z \;;\; x' = \frac{k'}{g'}z' \;;\; y' = \frac{h'}{g'}z'.$$

Vermittelst dieser Ausdrücke und der Formel (3) des §. 2. finden wir

$$\overline{Op}^2 = \{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\,cos\hat{x} + 2gk\,cos\hat{y} + 2hk\,cos\hat{z}\}\frac{z^2}{g^2}$$

$$\overline{Op'}^2 = \{g'^2 + h'^2 + k'^2 + 2g'h'cos\hat{x} + 2g'k'cos\hat{y} + 2h'k'cos\hat{z}\}\frac{z'^2}{g'^2}$$

$$\overline{pp'}^2 = \left\{\begin{array}{l} \{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\,cos\hat{x} + 2gk\,cos\hat{y} + 2hk\,cos\hat{z}\}\frac{z^2}{g^2} \\ -2\{gg' + hh' + kk' + (gh' + g'h)cos\hat{x} + (gk' + g'k)cos\hat{y} + (hk' + h'k)cos\hat{z}\}\frac{zz'}{gg'} \\ + \{g'^2 + h'^2 + k'^2 + 2g'h'cos\hat{x} + 2g'k'cos\hat{y} + 2h'k'cos\hat{z}\}\frac{z'^2}{g'^2} \end{array}\right.$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in den oben für $cos(l_1 l_2)$ angegebenen, so kommt, nach einigen sich von selbst darbietenden Reductionen,

$$cos(l_1 l_2) = \frac{gg' + hh' + kk' + (gh' + g'h)cos\hat{x} + (gk' + g'k)cos\hat{y} + (hk' + h'k)cos\hat{z}}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\,cos\hat{x} + 2gk\,cos\hat{y} + 2hk\,cos\hat{z}} \cdot \sqrt{g'^2 + h'^2 + k'^2 + 2g'h'cos\hat{x} + 2g'k'cos\hat{y} + 2h'k'cos\hat{z}}}, \quad (1)$$

welches der gesuchte Ausdruck ist.

Sind die Coordinaten rechtwinklig, so reducirt sich die gefundene Formel (1), da alsdann $cos\hat{x} = cos\hat{y} = cos\hat{z} = 0$, auf

$$cos(l_1 l_2) = \frac{gg' + hh' + kk'}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2} \cdot \sqrt{g'^2 + h'^2 + k'^2}}. \quad (2)$$

Hieraus ergiebt sich zugleich die Relation, welche zwischen den Coefficienten g, h, k, g', h', k' Statt finden muß, wenn die Geraden l_1 und l_2 auf einander senkrecht seyn sollen; denn da alsdann $cos(l_1 l_2) = 0$ seyn muß, so ist diese Relation für schiefwinklige Coordinaten

$$gg' + hh' + kk' + (gh' + g'h)cos\hat{x} + (gk' + g'k)cos\hat{y} + (hk' + h'k)cos\hat{z} = 0, \quad (3)$$

und für rechtwinklige Coordinaten

$$gg' + hh' + kk' = 0. \quad (4)$$

§. 9. Vermittelst der Formeln (1 und 2) lassen sich leicht die Winkel finden, welche eine Gerade

$$\{\; gx = kz + a \;\;;\;\; gy = hz + b \;\}$$

mit den Coordinatenachsen bildet. Denn, da die Gleichungen dieser Achsen respective

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \;;\; \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \;;\; \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

sind, so brauchen wir, in den obigen Formeln, nur respective

$$g' = 0 \text{ und } h' = 0 \;\;;\;\; g' = 0 \text{ und } k' = 0 \;\;;\;\; h' = 0 \text{ und } k' = 0$$

zu setzen, und erhalten dadurch, wenn wir die genannten Winkel respective durch α, β und γ bezeichnen,

$$\left.\begin{array}{l}
\cos\alpha = \dfrac{k + g\cos\hat{y} + h\cos\hat{z}}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\cos\hat{x} + 2gk\cos\hat{y} + 2hk\cos\hat{z}}} \\[2ex]
\cos\beta = \dfrac{h + g\cos\hat{x} + k\cos\hat{z}}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\cos\hat{x} + 2gk\cos\hat{y} + 2hk\cos\hat{z}}} \\[2ex]
\cos\gamma = \dfrac{g + h\cos\hat{x} + k\cos\hat{y}}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2 + 2gh\cos\hat{x} + 2gk\cos\hat{y} + 2hk\cos\hat{z}}}
\end{array}\right\} \quad (5)$$

und diese Formeln gehen für rechtwinklige Coordinaten in

$$\cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{g^2+h^2+k^2}} \;;\; \cos\beta = \frac{h}{\sqrt{g^2+h^2+k^2}} \;;\; \cos\gamma = \frac{g}{\sqrt{g^2+h^2+k^2}} \quad (6)$$

über. Setzen wir, der Kürze wegen, $g^2+h^2+k^2+2gk\cos\hat{x}+2gh\cos\hat{y}+2hk\cos\hat{z} = \Delta^2$, so haben wir, zufolge (5),

$$\Delta\cos\alpha = k + g\cos\hat{y} + h\cos\hat{z} \;;\; \Delta\cos\beta = k\cos\hat{z} + g\cos\hat{x} + h \;;\; \Delta\cos\gamma = k\cos\hat{y} + g + h\cos\hat{x} \;;$$

aus welchen drei Gleichungen.

$$g = \frac{(1-\cos^2\hat{z})\cos\gamma + (\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x})\cos\beta + (\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y})\cos\alpha}{1 - \cos^2\hat{x} - \cos^2\hat{y} - \cos^2\hat{z} + 2\cos\hat{x}\cos\hat{y}\cos\hat{z}} \cdot \Delta \,,$$

$$h = \frac{(\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x})\cos\gamma + (1 - \cos^2\hat{y})\cos\beta + (\cos\hat{x}\cos\hat{y} - \cos\hat{z})\cos\alpha}{1 - \cos^2\hat{x} - \cos^2\hat{y} - \cos^2\hat{z} + 2\cos\hat{x}\cos\hat{y}\cos z} \cdot \Delta \,,$$

$$k = \frac{(\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y})\cos\gamma + (\cos\hat{x}\cos\hat{y} - \cos\hat{z})\cos\beta + (1 - \cos^2\hat{x})\cos\alpha}{1 - \cos^2\hat{x} - \cos^2\hat{y} - \cos^2\hat{z} + 2\cos\hat{x}\cos\hat{y}\cos\hat{z}} \cdot \Delta$$

folgt. Für eine andere Gerade, deren Gleichungen

$$\{\; g'x = k'z + a' \;\;;\;\; g'y = h'z + b' \;\}$$

sind und welche die drei Winkel α', β', γ' mit den Coordinatenachsen bildet,

haben wir ähnliche Ausdrücke für g', h' und k'. Substituiren wir alle diese Ausdrücke in die Formel (1), und bezeichnen, der Kürze wegen, $\cos\hat{x}$, $\cos\hat{y}$, $\cos\hat{z}$, $\cos\alpha$, ꝛc. durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{\alpha}$ ꝛc., so haben wir

§. 9.

$$\cos(l_1 l_2) = \frac{\left\{\begin{array}{c}(1-\bar{z}^2)\bar{\gamma}\bar{\gamma}' + (\bar{x}\bar{y}-\bar{z})(\bar{\alpha}\bar{\beta}'+\bar{\alpha}'\bar{\beta}) \\ +(1-\bar{y}^2)\bar{\beta}\bar{\beta}' + (\bar{x}\bar{z}-\bar{y})(\bar{\alpha}\bar{\gamma}'+\bar{\alpha}'\bar{\gamma}) \\ +(1-\bar{x}^2)\bar{\alpha}\bar{\alpha}' + (\bar{y}\bar{z}-\bar{x})(\bar{\beta}\bar{\gamma}'+\bar{\beta}'\bar{\gamma})\end{array}\right\}}{1-\bar{x}^2-\bar{y}^2-\bar{z}^2+2\bar{x}\bar{y}\bar{z}}. \quad (7)$$

Diese Formel (7) drückt den Winkel, den zwei Gerade l_1 und l_2 bilden, durch die Winkel aus, welche diese Geraden mit den Coordinatenachsen machen *). Sind die Coordinaten rechtwinklig, so nimmt diese Formel die einfache Gestalt

$$\cos(l_1 l_2) = \cos\gamma\cos\gamma' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\alpha\cos\alpha' \quad (8)$$

an. Aus den Formeln (7) und (8) ergeben sich die Relationen, welche zwischen den Winkel α, α', β, β', γ und γ' Statt finden, wenn die Geraden l_1 und l_2 auf einander senkrecht sind. Da nämlich alsdann $\cos(l_1 l_2) = 0$, so haben wir für schiefwinklige Coordinaten

$$(1-\bar{z}^2)\bar{\gamma}\bar{\gamma}'+(1-\bar{y}^2)\bar{\beta}\bar{\beta}'+(1-\bar{x}^2)\bar{\alpha}\bar{\alpha}'+(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})(\bar{\alpha}\bar{\beta}'+\bar{\alpha}'\bar{\beta})+(\bar{x}\bar{z}-\bar{y})(\bar{\alpha}\bar{\gamma}'+\bar{\alpha}'\bar{\gamma})+(\bar{y}\bar{z}-\bar{x})(\bar{\beta}\bar{\gamma}'+\bar{\beta}'\bar{\gamma}) = 0, \quad (9)$$

und für rechtwinklige Coordinaten

$$\cos\gamma\cos\gamma' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\alpha\cos\alpha' = 0 . \quad (10)$$

Wir fügen noch folgende Bemerkung hinzu. Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, so geben die Gleichungen (6)

$$g = \cos\gamma\sqrt{g^2+h^2+k^2} \;;\; h = \cos\beta\sqrt{g^2+h^2+k^2} \;;\; k = \cos\alpha\sqrt{g^2+h^2+k^2},$$

und substituiren wir diese Ausdrücke in die Gleichungen

$$\left|\; g(x-x_1) = k(z-z_1) \;;\; g(y-y_1) = h(z-z_1) \;\right|$$

der geraden Linie, welche durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ geht, so haben wir

$$\left|\; \cos\gamma(x-x_1) = \cos\alpha(z-z_1) \;;\; \cos\gamma(y-y_1) = \cos\beta(z-z_1) \;\right|. \quad (11)$$

Dies ist die Form der Gleichungen einer Geraden, welche in der analytischen Mechanik die gebräuchlichste ist.

Aufgabe [17]. Die Gleichungen einer Geraden und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben. Es soll gefunden werden: 1stens der

*) Fallen die beiden Geraden auf einander oder sind sie parallel, so ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ und $\cos(l_1 l_2) = 1$. Diese Werthe in die Formel (7) substituirt geben, wie es seyn muß, die Bedingungsgleichung (5) des §. 2.

§. 9. $$a(z - z') - c(x - x') = 0 \quad ; \quad b(z - z') - c(y - y') = 0$$

und eliminiren $(z - z')$, wodurch wir

$$a(y - y') - b(x - x') = 0$$

erhalten, so ist ersichtlich, daß der Zähler des gefundenen Ausdruckes (15) die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der ersten Theile dieser drei Gleichungen ist, wenn darin x_1, y_1 und z_1 für x, y, und z gesetzt werden.

IV. Wir bemerken hierbei noch Folgendes. Wenn der Punkt $x_1y_1z_1$ in der gegebenen Geraden liegt, so werden seine Coordinaten die Gleichungen derselben befriedigen; alsdann reduciren sich in dem Ausdrucke (15) die unter dem Wurzelzeichen des Zählers enthaltenen Quadrate auf Null, und es ist demnach, wie es auch seyn muß, $p = 0$. Die Gleichung (14) bekommt in demselben Falle eine unbestimmte Form und drückt jede Ebene aus, welche die gegebene Linie enthält. Die Gleichung (13) aber bleibt ungeändert; sie drückt dann diejenige Ebene aus, welche die gegebene Gerade in dem gegebenen Punkte senkrecht schneidet. Dasselbe gilt von der Gleichung (12).

Aufgabe [18]. Die Gleichungen zweier Geraden sind gegeben; es soll das Gleichungs-System derjenigen geraden Linie gefunden werden, welche die gegebenen rechtwinklig schneidet.

Es seyen

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\gamma'(x-x') = \cos\alpha'(z-z') \\ \cos\gamma'(y-y') = \cos\beta'(z-z') \end{array}\right\} \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} \cos\gamma''(x-x'') = \cos\alpha''(z-z'') \\ \cos\gamma''(y-y'') = \cos\beta''(z-z'') \end{array}\right\}$$

die Gleichungssysteme der beiden gegebenen Geraden in rechtwinkligen Coordinaten. Sollen nun

$$\left\{ \cos\gamma\, x = \cos\alpha\, z + a \quad ; \quad \cos\gamma\, y = \cos\beta\, z + b \right\}$$

die Gleichungen der gesuchten geraden Linie seyn, so müssen, weil diese Gerade auf den gegebenen senkrecht seyn soll (Aufg. 16. S. 10), folgende Gleichungen Statt finden

$$\cos\gamma' \cos\gamma + \cos\beta' \cos\beta + \cos\alpha' \cos\alpha = 0 \,,$$
$$\cos\gamma'' \cos\gamma + \cos\beta'' \cos\beta + \cos\alpha'' \cos\alpha = 0 \,;$$

und außerdem ist (§. 1. S. 9)

$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1 \,.$$

Aus diesen drei Gleichungen finden wir durch Entwicklung, und wenn wir den Winkel, welchen die beiden gegebenen Geraden mit einander machen,

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\gamma'(x-x') = \cos\alpha'(z-z')\\ \cos\gamma'(y-y') = \cos\beta'(z-z')\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\cos\gamma''(x-x'') = \cos\alpha''(z-z'')\\ \cos\gamma''(y-y'') = \cos\beta''(z-z'')\end{array}\right\}$$ §. 11.

die gegebenen Gleichungen der Geraden g', g''. Es seyen ferner

$$\cos\gamma x = \cos\alpha z + a \quad ; \quad \cos\gamma y = \cos\beta z + b$$

die Gleichungen der Geraden l, welche die Geraden g', g'' rechtwinklig schneidet, so ist, wie wir (Aufg. 18, §. 9) gefunden haben,

$$\cos\gamma = \frac{\cos\beta''\cos\alpha' - \cos\beta'\cos\alpha''}{\sin\delta} ; \cos\beta = \frac{\cos\alpha''\cos\gamma' - \cos\alpha'\cos\gamma''}{\sin\delta} ; \cos\alpha = \frac{\cos\gamma''\cos\beta' - \cos\gamma'\cos\beta''}{\sin\delta} .$$

Legen wir nun durch einen Punkt $x'y'z'$ der Geraden g' eine Ebene, welche senkrecht auf der Geraden l stehet, so wird sie die Gerade g' enthalten, und eben so wird eine Ebene, welche durch einen Punkt $x''y''z''$ der Geraden g'' geht, und auf der Geraden l senkrecht ist, die Gerade g'' enthalten. Die Gleichungen dieser beiden Ebenen sind aber (§. 9. S. 13)

$$\cos\gamma(z-z') + \cos\beta(y-y') + \cos\alpha(x-x') = 0 \quad ,$$
$$\cos\gamma(z-z'') + \cos\beta(y-y'') + \cos\alpha(x-x'') = 0 \quad ,$$

und für die Entfernung dieser Ebenen, welche zugleich die Entfernung der Geraden g' und g'' ist, haben wir, zufolge der vorigen Aufgabe,

$$k = \pm\left\{\cos\gamma(z''-z') + \cos\beta(y''-y') + \cos\alpha(x''-x')\right\} ,$$

ein Ausdruck, in welchem nur noch für $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ die vorher angegebenen Ausdrücke substituirt zu werden brauchen.

Aufgabe [26]. Die Gleichungen zweier Ebenen in rechtwinkligen Coordinaten sind gegeben. Es soll der Ort des Punktes p gefunden werden, dessen Entfernungen von beiden gegebenen Ebenen ein gegebenes constantes Verhältniß haben.

Es seyen

$$cz + by + ax + d = 0 \quad ; \quad c'z + b'y + a'x + d' = 0$$

die gegebenen Gleichungen und $1 : n$ das gegebene Verhältniß. Die Entfernungen des Punktes p, dessen Coordinaten x', y', z' seyn mögen, von diesen Ebenen sind (Aufg. 23)

$$\pm\frac{cz' + by' + ax' + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad ; \quad \pm\frac{c'z' + b'y' + a'x' + d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \quad ;$$

und weil diese Entfernungen in dem Verhältniß von $1 : n$ stehen sollen, so muß

$$\frac{cz + by + ax + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \pm n\,\frac{c'z + b'y + a'x + d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \quad (5)$$

§ 9. funden werden, welche durch diesen Punkt gehet und welche auf jener Ebene senkrecht ist.

Es sey $cz + by + ax + 1 = 0$ die gegebene Gleichung der Ebene und es seyen x_1, y_1, z_1 die gegebenen Coordinaten des Punktes.

Die gesuchte Gerade wird sich, weil sie durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gehen soll, wenn g, h, k unbestimmte Coefficienten bedeuten, durch die Gleichungen

$$g(x - x_1) = k(z - z_1) \quad ; \quad g(y - y_1) = h(z - z_1)$$

darstellen lassen (§. 4.). Weil aber diese Gerade auf der gegebenen Ebene senkrecht seyn soll, so muß diese Ebene auch auf der Geraden senkrecht stehen. Nun ist aber jede Ebene, welche auf dieser Geraden senkrecht stehet (Aufg. 17. S. 12) durch die Gleichung

$$(g+h\cos\hat{x}+k\cos\hat{y})(z-z')+(h+g\cos\hat{x}+k\cos\hat{z})(y-y')+(k+g\cos\hat{y}+h\cos\hat{z})(x-x') = 0$$

ausgedrückt, und da diese Ebene nun der gegebenen parallel seyn muß, so haben wir (§. 4. Aufg. 4)

$$\frac{b}{c} = \frac{h + g\cos\hat{x} + k\cos\hat{z}}{g + h\cos\hat{x} + k\cos\hat{y}} \quad ; \quad \frac{a}{c} = \frac{k + g\cos\hat{y} + h\cos\hat{z}}{g + h\cos\hat{x} + k\cos\hat{y}} \,.$$

Diese beiden Gleichungen reichen hin, die Quotienten $\frac{h}{g}$ und $\frac{k}{g}$ zu bestimmen, und sie werden erfüllt, wenn wir setzen

$$c = g+h\cos\hat{x}+k\cos\hat{y} \,;\, b = h+g\cos\hat{x}+k\cos\hat{z} \,;\, a = k+g\cos\hat{y}+h\cos\hat{z}; \quad (17)$$

woraus wir

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{c\sin^2\hat{z} + b(\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x}) + a(\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y})}{1 - \cos^2\hat{x} - \cos^2\hat{y} - \cos^2\hat{z} + 2\cos\hat{x}\cos\hat{y}\cos\hat{z}} \\ h &= \frac{c(\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x}) + b\sin^2\hat{y} + a(\cos\hat{x}\cos\hat{y} - \cos\hat{z})}{1 - \cos^2\hat{x} - \cos^2\hat{y} - \cos^2\hat{z} + 2\cos\hat{x}\cos\hat{y}\cos\hat{z}} \\ k &= \frac{c(\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y}) + b(\cos\hat{x}\cos\hat{y} - \cos\hat{z}) + a\sin^2\hat{x}}{1 - \cos^2\hat{x} - \cos^2\hat{y} - \cos^2\hat{z} + 2\cos\hat{x}\cos\hat{y}\cos\hat{z}} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

erhalten. Die Gleichungen der gesuchten Geraden sind also

$$\left.\begin{aligned} &\{c\sin^2\hat{z} + b(\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x}) + a(\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y})\}(x - x_1) \\ &\quad = \{c(\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y}) + b(\cos\hat{x}\cos\hat{y} - \cos\hat{z}) + a\sin^2\hat{x}\}(z - z_1)\,; \\ &\{c\sin^2\hat{z} + b(\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x}) + a(\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y})\}(y - y_1) \\ &\quad = \{c(\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x}) + b\sin^2\hat{y} + a(\cos\hat{x}\cos\hat{y} - \cos\hat{z})\}(z - z_1)\,. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Für rechtwinklige Coordinaten erhalten wir hieraus

$$\{\, c(x - x_1) = a(z - z_1) \;;\; c(y - y_1) = b(z - z_1) \,\} \,. \quad (20)$$

§. 10.

Aufgabe [20]. Die Gleichungen zweier Ebenen sind gegeben; es soll ihr Neigungswinkel gefunden werden.

Es seyen $cz + by + ax + 1 = 0$; $c'z + b'y + a'x + 1 = 0$ die gegebenen Gleichungen der beiden Ebenen. Fällen wir von dem Anfangspunkte der Coordinaten auf jede dieser Ebenen eine Senkrechte, so schließen diese einen Winkel ein, der offenbar dem Neigungswinkel ω dieser Ebenen gleich ist. Nun sind aber, wenn respective

$$\left\{\begin{array}{l} gx = kz \\ gy = hz \end{array}\right\} ; \quad \left\{\begin{array}{l} g'x = k'z \\ g'y = h'z \end{array}\right\}$$

die Gleichungen dieser Senkrechten sind, a, b, und c den Ausdrücken (17) des vor. §., und a', b' und c' denselben Ausdrücken, wenn wir den Buchstaben g, h und k Accente geben, gleich; ferner sind g, h und k den Ausdrücken (18) des vor. §., und g', h' und k' denselben Ausdrücken, wenn darin den Buchstaben a, b und c Accente gegeben werden, gleich. Substituiren wir also die zuletzt genannten Ausdrücke in die Formel (1) des vor. §., so erhalten wir, indem wir $\cos\hat{x}$, $\cos\hat{y}$, $\cos\hat{z}$, der Kürze wegen, wieder durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ bezeichnen, und

$$\left\{\begin{array}{l} (1-\bar{z}^2)cc' + (\bar{x}\bar{y}-\bar{z})(ab'+a'b) \\ +(1-\bar{y}^2)bb' + (\bar{x}\bar{z}-\bar{y})(ac'+a'c) \\ +(1-\bar{x}^2)aa' + (\bar{y}\bar{z}-\bar{x})(bc'+b'c) \end{array}\right\} = Q \ ;$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1-\bar{z}^2)c^2+2(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})ab \\ +(1-\bar{y}^2)b^2+2(\bar{x}\bar{z}-\bar{y})ac \\ +(1-\bar{x}^2)a^2+2(\bar{y}\bar{z}-\bar{x})bc \end{array}\right\} = M \ ; \quad \left\{\begin{array}{l} (1-\bar{z}^2)c'^2+2(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})a'b' \\ +(1-\bar{y}^2)b'^2+2(\bar{x}\bar{z}-\bar{y})a'c' \\ +(1-\bar{x}^2)a'^2+2(\bar{y}\bar{z}-\bar{x})b'c' \end{array}\right\} = N$$

setzen,

$$\cos\omega = \frac{Q}{\sqrt{MN}} \qquad (1)$$

Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, vereinfacht sich der Ausdruck bedeutend, und wir haben

$$\cos\omega = \frac{cc'+bb'+aa'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \qquad (2)$$

Hieraus ergiebt sich, daß, wenn die beiden in Rede stehenden Ebenen sich rechtwinklig schneiden sollen, die Bedingungsgleichung

$$Q = 0 \qquad (3)$$

oder für rechtwinklige Coordinaten

§. 10.

$$c c' + b b' + a a' = 0 \qquad (4)$$

erfüllt werden muß.

Aus den Formeln (1) oder (2) ergeben sich unmittelbar die Ausdrücke für die Winkel, welche eine gegebene Ebene

$$cz + by + ax + 1 = 0$$

mit den Coordinatenebenen bildet. Denn, da die Gleichungen von Ebenen, welche den Coordinatenebenen parallel laufen, auf die Formen $c'z + 1 = 0$, $b'y + 1 = 0$, $a'x + 1 = 0$ gebracht werden können, so dürfen wir bloß a' und b', a' und c', b' und c', nach einander gleich Null setzen. Wir erhalten hierdurch, wenn wir die eben genannten Winkel durch ω_z, ω_y und ω_x bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega_z &= \frac{(1-\bar{z}^2)c + (\bar{x}\bar{z} - \bar{y})a + (\bar{y}\bar{z} - \bar{x})b}{\sqrt{(1-\bar{z}^2)M}}, \\ \cos\omega_y &= \frac{(1-\bar{y}^2)b + (\bar{x}\bar{y} - \bar{z})a + (\bar{y}\bar{z} - \bar{x})c}{\sqrt{(1-\bar{y}^2)M}}, \\ \cos\omega_x &= \frac{(1-\bar{x}^2)a + (\bar{x}\bar{y} - \bar{z})b + (\bar{x}\bar{z} - \bar{y})c}{\sqrt{(1-\bar{x}^2)M}} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

für rechtwinklige Coordinaten aber

$$\cos\omega_z = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \cos\omega_y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \cos\omega_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad (6)$$

und zugleich

$$\cos^2\omega_z + \cos^2\omega_y + \cos^2\omega_x = 1 \qquad (7)$$

Da für eine andere Ebene $c'z + b'y + a'x + 1' = 0$, welche die Winkel ω'_z, ω'_y, ω'_x mit den Coordinatenebenen bildet, ähnliche Ausdrücke Statt finden, so ergiebt sich aus (2), für rechtwinklige Coordinaten, die Relation

$$\cos\omega = \cos\omega_z\cos\omega'_z + \cos\omega_y\cos\omega'_y + \cos\omega_x\cos\omega'_x \qquad (8)$$

und wenn beide Ebenen senkrecht auf einander stehen sollen,

$$\cos\omega_z\cos\omega'_z + \cos\omega_y\cos\omega'_y + \cos\omega_x\cos\omega'_x = 0\,. \qquad (9)$$

Aus den Formeln (5) lassen sich die Ausdrücke für die Winkel finden, welche die Coordinatenebenen mit einander bilden. Bezeichnen wir nämlich den Neigungswinkel der Ebenen

der xz und der yz durch Z,
der xy und der yz durch Y,
der xy und der xz durch X,

so erhalten wir dadurch, daß wir in den Gleichungen (5) respective a und b, a und c, b und c gleich Null setzen, da $1 - x^2 = \sin^2\hat{x}$, ꝛc., §. 10.

$$\cos X = \pm\frac{\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x}}{\sin\hat{y}\sin\hat{z}}\,;\ \cos Y = \pm\frac{\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y}}{\sin\hat{x}\sin\hat{z}}\,;\ \cos Z = \pm\frac{\cos\hat{x}\cos\hat{y} - \cos\hat{z}}{\sin\hat{x}\sin\hat{y}} \quad (10)^{*)}$$

Auch können wir leicht die Neigungswinkel der Coordinatenachsen gegen die Coordinatenebenen finden. Bezeichnen wir den Winkel, welche die Achse der z mit der Ebene der xy bildet, durch Z', denjenigen, welchen die Achse der y mit der Ebene der xz macht, durch Y', und den, welchen die Achse der x mit der Ebene der yz bildet, durch X', und errichten wir im Anfangspunkte auf den drei Coordinatenebenen die Perpendikel h_z, h_y, h_x, so ist offenbar

$$\sin Z' = \cos(z, h_z) \quad;\quad \sin Y' = \cos(y, h_y) \quad;\quad \sin X' = \cos(x, h_x)\,,$$

wo (z, h_z) den Winkel bedeutet, den die Achse der z mit dem Perpendikel h_z bildet, und (y, h_y), (x, h_x) analoge Bedeutungen haben. Die Gleichungen der Geraden h_z, h_y, h_x sind respective (§. 9. S. 19.)

$$\left\{\sin^2\hat{z}\cdot x = (\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y})z \quad;\quad \sin^2\hat{z}\cdot y = (\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x})z\right\},$$

$$\left\{(\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x})x = (\cos\hat{x}\cos\hat{y} - \cos\hat{z})z \quad;\quad (\cos\hat{y}\cos\hat{z} - \cos\hat{x})y = \sin^2\hat{y}\cdot z\right\},$$

$$\left\{(\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y})x = \sin^2\hat{x}\cdot z \quad;\quad (\cos\hat{x}\cos\hat{z} - \cos\hat{y})y = (\cos\hat{x}\cos\hat{y} - \cos\hat{z})z\right\};$$

und hieraus erhalten wir, zufolge §. 9. (F. 5), und nach einigen leichten Reductionen, wenn wir, der Kürze wegen,

$$1 - \cos^2\hat{x} - \cos^2\hat{y} - \cos^2\hat{z} + 2\cos\hat{x}\cos\hat{y}\cos\hat{z} = \Omega^2 \quad (11)$$

setzen,

$$\sin X' = \frac{\Omega}{\sin\hat{x}} \;;\; \sin Y' = \frac{\Omega}{\sin\hat{y}} \;;\; \sin Z' = \frac{\Omega}{\sin\hat{z}}\,. \quad (12)$$

Aufgabe [21]. Die Länge des Perpendikels, welcher von dem Anfangspunkte der rechtwinkligen Coordinaten auf eine Ebene gefällt ist, und die Winkel, welche er mit den Coordinatenachsen bildet, sind gegeben; es soll die Gleichung der Ebene gefunden werden.

Es sey die gegebene Länge des Perpendikels gleich P, und die gegebenen Winkel seyen α, β, γ. Diese vier Größen können als Polarcoordinaten

---

*) Die Formeln (10) mit den untern Vorzeichen genommen, sind die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, aus welchen alle übrigen Formeln derselben abgeleitet werden können. Die doppelten Vorzeichen in unseren Formeln, welche von den Wurzelzeichen in den Formeln (5) herrühren, beziehen sich auf die Neigungswinkel, und auf deren Nebenwinkel.

§. 10. des Endpunktes des Perpendikels angesehen werden. Die rechtwinkligen Coordinaten dieses Endpunktes sind daher (§. 1. F. 7)

$$x' = P\cos\alpha \;\; ; \;\; y' = P\cos\beta \;\; ; \;\; z' = P\cos\gamma \;,$$

und die Gleichungen des Perpendikels (§. 9. G. 11)

$$\cos\gamma\, x = \cos\alpha\, z \;\; ; \;\; \cos\gamma\, y = \cos\beta\, z.$$

Da nun die Gleichung der auf dieser Geraden senkrechten und durch den Punkt x'y'z' gehenden Ebene (§. 9. G. 13)

$$\cos\gamma\, z + \cos\beta\, y + \cos\alpha\, x = \cos\gamma\, z' + \cos\beta\, y' + \cos\alpha\, x'$$

ist, so erhalten wir durch Substitution der Werthe von x', y' und z', indem wir bemerken, daß (§. 1. G. 9) $\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1$,

$$\cos\gamma\, z + \cos\beta\, y + \cos\alpha\, x = P \;, \qquad (13)$$

welches die gesuchte Gleichung der Ebene ist.

§. 11.

Aufgabe [22]. **Die Gleichung einer Ebene in rechtwinkligen Coordinaten ist gegeben. Es soll der Ort des Punktes gefunden werden, welcher von dieser Ebene eine gegebene Entfernung hat.** —

Es sey $cz + by + ax = d$ die gegebene Gleichung der Ebene und k die gegebene Entfernung. Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes, dessen Ort gesucht wird, durch x', y', z', so sind die Gleichungen der auf der gegebenen Ebene senkrechten und durch diesen Punkt gehenden Geraden (§. 9. G. 20)

$$\left\{ c(x - x') = a(z - z') \;\; ; \;\; c(y - y') = b(z - z') \right\} \;;$$

und, wenn wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Geraden und der gegebenen Ebene durch x'', y'', z'' bezeichnen, so haben wir, da diese Coordinaten alle drei Gleichungen befriedigen müssen,

$$cz'' + by'' + ax'' = d \text{ oder } c(z'' - z') + b(y'' - y') + a(x'' - x') = d - (cz' + by' + ax');$$

$$c(x'' - x') = a(z'' - z') \;\; ; \;\; c(y'' - y') = b(z'' - z') \;;$$

und ferner (§. 2. F. 4)

$$k = \pm \sqrt{(z'' - z')^2 + (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2} \;.$$

Eliminiren wir zwischen diesen vier Gleichungen die Größen $(x'' - x')$, $(y'' - y')$ und $(z'' - z')$, so kommt

$$cz' + by' + ax' = d \pm k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \;, \qquad (1)$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist. Diese Doppelgleichung gehört zu zwei Ebenen, von denen

§. 11.

die eine durch $cz' + by' + cx' = d + k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, (2)

die andere durch $cz' + by' + cx' = d - k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, (3)

ausgedrückt ist. Diese beiden Ebenen sind der gegebenen parallel (§. 4. Aufg. 4); die erste schneidet auf den drei Coordinatenachsen drei Stücke ab, welche respective gleich

$$\frac{d + k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{c};\quad \frac{d + k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{b};\quad \frac{d + k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a};$$

die zweite schneidet auf denselben Achsen drei Stücke ab, welche gleich

$$\frac{d - k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{c};\quad \frac{d - k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{b};\quad \frac{d - k\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a}$$

sind; während die gegebene Ebene auf denselben Achsen die Stücke

$$\frac{d}{c};\quad \frac{d}{b};\quad \frac{d}{a}$$

abschneidet. Es liegt also, von der gegebenen Ebene an gerechnet, jene erste Ebene nach der positiven, und die zweite Ebene nach der negativen Seite der Coordinatenachsen hin.

Aufgabe [23]. Die Gleichung einer Ebene und die Coordinaten eines Punktes in Beziehung auf rechtwinklige Achsen sind gegeben; es soll die Entfernung des Punktes von der Ebene gefunden werden.

Es sey $cz + by + ax + d = 0$ die gegebene Gleichung der Ebene, und x', y', z' seyen die gegebenen Coordinaten des Punktes. Alsdann finden zwischen diesen Coordinaten x', y', z', den in der vorigen Aufgabe genannten Coordinaten x'', y'', z'' und der jetzt noch unbekannten Entfernung k dieselben Gleichungen wie in der vorigen Aufgabe Statt; und durch Elimination von x'', y'' und z'' finden wir

$$k = \pm \frac{cz' + by' + ax' + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (4)$$

Dieser Ausdruck muß mit dem Zeichen + genommen werden, wenn der Punkt $x'y'z'$ von der gegebenen Ebene an gerechnet, nach der Seite der positiven, und mit dem Zeichen −, wenn er nach der Seite der negativen Coordinaten hin liegt.

Aufgabe [24]. Die Gleichungen zweier parallelen Ebenen in rechtwinkligen Coordinaten sind gegeben. Es soll ihre Entfernung gefunden werden.

Es seyen

§. 11. $cz + by + ax + d = 0 \quad ; \quad cz + by + ax + d' = 0.$

die gegebenen Gleichungen. Nehmen wir einen Punkt $x'y'z'$ in der ersten Ebene an und fällen von ihm aus eine Senkrechte auf die zweite Ebene, so ist ihre Länge (vor. Aufg.)

$$k = \pm \frac{cz' + by' + ax' + d'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Da aber der Punkt $x'y'z'$ in der ersten Ebene liegt, so haben wir auch $cz' + by' + ax' = -d$; folglich ist

$$k = \pm \frac{d' - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

welches der Ausdruck für die gesuchte Entfernung ist.

Haben die gegebenen Gleichungen die Form

$$\cos\gamma(z-z') + \cos\beta(y-y') + \cos\alpha(x-x') = 0\,;\ \cos\gamma(z-z'') + \cos\beta(y-y'') + \cos\alpha(x-x'') = 0,$$

wo $x'y'z'$ ein Punkt in der ersten, und $x''y''z''$ ein Punkt in der zweiten Ebene ist, so finden wir, da $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist,

$$k = \pm \left\{\cos\gamma(z'' - z') + \cos\beta(y'' - y') + \cos\alpha(x'' - x')\right\}.$$

Nun sind aber $(z'' - z')$, $(y'' - y')$ und $(x'' - x')$ die Projectionen der Verbindungslinie der beiden Punkte auf die drei Coordinatenachsen, und $\cos\gamma(z'' - z')$, $\cos\beta(y'' - y')$ und $\cos\alpha(x'' - x')$ sind offenbar die Projectionen dieser Projectionen auf irgend eine Gerade, welche die beiden Ebenen senkrecht trifft. Hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende

Lehrsatz [1]. Nimmt man auf einer jeden von zwei parallelen Ebenen einen Punkt p', p'' beliebig an, bildet die orthogonalen Projectionen a_1, a_2, a_3 der Geraden $p'p''$ auf beliebige drei zu einander rechtwinklige Gerade, und projicirt die drei Linien a_1, a_2, a_3 auf irgend eine die parallelen Ebenen rechtwinklig treffende Gerade, so ist die Summe dieser drei letzten Projectionen constant und der Entfernung der beiden Ebenen gleich, wo auch die beiden Punkte p', p'' auf den parallelen Ebenen angenommen seyn mögen.

Aufgabe [25]. Die Gleichungen zweier Geraden in rechtwinkligen Coordinaten sind gegeben. Es soll ihre Entfernung gefunden werden.

Die Entfernung zweier Geraden g', g'' im Raume ist dasjenige Stück der, auf beiden senkrecht stehenden und sie schneidenden geraden Linie l, welches von den Durchschnittspunkten begrenzt wird. Es seyen

§. 11.

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\gamma'(x-x') = \cos\alpha'(z-z') \\ \cos\gamma'(y-y') = \cos\beta'(z-z')\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\cos\gamma''(x-x'') = \cos\alpha''(z-z'') \\ \cos\gamma''(y-y'') = \cos\beta''(z-z'')\end{array}\right\}$$

die gegebenen Gleichungen der Geraden g', g''. Es seyen ferner

$$\cos\gamma\,x = \cos\alpha\,z + a \quad ; \quad \cos\gamma\,y = \cos\beta\,z + b$$

die Gleichungen der Geraden l, welche die Geraden g', g'' rechtwinklig schneidet, so ist, wie wir (Aufg. 18, §. 9) gefunden haben,

$$\cos\gamma = \frac{\cos\beta''\cos\alpha' - \cos\beta'\cos\alpha''}{\sin\delta} ; \cos\beta = \frac{\cos\alpha''\cos\gamma' - \cos\alpha'\cos\gamma''}{\sin\delta} ; \cos\alpha = \frac{\cos\gamma''\cos\beta' - \cos\gamma'\cos\beta''}{\sin\delta} .$$

Legen wir nun durch einen Punkt $x'y'z'$ der Geraden g' eine Ebene, welche senkrecht auf der Geraden l stehet, so wird sie die Gerade g' enthalten, und eben so wird eine Ebene, welche durch einen Punkt $x''y''z''$ der Geraden g'' geht, und auf der Geraden l senkrecht ist, die Gerade g'' enthalten. Die Gleichungen dieser beiden Ebenen sind aber (§. 9. G. 13)

$$\cos\gamma(z-z') + \cos\beta(y-y') + \cos\alpha(x-x') = 0 \quad ,$$
$$\cos\gamma(z-z'') + \cos\beta(y-y'') + \cos\alpha(x-x'') = 0 \quad ,$$

und für die Entfernung dieser Ebenen, welche zugleich die Entfernung der Geraden g' und g'' ist, haben wir, zufolge der vorigen Aufgabe,

$$k = \pm\left\{\cos\gamma(z''-z') + \cos\beta(y''-y') + \cos\alpha(x''-x')\right\} ,$$

ein Ausdruck, in welchem nur noch für $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ die vorher angegebenen Ausdrücke substituirt zu werden brauchen.

Aufgabe [26]. Die Gleichungen zweier Ebenen in rechtwinkligen Coordinaten sind gegeben. Es soll der Ort des Punktes p gefunden werden, dessen Entfernungen von beiden gegebenen Ebenen ein gegebenes constantes Verhältniß haben.

Es seyen

$$cz + by + ax + d = 0 \quad ; \quad c'z + b'y + a'x + d' = 0$$

die gegebenen Gleichungen und $1 : n$ das gegebene Verhältniß. Die Entfernungen des Punktes p, dessen Coordinaten x', y', z' seyn mögen, von diesen Ebenen sind (Aufg. 23)

$$\pm\frac{cz' + by' + ax' + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \; ; \; \pm\frac{c'z' + b'y' + a'x' + d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \; ;$$

und weil diese Entfernungen in dem Verhältniß von $1 : n$ stehen sollen, so muß

$$\frac{cz + by + ax + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \pm n\,\frac{c'z + b'y + a'x + d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \qquad (5)$$

§. 11. seyn, wenn wir die jetzt nicht mehr nöthigen Accente weglassen, und dies ist die Gleichung des gesuchten Ortes, welcher demnach aus zwei Ebenen besteht, von denen

die eine durch $$\frac{cz+by+ax+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = n\cdot\frac{c'z+b'y+a'x+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}\ ; \quad (6)$$

die andere durch $$\frac{cz+by+ax+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = -n\cdot\frac{c'z+b'y+a'x+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \quad (7)$$

ausgedrückt wird. Da diese Gleichungen durch alle Werthe von x, y, z befriedigt werden, welche die gegebenen Gleichungen zu gleicher Zeit erfüllen, so folgt, daß die gefundenen Ebenen sich in der Durchschnittslinie der gegebenen schneiden.

Wenn $n = 1$ ist, sind die Entfernungen des Punktes p von den gegebenen Ebenen einander gleich und die Ebenen (6) und (7), deren Gleichungen dann

$$\frac{cz+by+ax+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{c'z+b'y+a'x+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \quad (8)$$

$$\frac{cz+by+cx+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = -\frac{c'z+b'y+a'x+d'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \quad (9)$$

sind, halbiren die Neigungswinkel der gegebenen. Werden die gegebenen Gleichungen auf die Formen

$$A \equiv \cos\gamma z+\cos\beta y+\cos\alpha x+k = 0\ ;\ A' \equiv \cos\gamma' z+\cos\beta' y+\cos\alpha' x+k' = 0$$

gebracht, so haben wir statt der Gleichungen (8) und (9), da

$$\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \cos^2\gamma'+\cos^2\beta'+\cos^2\alpha' = 1\ ,$$

$$(\cos\gamma-\cos\gamma')z+(\cos\beta-\cos\beta')y+(\cos\alpha-\cos\alpha')x+k-k' = 0 \quad (10)$$

$$(\cos\gamma+\cos\gamma')z+(\cos\beta+\cos\beta')y+(\cos\alpha+\cos\alpha')x+k+k' = 0 \quad (11)$$

oder kürzer $A-A' = 0$ und $A+A' = 0$. Uebrigens sieht man nun, da

$$(\cos\gamma-\cos\gamma')(\cos\gamma+\cos\gamma')+(\cos\beta-\cos\beta')(\cos\beta+\cos\beta')+(\cos\alpha-\cos\alpha')(\cos\alpha+\cos\alpha') = 0$$

ist, daß beide Ebenen (10 u. 11) oder (8 u. 9) auf einander senkrecht sind (§. 10. G. 4).

Aufgabe [27]. Die Gleichungen zweier Geraden und die Coordinaten eines Punktes sind gegeben. Es soll der Ort derjenigen Geraden gefunden werden, welche durch den gegebenen Punkt gehet und welche mit den gegebenen Geraden gleiche Winkel bildet.

Es seyen

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\gamma(x-x_1) = \cos\alpha(z-z_1) \\ \cos\gamma(y-y_1) = \cos\beta(z-z_1) \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} \cos\gamma'(x-x_2) = \cos\alpha'(z-z_2) \\ \cos\gamma'(y-y_2) = \cos\beta'(z-z_2) \end{array}\right\}$$ §. 11.

die Gleichungen der gegebenen Geraden in rechtwinkligen Coordinaten und x', y', z' die Coordinaten des gegebenen Punktes.

Die Gleichungen der Geraden, deren Ort gesucht wird, sind

$$\left\{ \cos\gamma''(x-x') = \cos\alpha''(z-z') \;;\; \cos\gamma''(y-y') = \cos\beta''(z-z') \right\},$$

wenn α'', β'', γ'' so bestimmt werden, daß

$$\cos\gamma\cos\gamma''+\cos\beta\cos\beta''+\cos\alpha\cos\alpha'' = \pm\left\{\cos\gamma'\cos\gamma''+\cos\beta'\cos\beta''+\cos\alpha'\cos\alpha''\right\}$$

ist (§. 9. Aufg. 16). Eliminiren wir $\cos\alpha''$ und $\cos\beta''$ zwischen diesen drei Gleichungen, so ergiebt sich

$$\cos\gamma(z-z')+\cos\beta(y-y')+\cos\alpha(z-z') = \pm\left\{\cos\gamma'(z-z')+\cos\beta'(y-y')+\cos\alpha(x-x')\right\} \quad (12)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher demnach aus zwei Ebenen besteht, welche respective

$$(\cos\gamma-\cos\gamma')(z-z')+(\cos\beta-\cos\beta')(y-y')+(\cos\alpha-\cos\alpha')(x-x') = 0 \quad (13)$$
$$(\cos\gamma+\cos\gamma')(z-z')+(\cos\beta+\cos\beta')(y-y')+(\cos\alpha+\cos\alpha')(x-x') = 0 \quad (14)$$

zu Gleichungen haben, und welche, wie die in der vorigen Aufgabe gefundenen Ebenen, senkrecht auf einander sind.

§. 12.

Aufgabe [28]. Es sind zwei Ebenen A, B, und ein Punkt p gegeben. Durch diesen Punkt p sind zwei Ebenen C, D so gelegt, daß ihre Durchschnittslinie die Durchschnittslinie der Ebenen A und B schneidet; ferner ist durch den Durchschnitt der Ebenen A und C und durch den Durchschnitt der Ebenen B und D eine Ebene F, so wie durch den Durchschnitt der Ebenen A und D und durch den Durchschnitt der Ebenen B und C eine Ebene G gelegt. Es soll der Ort des Durchschnittes der Ebenen F und G gefunden werden.

Wir nehmen die Ebene A zur Ebene xz, die Ebene B zur Ebene der yz und eine beliebige Ebene zur Ebene der xy; alsdann ist die Durchschnittslinie der Ebenen A und B die Achse der z. Es seyen x_1, y_1, z_1 die auf dieses Coordinatensystem bezogenen Coordinaten des gegebenen Punktes p. Nennen wir nun die veränderlichen Punkte, in welchen die Ebenen C und D die Achsen der x, der y, der z schneiden, respective p'_x, p'_y, p'_z und p''_x, p''_y, p'_z, und setzen, wenn O den Anfangspunkt der Coordinaten bedeutet,

$$Op'_x = x' \;;\; Op'_y = y' \;; \qquad Op'_z = z' \;;$$
$$Op''_x = x'' \;;\; Op''_y = y'' \;;$$

§. 12. so ist die Gleichung

$$\text{der Ebene C}: \quad \frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} + \frac{z}{z'} = 1 \;,$$

$$\text{der Ebene D}: \quad \frac{x}{x''} + \frac{y}{y''} + \frac{z}{z'} = 1$$

(§. 6. S. 5). Da aber diese Ebenen durch den Punkt p gehen sollen, so müssen die Coordinaten x_1, y_1, z_1 beide Gleichungen befriedigen, und wir haben also

$$\frac{x_1}{x'} + \frac{y_1}{y'} + \frac{z_1}{z'} = 1 \quad (1) \quad ; \quad \frac{x_1}{x''} + \frac{y_1}{y''} + \frac{z_1}{z'} = 1 \;. \quad (2)$$

Nun sind die Gleichungen der Ebene F, welche durch die Punkte p'_x, p''_y und p'_z geht, und der Ebene G, welche die Punkte p''_x, p_y, und p'_z enthält, respective:

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y''} + \frac{z}{z'} = 1 \quad (3) \quad ; \quad \frac{x}{x''} + \frac{y}{y'} + \frac{z}{z'} = 1 \quad (4)$$

Ziehen wir die Gleichungen (2) und (4) respective von (1) und (3) ab, so kommt

$$\left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right)x_1 + \left(\frac{1}{y'} - \frac{1}{y''}\right)y_1 = 0 \;;\; \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right)x - \left(\frac{1}{y'} - \frac{1}{y''}\right)y = 0 \;,$$

woraus, durch Elimination von $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}$,

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 0 \quad (5)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes hervorgeht, der also eine die Achse der z, d. i. den Durchschnitt der Ebenen A und B enthaltende Ebene ist. Diese Ebene bleibt unverändert, wenn auch der Punkt p seine Lage ändert, doch so, daß der Werth von $\frac{y_1}{x_1}$ dadurch nicht geändert wird, oder mit anderen Worten, wenn der Punkt p sich auf einer die Achse der z enthaltenden Ebene, bewegt.

Dieses Resultat hätte aus der Aufgabe (15) (I. §. 8.) leicht hergeleitet werden können; wie denn auch der Gang in der Lösung der gegenwärtigen Aufgabe mit dem in der eben erwähnten ganz übereinstimmend ist.

Aufgabe [29]. Drei in einem Punkte zusammen treffende Gerade a, b, c, und eine vierte Gerade d, welche keine der drei ersten schneidet, sind gegeben. Durch diese Gerade d werden zwei Ebenen D und D'

Aufgabe [20]. Die Gleichungen zweier Ebenen sind gegeben; es soll ihr Neigungswinkel gefunden werden.

Es seyen $cz + by + ax + 1 = 0$; $c'z + b'y + a'x + 1 = 0$ die gegebenen Gleichungen der beiden Ebenen. Fällen wir von dem Anfangspunkte der Coordinaten auf jede dieser Ebenen eine Senkrechte, so schließen diese einen Winkel ein, der offenbar dem Neigungswinkel ω dieser Ebenen gleich ist. Nun sind aber, wenn respective

$$\left\{\begin{matrix} gx = kz \\ gy = hz \end{matrix}\right\} ; \left\{\begin{matrix} g'x = k'z \\ g'y = h'z \end{matrix}\right\}$$

die Gleichungen dieser Senkrechten sind, a, b, und c den Ausdrücken (17) des vor. §., und a′, b′ und c′ denselben Ausdrücken, wenn wir den Buchstaben g, h und k Accente geben, gleich; ferner sind g, h und k den Ausdrücken (18) des vor. §., und g′, h′ und k′ denselben Ausdrücken, wenn darin den Buchstaben a, b und c Accente gegeben werden, gleich. Substituiren wir also die zuletzt genannten Ausdrücke in die Formel (1) des vor. §., so erhalten wir, indem wir $\cos\hat{x}$, $\cos\hat{y}$, $\cos\hat{z}$, der Kürze wegen, wieder durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ bezeichnen, und

$$\left\{\begin{matrix} (1-\bar{z}^2)cc' + (\bar{x}\bar{y}-\bar{z})(ab'+a'b) \\ +(1-\bar{y}^2)bb' + (\bar{x}\bar{z}-\bar{y})(ac'+a'c) \\ +(1-\bar{x}^2)aa' + (\bar{y}\bar{z}-\bar{x})(bc'+b'c) \end{matrix}\right\} = Q ;$$

$$\left\{\begin{matrix} (1-\bar{z}^2)c^2 + 2(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})ab \\ +(1-\bar{y}^2)b^2 + 2(\bar{x}\bar{z}-\bar{y})ac \\ +(1-\bar{x}^2)a^2 + 2(\bar{y}\bar{z}-\bar{x})bc \end{matrix}\right\} = M ; \left\{\begin{matrix} (1-\bar{z}^2)c'^2 + 2(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})a'b' \\ +(1-\bar{y}^2)b'^2 + 2(\bar{x}\bar{z}-\bar{y})a'c' \\ +(1-\bar{x}^2)a'^2 + 2(\bar{y}\bar{z}-\bar{x})b'c' \end{matrix}\right\} = N$$

setzen,

$$\cos\omega = \frac{Q}{\sqrt{MN}} \qquad (1)$$

Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, vereinfacht sich der Ausdruck bedeutend, und wir haben

$$\cos\omega = \frac{cc' + bb' + aa'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \qquad (2)$$

Hieraus ergiebt sich, daß, wenn die beiden in Rede stehenden Ebenen sich rechtwinklig schneiden sollen, die Bedingungsgleichung

$$Q = 0 \qquad (3)$$

oder für rechtwinklige Coordinaten

§. 12.

$$\left(\frac{1}{y'}-\frac{1}{y''}\right)y = \left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{z''}\right)z \quad , \qquad (15)$$

$$\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right)x = \left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{z''}\right)z \quad . \qquad (16)$$

Eliminiren wir $\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right)$ und $\left(\frac{1}{y'}-\frac{1}{y''}\right)$ zwischen den Gleichungen (13), (14), (15) und zwischen (13), (14), (16), so geht $\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{z''}\right)$ von selbst fort, und wir erhalten

$$\left\{ (x_2y_1-x_1y_2)z+(x_2z_1-x_1z_2)y = 0 \ ; \ (x_2y_1-x_1y_2)z+(y_1z_2-y_2z_1)x = 0 \right\}$$

als Gleichungssystem für den gesuchten Ort. Dieser ist demnach eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade; und diese Gerade bleibt unverändert, wenn auch die Lage der Geraden d geändert wird, so aber, daß die Werthe von $\frac{x_2z_1-x_1z_2}{x_2y_1-x_1y_2}$ und $\frac{y_1z_2-y_2z_1}{x_2y_1-x_1y_2}$ nicht geändert werden. Wenn aber die eben genannten Ausdrücke unveränderlich sind, so liegen die Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ in einer bestimmten durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Ebene, was sich aus §. 6. (S. 4) leicht ergiebt; daher bleibt der gefundene Ort unverändert, wenn die Gerade d sich auf einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Ebene bewegt.

Lehrsatz [2]. I. Wenn man in einem Tetraeder abcd durch jede von drei zusammentreffenden Kanten ab, ac, ad und respective durch den Halbirungspunkt b′, c′, d′ jeder der gegenüberliegenden Kanten cd, bd, bc eine Ebene legt, so schneiden diese Ebenen sich in einer Geraden A, welche durch den Eckpunkt a geht. II. Einem jeden der vier Eckpunkte a, b, c, d entspricht auf diese Weise eine durch ihn gehende Gerade A, B, C, D. Diese vier Geraden und die drei Geraden δ, γ, β, welche die Halbirungspunkte d′ und d″, c′ und c″, b′ und b″ der gegenüberstehenden Kanten verbinden, schneiden sich in einem Punkte O. III. Die drei Ebenen, welche durch die Halbirungspunkte von drei zusammentreffenden Kanten senkrecht auf die gegenüberstehenden Kanten gelegt werden, schneiden sich in einer Geraden. Einem jeden der vier Eckpunkte entspricht auf diese Weise eine Gerade, und diese vier Geraden schneiden sich in einem Punkte O′. IV. Die drei Ebenen, welche in den Halbirungspunkten von drei in einer Ebene liegenden Kanten senkrecht auf diesen selbigen Kanten errichtet werden, schneiden sich in einer Geraden. Einer jeden der vier Seitenebenen entspricht auf diese Weise eine Gerade, und diese vier Geraden schneiden sich in einem Punkte O″. V. Die

Punkte O, O' und O'' liegen in gerader Linie, und zwar so, daß der Punkt O die Linie O'O'' halbirt.

Wir nehmen die drei Kanten ab, ae, ad zu Coordinatenachsen und setzen die Länge von ab = x', von ac = y', von ad = z'. Dann sind die Coordinaten der Halbirungspunkte b'', c'', d'' jener Kanten respective

$x_1 = \frac{1}{2}x',\ y_1 = 0,\ z_1 = 0\ ;\ x_2 = 0,\ y_2 = \frac{1}{2}y',\ z_2 = 0\ ;\ x_3 = 0,\ y_3 = 0,\ z_3 = \frac{1}{2}z';$

und die Coordinaten der Halbirungspunkte b', c', d' der Kanten cd, bd, bc sind

$x_4 = 0,\ y_4 = \frac{1}{2}y',\ z_4 = \frac{1}{2}z';\ x_5 = \frac{1}{2}x',\ y_5 = 0,\ z_5 = \frac{1}{2}z';\ x_6 = \frac{1}{2}x',\ y_6 = \frac{1}{2}y',\ z_6 = 0.$

I. Der erste Theil unseres Satzes kann unmittelbar aus der in der Aufgabe [13] (I. §. 8.) gefundenen Eigenschaft eines Dreiecks abgeleitet werden; er läßt sich aber eben so leicht direct erweisen. Die Gleichungen der drei die Coordinatenachsen und respective die Punkte b', c', d' enthaltenden Ebenen sind

$$\frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}\ ;\ \frac{x}{x'} = \frac{z}{z'}\ ;\ \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \qquad (17)$$

Da nun eine jede dieser Gleichungen eine Folge der beiden anderen ist, so befriedigen alle Coordinatenwerthe, welche zweien derselben genugthun, auch die dritte, die Durchschnittslinie von zwei dieser Ebenen liegt also in der dritten, d. i. die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Diese Gerade ist durch das System von irgend zwei dieser drei Gleichungen ausgedrückt.

II. Die Gleichungen der drei Ebenen, welche respective durch die Punkte b, c, d''; b, d, c'' und c, d, b'' gehen, sind

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} + \frac{2z}{z'} = 1\ ;\ \frac{x}{x'} + \frac{2y}{y'} + \frac{z}{z'} = 1\ ;\ \frac{2x}{x'} + \frac{y}{y'} + \frac{z}{z'} = 1. \quad (18)$$

Diese drei Gleichungen (18) und auch die Gleichungen (17) werden befriedigt, wenn man $x = \frac{1}{4}x'$, $y = \frac{1}{4}y'$ und $z = \frac{1}{4}z'$ setzt. Die sechs genannten Ebenen abb', acc', add', bcd'', bdc'', cdb'' schneiden sich also in demselben Punkte O, dessen Coordinaten $X = \frac{1}{4}x'$, $Y = \frac{1}{4}y'$, $Z = \frac{1}{4}z'$ sind, wodurch der zweite Theil des Satzes bewiesen ist.

III. Die Gleichungen der sechs Ebenen, welche durch die Halbirungspunkte der Kanten gehen und senkrecht auf den ihnen gegenüberliegenden sind, finden sich aus §. 9. (S. 12)

§ 12. gegeben, die dem Eckpunkte a gegenüberliegende Seitenebene aber durch die Gleichung

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} + \frac{z}{z'} = 1 \quad . \qquad (32)$$

Aus diesen drei Gleichungen finden wir durch Entwicklung die Coordinaten des Endpunktes der Geraden A, nämlich

$$x = \tfrac{1}{3}x' \ ; \ y = \tfrac{1}{3}y' \ ; \ z = \tfrac{1}{3}z' \ ;$$

und da der Anfangspunkt dieser Geraden im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, so ist das Quadrat dieser Linie, nach §. 2. (F. 3),

$$A^2 = \tfrac{1}{9}\left\{ x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y'\cos\hat{z} + 2x'z'\cos\hat{y} + 2y'z'\cos\hat{x} \right\} \ ;$$

also vermittelst der Gleichungen (31)

$$A^2 = \tfrac{1}{9}\left\{3(\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 + \overline{ad}^2) - (\overline{bc}^2 + \overline{bd}^2 + \overline{cd}^2)\right\} \ .$$

Verwechseln wir nach einander den Punkt a mit b, c und d, so finden wir hieraus unmittelbar

$$B^2 = \tfrac{1}{9}\left\{3(\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 + \overline{bd}^2) - (\overline{ac}^2 + \overline{ad}^2 + \overline{cd}^2)\right\} \ ,$$
$$C^2 = \tfrac{1}{9}\left\{3(\overline{bc}^2 + \overline{ac}^2 + \overline{cd}^2) - (\overline{ab}^2 + \overline{bd}^2 + \overline{ad}^2)\right\} \ ,$$
$$D^2 = \tfrac{1}{9}\left\{3(\overline{bd}^2 + \overline{cd}^2 + \overline{ad}^2) - (\overline{bc}^2 + \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2)\right\} \ .$$

Diese vier Formeln drücken die Geraden A, B, C, D durch die Kanten des Tetraeders aus. Durch Addition finden wir die merkwürdige Relation

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = \tfrac{4}{9}\left\{\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 + \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 + \overline{bd}^2 + \overline{cd}^2\right\} . \quad (33)$$

II. Vermittelst der im vorigen Satze angegebenen Coordinaten der Punkte b″, c″, d″, b′, c′, d′ finden wir (§. 2. F. 3)

$$\overline{b'b''}^2 = \beta^2 = \tfrac{1}{4}\left\{x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2x'y'\cos\hat{z} - 2x'z'\cos\hat{y} + 2y'z'\cos\hat{x}\right\} \ ,$$
$$\overline{c'c''}^2 = \gamma^2 = \tfrac{1}{4}\left\{x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2x'y'\cos\hat{z} + 2x'z'\cos\hat{y} - 2y'z'\cos\hat{x}\right\} \ ,$$
$$\overline{d'd''}^2 = \delta^2 = \tfrac{1}{4}\left\{x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y'\cos\hat{z} - 2x'z'\cos\hat{y} - 2y'z'\cos\hat{x}\right\} \ ,$$

und vermittelst der Gleichungen (31) folgt hieraus

$$\beta^2 = \tfrac{1}{4}\left\{\overline{ac}^2 + \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 + \overline{bd}^2 - \overline{ab}^2 - \overline{cd}^2\right\} \ ,$$
$$\gamma^2 = \tfrac{1}{4}\left\{\overline{ab}^2 + \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 + \overline{cd}^2 - \overline{ac}^2 - \overline{bd}^2\right\} \ ,$$
$$\delta^2 = \tfrac{1}{4}\left\{\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 + \overline{bd}^2 + \overline{cd}^2 - \overline{ad}^2 - \overline{bc}^2\right\} \ .$$

Diese drei Formeln drücken die Geraden β, γ, δ durch die Kanten des Tetra-

Tetraeders aus; und durch Addition derselben ergiebt sich die bemerkenswerthe Relation §. 12.

$$\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = \tfrac{1}{4}\left\{\overline{ab}^2+\overline{ac}^2+\overline{ad}^2+\overline{bc}^2+\overline{bd}^2+\overline{cd}^2\right\}. \quad (34)$$

Aus (33) und (34) folgt die Relation

$$9[A^2+B^2+C^2+D^2] = 16[\beta^2+\gamma^2+\delta^2]. \quad (35)$$

Ehe wir zu anderen Aufgaben schreiten, wollen wir an einem Beispiele zeigen, wie sich auch im Raume manche Eigenschaften eines Körpers durch eine einfache Verbindung von Gleichungen auffinden lassen.

Wir wollen irgend ein Tetraeder auf ein beliebiges aber rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen. Die Gleichungen der Seitenebenen desselben seyen

$$V_1 = \cos\gamma_1 z+\cos\beta_1 y+\cos\alpha_1 x+k_1 = 0 ,$$
$$V_2 = \cos\gamma_2 z+\cos\beta_2 y+\cos\alpha_2 x+k_2 = 0 ,$$
$$V_3 = \cos\gamma_3 z+\cos\beta_3 y+\cos\alpha_3 x+k_3 = 0 ,$$
$$V_4 = \cos\gamma_4 z+\cos\beta_4 y+\cos\alpha_4 x+k_4 = 0 .$$

Die Ebenen, welche die Neigungswinkel der Ebenen V_1 und V_2, V_1 und V_3 ꝛc. halbiren, wollen wir durch v_{12} und v'_{12}, durch v_{13} und v'_{13} ꝛc. bezeichnen. Diese zwölf, die Neigungswinkel halbirenden Ebenen sind dann, zufolge des §. 11 (G. 10 u. 11), durch folgende Gleichungen auszudrücken:

v_{12} durch $V_1+V_2=0$; v'_{12} durch $V_1-V_2=0$;
v_{13} » $V_1+V_3=0$; v'_{13} » $V_1-V_3=0$;
v_{14} » $V_1+V_4=0$; v'_{14} » $V_1-V_4=0$;
v_{23} » $V_2+V_3=0$; v'_{23} » $V_2-V_3=0$;
v_{24} » $V_2+V_4=0$; v'_{24} » $V_2-V_4=0$;
v_{34} » $V_3+V_4=0$; v'_{34} » $V_3-V_4=0$.

Subtrahiren wir von der Gleichung der Ebene v_{12} diejenige der Ebene v_{13}, so erhalten wir $(V_1+V_2)-(V_1+V_3) \equiv V_2-V_3=0$, d. i. die Gleichung der Ebene v'_{23}. Die Durchschnittslinie der Ebenen v_{12} u. v_{13} liegt also auf der Ebene v'_{23}, oder, mit anderen Worten, die Ebenen v_{12}, v_{13} und v'_{23} schneiden sich in einer und derselben Geraden. Auf dieselbe Weise finden wir, daß sich 16mal drei Ebenen der genannten zwölf in einer Geraden schneiden. Diese 16 Gruppen sind

$v'_{12}v_{13}v_{23}$; $v'_{14}v_{12}v_{24}$; $v'_{24}v_{12}v_{14}$; $v'_{12}v'_{13}v'_{23}$;
$v'_{12}v_{14}v_{24}$; $v'_{14}v_{13}v_{34}$; $v'_{24}v_{23}v_{34}$; $v'_{12}v'_{14}v'_{24}$;

§. 12.

$v'_{13}v_{12}v_{23}$; $v'_{23}v_{12}v_{23}$; $v'_{34}v_{13}v_{14}$; $v'_{13}v'_{14}v'_{34}$;
$v'_{13}v_{14}v_{34}$; $v'_{23}v_{24}v_{34}$; $v'_{34}v_{23}v_{24}$; $v'_{23}v'_{24}v'_{34}$.

Addiren wir zu der Gleichung der Ebene v_{12} die Gleichung $V_3 = 0$, so erhalten wir $V_1 + V_2 + V_3 = 0$. Dieselbe Gleichung erhalten wir aber, wenn wir zu der Gleichung der Ebene v_{13} die Gleichung $V_2 = 0$, oder zu der Gleichung der Ebene v_{23} die Gleichung $V_1 = 0$ addiren. Die Durchschnittslinie der Ebenen v_{12} u. V_3, v_{13} u. V_2, v_{23} u. V_1 liegen also in einer und derselben Ebene. Auf dieselbe Weise finden wir, daß, von den Durchschnittslinien der genannten zwölf Ebenen mit den Seitenebenen des Tetraeders (die Kanten dieses Körpers nicht mitgerechnet) 16mal drei Durchschnittslinien in einer Ebene liegen. Bezeichnen wir die Durchschnittslinie der Ebene v_{12} mit der Ebene V_3 durch V_3v_{12} rc., so sind die sechszehn Gruppen:

$V_3v_{12}V_2v_{13}V_1v_{23}$; $V_4v_{12}V_2v_{14}V_1v_{24}$; $V_4v_{13}V_3v_{14}V_1v_{34}$; $V_4v_{23}V_3v_{24}V_2v_{34}$;
$V_3v_{12}V_2v'_{13}V_1v'_{23}$; $V_4v_{12}V_2v'_{14}V_1v'_{24}$; $V_4v_{13}V_3v'_{14}V_1v'_{34}$; $V_4v_{23}V_3v'_{24}V_2v'_{34}$;
$V_3v'_{12}V_2v_{13}V_1v'_{23}$; $V_4v'_{12}V_2v_{14}V_1v'_{24}$; $V_4v'_{13}V_3v_{14}V_1v'_{34}$; $V_4v'_{23}V_3v_{24}V_2v'_{34}$;
$V_3v'_{12}V_2v'_{13}V_1v_{23}$; $V_4v'_{12}V_2v'_{14}V_1v_{24}$; $V_4v'_{13}V_3v'_{14}V_1v_{34}$; $V_4v'_{23}V_3v'_{24}V_2v_{34}$.

Addiren wir die Gleichungen der Ebenen v_{12} und v_{34}, so kommt $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$. Diese Gleichung ist aber auch die Summe der Gleichungen von den Ebenen v_{13} und v_{24}, so wie der Gleichungen der Ebenen v_{14} u. v_{23}. Die Durchschnittslinien der Ebenen v_{12} u. v_{34}, v_{13} u. v_{24}, v_{14} u. v_{23} liegen also in einer und derselben Ebene. Auf dieselbe Weise finden wir, daß von den Geraden, in welchen sich die genannten zwölf Ebenen unter einander schneiden, acht mal drei in einer Ebene liegen. Diese acht Gruppen sind, wenn wir den Durchschnitt der Ebene v_{12} mit der Ebene v_{34} durch $v_{12}v_{34}$ rc. bezeichnen:

$v_{12}v_{34}$ $v_{13}v_{24}$ $v_{14}v_{23}$; $v_{12}v'_{34}$ $v_{13}v'_{24}$ $v'_{14}v_{23}$;
$v_{12}v_{34}$ $v'_{13}v'_{24}$ $v'_{14}v'_{23}$; $v_{12}v'_{34}$ $v'_{13}v_{24}$ $v_{14}v'_{23}$;
$v'_{12}v'_{34}$ $v_{13}v_{24}$ $v'_{14}v'_{23}$; $v'_{12}v_{34}$ $v_{13}v'_{24}$ $v_{14}v'_{23}$;
$v'_{12}v'_{34}$ $v'_{13}v'_{24}$ $v_{14}v_{23}$; $v'_{12}v_{34}$ $v'_{13}v_{34}$ $v'_{14}v_{23}$;

Transformation der Coordinaten.

§. 13.

Wenn die Lage von drei sich in einem Punkte schneidenden Ebenen, in Beziehung auf ein gegebenes rechtwinkliges oder schiefwinkliges Coordinaten-

system bekannt ist, so können diese drei Ebenen zu neuen Coordinatenebenen, §. 13.
ihre drei Durchschnittslinien also zu neuen Coordinatenachsen genommen, und jeder Punkt im Raume, welcher auf das alte Coordinatensystem bezogen ist, kann auch auf dieses neue Coordinatensystem bezogen werden. Um die alten Coordinaten eines Punktes durch seine neuen Coordinaten auszudrücken, ist es am zierlichsten die Lage der neuen Coordinatenebenen dadurch anzugeben, daß man die Lage des neuen Anfangspunktes, und die Winkel, welche die alten und neuen Coordinatenachsen mit den auf den alten Cordinatenebenen errichteten Senkrechten bilden, angiebt.

Aufgabe [31]. *Die alten Coordinaten eines Punktes im Raume durch seine neuen Coordinaten auszudrücken, und umgekehrt.*

Wir wollen zuerst annehmen, daß der Anfangspunkt der alten Coordinaten mit demjenigen der neuen Coordinaten zusammenfällt.

Wir bezeichnen die alten Coordinaten eines Punktes p durch x, y, z, und die neuen Coordinaten desselben Punktes durch x′, y′, z′. Wir errichten im gemeinschaftlichen Anfangspunkte der Coordinaten O auf der Ebene der yz eine unbegrenzte Senkrechte h, und bezeichnen die Winkel, welche die positiven Seiten der Achsen der x, der x′, der y′ und der z′ mit der, nach der positiven Seite der x hin gerichteten Seite dieser Geraden h bilden, respective durch (x, yz), (x', yz), (y', yz), (z', yz). Legen wir durch den Punkt p eine Ebene, welche der Ebene yz parallel ist, so wird diese die Achse der x in einem Punkte schneiden, welcher der Endpunkt der Ordinate x des Punktes p ist, und sie wird auf der Geraden h senkrecht seyn. Nun ist leicht zu sehen, daß, wenn q der Punkt ist, in welchem diese Ebene die Gerade h schneidet, sowohl $Oq = x\,cos(x, yz)$, als auch (§. 2. G. 2) $Oq = x'cos(x', yz) + y'cos(y', yz) + z'cos(z', yz)$ ist, woraus sich denn unmittelbar

$$x\,cos(x, yz) = x'cos(x', yz) + y'cos(y', yz) + z'cos(z', yz)$$

ergiebt. Ganz auf dieselbe Weise erhalten wir, wenn wir auf den Ebenen der xz und der xy Senkrechte errichten, und die dadurch entstehenden Winkel auf analoge Weise bezeichnen, zwei Relationen zwischen x′, y′, z′ und y und z, so daß die allgemeinen Transformationsformeln

$$\left.\begin{array}{l} x\,cos(x, yz) = x'cos(x', yz) + y'cos(y', yz) + z'cos(z', yz)\;, \\ y\,cos(y, xz) = x'cos(x', xz) + y'cos(y', xz) + z'cos(z', xz)\;, \\ z\,cos(z, xy) = x'cos(x', xy) + y'cos(y', xy) + z'cos(z', xy) \end{array}\right\} \quad (1)$$

sind.

Auf gleiche Weise erhalten wir zur Transformation der neuen Coor-

§. 13. binaten in alte, wenn $(x', y'z')$, $(x, y'z')$, $(y, y'z')$, ꝛc. die Winkel bezeichnen, welche eine auf der Ebene der $y'z'$ errichtete Senkrechte mit der Achse der x', der x, der y, ꝛc. macht,

$$\left.\begin{aligned} x'\cos(x', y'z') &= x\cos(x, y'z') + y\cos(y, y'z') + z\cos(z, y'z')\ , \\ y'\cos(y', x'z') &= x\cos(x, x'z') + y\cos(y, x'z') + z\cos(z, x'z')\ , \\ z'\cos(z', x'y') &= x\cos(x, x'y') + y\cos(y, x'y') + z\cos(z, x'y')\ . \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Zwischen den neun Coefficienten von x', y' u. z' in den zweiten Theilen der Gleichungen (1) finden drei Relationen Statt, da diese Coefficienten die Cosinusse der Winkel sind, welche eine Gerade (h) mit den drei Achsen der x', der y' und der z' bildet (§. 2. S. 5). Sind also die alten Achsen gegeben, die neuen aber beliebig, so können diese letzteren doch nur so bestimmt werden, daß höchstens sechs vorgeschriebene Bedingungen erfüllt werden, wenn der Anfangspunkt beider Coordinatensysteme derselbe seyn soll. Eine ähnliche Bemerkung trifft die Coefficienten in den zweiten Theilen der Gleichungen (2).

Ist der Anfangspunkt der neuen Coordinaten von dem der alten verschieden, und heißen die alten Coordinaten des neuen Anfangspunktes x_1, y_1, z_1, so hat man in den obigen Formeln überall $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ respective für x, y, z zu setzen.

Da die Ausdrücke, welche wir für x, y, z und für x', y', z' gefunden haben, Functionen des ersten Grades sind, so folgt, daß der Grad einer Gleichung in x, y u. z oder in x', y', z' durch Transformation der Coordinaten nicht geändert wird.

Aus den allgemeinen Formeln (1) u. (2) leiten wir die folgenden ab, welche häufiger als jene benutzt werden.

I. Es seyen die alten Coordinaten rechtwinklig. Dann sind die auf den alten Coordinatenebenen errichteten Senkrechten respective den Achsen der x, y und z parallel, und bezeichnen wir die Winkel, welche irgend zwei Achsen, z. B. die Achse der x' und die Achse der z, mit einander bilden, durch (x', z), so ist $(x', yz) = (x', x)$, $(y', yz) = (y', x)$, ꝛc.; ferner $(x, yz) = 0$, $(y, xz) = 0$, $(z, xy) = 0$. Hierdurch erhalten wir aus den Formeln (1)

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos(x', x) + y'\cos(y', x) + z'\cos(z', x)\ , \\ y &= x'\cos(x', y) + y'\cos(y', y) + z'\cos(z', y)\ , \\ z &= x'\cos(x', z) + y'\cos(y', z) + z'\cos(z', z)\ . \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Bedingungsgleichungen, welche hierbei Statt finden, sind, zufolge §. 2. (S. 6),

§. 13.

$$\left.\begin{array}{l} cos^2(x',x) + cos^2(x',y) + cos^2(x',z) = 1 \;, \\ cos^2(y',x) + cos^2(y',y) + cos^2(y',z) = 1 \;, \\ cos^2(z',x) + cos^2(z',y) + cos^2(z',z) = 1 \;, \end{array}\right\} \quad (4)$$

und es ist dann ferner, zufolge des §. 9. (S. 8),

$$\left.\begin{array}{l} cos(x',y') = cos(x',x)\,cos(y',x) + cos(x',y)\,cos(y',y) + cos(x',z)\,cos(y',z), \\ cos(x',z') = cos(x',x)\,cos(z',x) + cos(x',y)\,cos(z',y) + cos(x',z)\,cos(z',z), \\ cos(y',z') = cos(y',x)\,cos(z',x) + cos(y',y)\,cos(z',y) + cos(y',z)\,cos(z',z). \end{array}\right\} \quad (5)$$

II. Es seyen sowohl die alten als die neuen Coordinaten rechtwinklig. Wir finden für diesen Fall die Gleichungen (3) und (4) wieder, und die Gleichungen (2) geben nun, da auch $(x', y'z') = 0$, $(y', x'z') = 0$ und $(z', x'y') = 0$, die Gleichungen (7). Die Bedingungsgleichungen (9), (10) und (11) ergeben sich aus §. 2. (S. 6) und §. 9. (S. 10). Wir haben demnach zur Transformation rechtwinkliger Coordinaten in rechtwinklige folgende Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} x = x'cos(x',x) + y'cos(y',x) + z'cos(z',x) \;, \\ y = x'cos(x',y) + y'cos(y',y) + z'cos(z',y) \;, \\ z = x'cos(x',z) + y'cos(y',z) + z'cos(z',z) \;. \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = x\,cos(x',x) + y\,cos(x',y) + z\,cos(x',z) \;, \\ y' = x\,cos(y',x) + y\,cos(y',y) + z\,cos(y',z) \;, \\ z' = x\,cos(z',x) + y\,cos(z',y) + z\,cos(z',z) \;. \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} cos^2(x',x) + cos^2(x',y) + cos^2(x',z) = 1 \;, \\ cos^2(y',x) + cos^2(y',y) + cos^2(y',z) = 1 \;, \\ cos^2(z',x) + cos^2(z',y) + cos^2(z',z) = 1 \;. \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} cos(x',x)cos(y',x) + cos(x',y)cos(y',y) + cos(x',z)cos(y',z) = 0, \\ cos(x',x)cos(z',x) + cos(x',y)cos(z',y) + cos(x',z)cos(z',z) = 0, \\ cos(y',x)cos(z',x) + cos(y',y)cos(z',y) + cos(y',z)cos(z',z) = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{array}{l} cos^2(x',x) + cos^2(y',x) + cos^2(z',x) = 1 \;, \\ cos^2(x',y) + cos^2(y',y) + cos^2(z',y) = 1 \;, \\ cos^2(x',z) + cos^2(y',z) + cos^2(z',z) = 1 \;. \end{array}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{l} cos(x',x)cos(x',y) + cos(y',x)cos(y',y) + cos(z',x)cos(z',y) = 0, \\ cos(x',x)cos(x',z) + cos(y',x)cos(y',z) + cos(z',x)cos(z',z) = 0, \\ cos(x',y)cos(x',z) + cos(y',y)cos(y',z) + cos(z',y)cos(z',z) = 0. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Bezeichnen wir die oft genannten Cosinusse der Winkel, welche die neuen Achsen mit den alten bilden, der Kürze wegen, durch α, β, γ, α', β', γ',

§. 13. α'', β'', γ'', so sind die Transformationsformeln (6) und die dazu gehörigen Bedingungsgleichungen (8) u. (9) respective

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z' \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1 \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0 \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' &= 0 \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (9')$$

und bei derselben Bezeichnung sind die Transformationsformeln (7), und die dazu gehörigen Bedingungsgleichungen (10) u. (11) respective

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ y' &= \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ z' &= \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{aligned}\right\} \quad (7')$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (10')$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0 \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= 0 \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (11')$$

Ueber diese sechs Gleichungsgruppen haben wir folgende Bemerkungen zu machen.

Erstens. Daß die Gleichungen (7'), (10') u. (11') eine nothwendige Folge der Gleichungen (6'), (8') u. (9') sind, ergiebt sich zwar aus der Herleitung derselben, es wird aber nützlich seyn dies direct nachzuweisen.

Multipliciren wir die Gleichungen (6') der Reihe nach durch α, α' u. α'' und addiren die drei Producte, so ist in der Summe der Coefficient von x', in Folge der ersten Gleichung (8'), gleich 1; die Coefficienten von y' u. z' aber sind, zufolge der ersten und zweiten Gleichung (9') gleich Null. Auf diese Weise ergiebt sich die erste Gleichung (7'). Eben so erhalten wir durch Multiplication der Gleichungen (6') mit β, β' u. β'' und dann mit γ, γ' u. γ'' die zweite und die dritte Gleichung (7').

Entwickeln wir aus den ersten beiden Gleichungen (9') α' und α'', so ergiebt sich

$$\alpha' = \frac{\beta''\gamma - \beta\gamma''}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}\cdot\alpha \quad ; \quad \alpha'' = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}\cdot\alpha \quad ,$$ §. 13.

und substituiren wir diese Ausdrücke in die erste Gleichung (8'), so kommt

$$\left\{(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2+(\beta''\gamma-\beta\gamma'')^2+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2\right\}\cdot\alpha^2 = (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2 \quad .$$

Nun ist aber

$$(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2+(\beta''\gamma-\beta\gamma'')^2+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2 \equiv (\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2)-(\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'')^2,$$

in welcher identischen Gleichung der zweite Theil, zufolge der zweiten und dritten Gleichung (8') und der dritten Gleichung (9'), sich auf 1 reducirt. Es ist also

$$(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2+(\beta''\gamma-\beta\gamma'')^2+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2 = 1 \quad ,$$

und folglich

$$\alpha^2 = (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2 \; ;$$

somit, nach dem bereits Gefundenen,

$$\alpha'^2 = (\beta''\gamma-\beta\gamma'')^2 \quad \text{und} \quad \alpha''^2 = (\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2 \quad .$$

Auf ganz ähnliche Weise finden wir Ausdrücke für β, β', β'' und γ, γ', γ'', so daß wir folgende bemerkenswerthe Gleichungsgruppe haben:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha^2 &= (\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2 \; ; \; \beta^2 = (\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'')^2 \; ; \; \gamma^2 = (\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2 \\
\alpha'^2 &= (\beta''\gamma-\beta\gamma'')^2 \; ; \; \beta'^2 = (\alpha\gamma''-\alpha''\gamma)^2 \; ; \; \gamma'^2 = (\alpha''\beta-\alpha\beta'')^2 \\
\alpha''^2 &= (\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2 \; ; \; \beta''^2 = (\alpha'\gamma-\alpha\gamma')^2 \; ; \; \gamma''^2 = (\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung (8') folgt

$$(\alpha'^2+\alpha''^2)(\beta'^2+\beta''^2) = (1-\alpha^2)(1-\beta^2)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\alpha'^2\beta'^2+\alpha'^2\beta''^2+\alpha''^2\beta'^2+\alpha''^2\beta''^2+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2 = 1 \quad ,$$

und setzen wir hierin den, aus der ersten Gleichung (9') sich ergebenden, Werth von $\alpha^2\beta^2$, nämlich $\alpha'^2\beta'^2+2\alpha'\alpha''\beta'\beta''+\alpha''^2\beta''^2$, so reducirt sich die gefundene Gleichung auf

$$\alpha^2+\beta^2+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2 = 1 \quad ,$$

oder, in der Folge der dritten Gleichung (12), auf

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 \quad ,$$

welches die erste Gleichung (10') ist. Auf ganz ähnliche Weise können wir die zweite und dritte Gleichung (10') aus den Gleichungen (8' und 9') herleiten.

Setzen wir in die so eben hergeleitete erste Gleichung (10') für α^2, β^2 und γ^2 die Ausdrücke (12), so haben wir

§. 13.

$$1 = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2 + (\alpha''\gamma - \alpha'\gamma'')^2 + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2$$
$$\equiv (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2 \ .$$

In Folge der bereits hergeleiteten zweiten und dritten Gleichung (10′) reducirt sich die so eben gefundene Gleichung

$$(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2 = 1$$

von selbst auf

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \ ,$$

welches die dritte Gleichung (11′) ist. Auf ähnliche Weise können wir die erste und zweite Gleichung (11′) herleiten.

Die Gleichungen (10′) und (11′) sind also eine nothwendige Folge der Gleichungen (8′) u. (9′).

Zweitens. Unsere zweite Bemerkung betrifft die Unterscheidung zweier Fälle.

Stellen wir uns vor, daß der Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz auf den Anfangspunkt des ebenfalls rechtwinkligen Systems der x′y′z′, und die Achse der x′ so auf die Achse der x gelegt werde, daß die positive Seite der Achse der x′ auf der positiven Seite der Achse der x liege, so wird die Ebene der y′z′ auf der Ebene der yz zu liegen kommen, weil beide Ebenen auf der jetzt gemeinschaftlichen Achse der x, in demselben Anfangspunkte, senkrecht sind. Drehen wir nun das Coordinatensystem der x′y′z′ um seine, mit der Achse der x coincidirende, Achse der x′, so wird endlich auch die Achse der y′ mit der Achse der y und zwar so zur Coincidenz kommen, daß die positiven Seiten dieser beiden Achsen auf einander liegen. Bei dieser Lage der beiden Coordinatensysteme wird die Achse der z′, der Länge nach, auf der Achse der z liegen, weil beide Achsen auf der jetzt gemeinschaftlichen Ebene der xy, in demselben Anfangspunkte, senkrecht sind; es wird aber entweder die positive Seite der Achse der z′ auf der positiven Seite der Achse der z, oder es wird die negative Seite der Achse der z′ auf der positiven Seite der Achse der z liegen. Diese beiden Fälle sind scharf zu unterscheiden, und wir wollen deshalb zwei rechtwinklige Coordinatensysteme, in welcher Lage sie sich auch befinden mögen, gleich nennen, wenn, bei dem Aufeinanderlegen der positiven Seite der Achse der x′ auf der positiven Seite der Achse der x und der positiven Seite der Achse der y′ auf der positiven Seite der Achse der y, auch die positive Seite der Achse der z′ auf der positiven Seite der Achse der z zu liegen kommt, symmetrisch aber, wenn die positive Seite der Achse der z′ auf die negative

Seite der Achse der z fällt. Es ist nun Folgendes leicht einzusehen. Legt man von zwei gleichen rechtwinkligen Coordinatensystemen die positiven Seiten von irgend zwei gleichnamigen Achsen respective auf einander, so kommen auch die positiven Seiten der dritten Achsen auf einander zu liegen; legt man in denselben Systemen die entgegengesetzten Seiten von irgend zwei gleichnamigen Achsen respective auf einander, so fallen ebenfalls die positiven Seiten der dritten Achsen auf einander; legt man in denselben Systemen von irgend zwei ungleichnamigen Achsen die positiven Seiten auf einander, z. B. die positive Seite der Achse der x' auf die positive Seite der Achse der y, und die positive Seite der Achse der y' auf die positive Seite der Achse der x, so fallen die entgegengesetzten Seiten der dritten Achsen auf einander, also in dem angenommenen Beispiele die positive Seite der z' auf die negative Seite der z; legt man endlich in denselben Systemen die positiven Seiten der Achsen der x' und der y' respective auf die positiven Seiten der Achsen der y und der z, so fällt die positive Seite der Achse der z' auf die positive Seite der Achse der x. Legt man aber von zwei symmetrischen rechtwinkligen Coordinatensystemen die positiven Seiten von irgend zwei gleichnamigen Achsen aufeinander, so kommen die entgegengesetzten Seiten der dritten Achsen auf einauder zu liegen; legt man in denselben Systemen die entgegengesetzten Seiten von irgend zwei gleichnamigen Achsen aufeinander, so fallen ebenfalls die entgegengesetzten Seiten der dritten Achsen auf einander; legt man in denselben Systemen von irgend zwei ungleichnamigen Achsen die positiven Seiten auf einander, z. B. die positive Seite der Achse der x' auf die positive Seite der Achse der y und die positive Seite der Achse der y' auf die positive Seite der Achse der x, so fallen die positiven Seiten der dritten Achsen auf einander, also in dem angenommenen Beispiele die positive Seite der Achse der z' auf die positive Seite der Achse der z; legt man endlich in denselben Systemen die positiven Seiten der Achsen der x' und der y' respective auf die positiven Seiten der Achsen der y und der z, so fällt die positive Seite der Achse der z' auf die negative Seite der Achse der x.

Die Transformationsformeln (6) und (7) oder (6') und (7') und auch die Bedingungsgleichungen (8) bis (11) oder (8') bis (11') umfassen beide Fälle, sowohl den Fall der Transformation von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem gleichen, als den der Transformation von einem solchen Systeme zu einem symmetrischen. Ebenso verhält es sich mit den aus diesen Bedingungsgleichungen abgeleiteten Gleichungen (12). Aber eben diese letzten Gleichungen bieten uns ein Mittel dar, die beiden genannten

§. 13. Fälle analytisch zu unterscheiden. Es haben nämlich die Ausdrücke, welche wir, vermittelst der Gleichungen (12), für die ersten Potenzen der neun Größen α, β, γ, α', rc. erhalten, sämmtlich doppelte Vorzeichen; so ist z. B. aus der letzten Gleichung (12)

entweder $\gamma'' = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ oder $\gamma'' = \alpha'\beta - \alpha\beta'$.

Nehmen wir nun an, daß das Coordinatensystem der $x'y'z'$ so auf das Coordinatensystem der xyz gelegt wird, daß die positiven Seiten der Achsen der x' und der x, und die positiven Seiten der Achsen der y' und der y respective auf einander liegen, so werden auch die Achsen der z' und der z, der Länge nach, auf einander liegen, und wir werden im Falle der Gleichheit beider Systeme

$$x = x' \;;\; y = y' \;;\; z = z' \;,$$

im Falle der Symmetrie aber

$$x = x' \;;\; y = y' \;;\; z = -z'$$

haben. Also in beiden Fällen ist, bei der angenommenen Lage der beiden Systeme,

$\alpha = 1$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$; $\alpha' = 0$; $\beta' = 1$; $\gamma' = 0$; $\alpha'' = 0$ u. $\beta'' = 0$, aber blos in dem ersten Falle ist $\gamma'' = 1$ und blos in dem zweiten $\gamma'' = -1$. Von den vorher genannten Ausdrücken giebt aber, für $\alpha = 1$; $\beta = 0$; $\alpha' = 0$ und $\beta' = 1$, blos der erste $\gamma'' = 1$ und blos der zweite $\gamma'' = -1$. Demnach bezieht sich der erste Ausdruck auf gleiche, der zweite aber auf symmetrische Coordinatensysteme. Auf ähnliche Weise überzeugen wir uns, daß alle neun Ausdrücke deren Quadrate, zufolge der Gleichungen (12), gleich α^2, β^2, γ^2, α'^2, rc. sind, im Falle gleicher Coordinatensysteme mit dem Vorzeichen $+$, und in dem Falle symmetrischer Systeme mit dem Vorzeichen $-$ genommen werden müssen.

Drittens. Wenn die Coefficienten α, β, γ, α', rc. nicht gegeben sind, oder mit anderen Worten, wenn die Lage des zweiten Coordinatensystems in Beziehung auf das erste nicht gegeben ist, so können doch nur drei dieser Größen beliebig angenommen werden (und zwar nur solche drei, welche nicht in einer von den sechs Gleichungen (8') und (10') zugleich vorkommen, ja selbst diese nur unter gewissen Einschränkungen, welche die Realität des neuen Coordinatensystems bedingt), weil eben zwischen den genannten neun Größen sechs Bedingungsgleichungen Statt finden. Sind aber die Werthe von drei dieser Größen gegeben, oder beliebig angenommen, so

ergeben sich die Werthe der übrigen sechs durch Entwicklung aus den sechs Gleichungen (8′) und (9′) oder (10′) und (11′), bei welcher Entwicklung man auch die Gleichungen (12) benutzen kann. Aber diese Sache ist nicht so ganz einfach, und wir wollen deshalb einen Augenblick dabei verweilen.

§. 13.

Wir wollen annehmen, daß es die drei Größen α, β' und γ'' seyen, deren Werthe gegeben sind. Um nun die übrigen sechs Größen zu bestimmen, verfahren wir wie folgt. Wir subtrahiren von der Summe der ersten und zweiten Gleichung (8′) die dritte Gleichung (10′), von der Summe der ersten und dritten Gleichung (8′) die zweite Gleichung (10′) und von der Summe der zweiten und dritten Gleichung (8′) die erste Gleichung (10′), und erhalten auf diese Weise:

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha'^2+\beta'^2=1+\gamma''^2\ ,$$
$$\alpha^2+\gamma^2+\alpha''^2+\beta''^2=1+\beta'^2\ ,$$
$$\beta'^2+\gamma'^2+\beta''^2+\gamma''^2=1+\alpha^2\ .$$

In Folge der Gleichungen (12) haben wir

entweder $\alpha\beta'-\alpha'\beta=\gamma''$ oder $\alpha\beta'-\alpha'\beta=-\gamma''$,
» $\alpha\gamma''-\alpha''\gamma=\beta'$ » $\alpha\gamma''-\alpha''\gamma=-\beta'$,
» $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'=\alpha$ » $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'=-\alpha$.

Subtrahiren und addiren wir das Doppelte dieser letzten Gleichungen respective zu den drei vorher erhaltenen, so kommt

entweder

$(\alpha-\beta')^2+(\beta+\alpha')^2=(1-\gamma'')^2$ woraus $\beta+\alpha'=\sqrt{(1-\gamma'')^2-(\alpha-\beta')^2}$,
$(\alpha+\beta')^2+(\beta-\alpha')^2=(1+\gamma'')^2$ » $\beta-\alpha'=\sqrt{(1+\gamma'')^2-(\alpha+\beta')^2}$,
$(\alpha-\gamma'')^2+(\alpha''+\gamma)^2=(1-\beta')^2$ woraus $\alpha''+\gamma=\sqrt{(1-\beta')^2-(\alpha-\gamma'')^2}$,
$(\alpha+\gamma'')^2+(\alpha''-\gamma)^2=(1+\beta')^2$ » $\alpha''-\gamma=\sqrt{(1+\beta')^2-(\alpha+\gamma'')^2}$,
$(\beta'-\gamma'')^2+(\gamma'+\beta'')^2=(1-\alpha)^2$ woraus $\gamma'+\beta''=\sqrt{(1-\alpha)^2-(\beta'-\gamma'')^2}$,
$(\beta'+\gamma'')^2+(\gamma'-\beta'')^2=(1+\alpha)^2$ » $\gamma'-\beta''=\sqrt{(1+\alpha)^2-(\beta'+\gamma'')^2}$,

oder

$(\alpha-\beta')^2+(\beta+\alpha')^2=(1+\gamma'')^2$ woraus $\beta+\alpha'=\sqrt{(1+\gamma'')^2-(\alpha-\beta')^2}$,
$(\alpha+\beta')^2+(\beta-\alpha')^2=(1-\gamma'')^2$ » $\beta-\alpha'=\sqrt{(1-\gamma'')^2-(\alpha+\beta')^2}$,
$(\alpha-\gamma'')^2+(\alpha''+\gamma)^2=(1+\beta')^2$ woraus $\alpha''+\gamma=\sqrt{(1+\beta')^2-(\alpha-\gamma'')^2}$,
$(\alpha+\gamma'')^2+(\alpha''-\gamma)^2=(1-\beta')^2$ » $\alpha''-\gamma=\sqrt{(1-\beta')^2-(\alpha+\gamma'')^2}$,
$(\beta'-\gamma'')^2+(\gamma'+\beta'')^2=(1+\alpha)^2$ woraus $\gamma'+\beta''=\sqrt{(1+\alpha)^2-(\beta'-\gamma'')^2}$,
$(\beta'+\gamma'')^2+(\gamma'-\beta'')^2=(1-\alpha)^2$ » $\gamma'-\beta''=\sqrt{(1-\alpha)^2-(\beta'+\gamma'')^2}$.

§. 13. Ein jeder von den unter den Wurzelzeichen befindlichen Ausdrücken läßt sich leicht in zwei Factoren zerlegen, so daß, wenn wir

$$1+\alpha+\beta'+\gamma'' = m \quad ; \quad 1-\alpha-\beta'-\gamma'' = m' \quad ,$$
$$1+\alpha-\beta'-\gamma'' = n \quad ; \quad 1-\alpha+\beta'+\gamma'' = n' \quad ,$$
$$1-\alpha+\beta'-\gamma'' = p \quad ; \quad 1+\alpha-\beta'+\gamma'' = p' \quad ,$$
$$1-\alpha-\beta'+\gamma'' = q \quad ; \quad 1+\alpha+\beta'-\gamma'' = q'$$

setzen, die gefundenen Gleichungen übergehen in:

entweder

$$\left.\begin{aligned} \beta+\alpha' &= \sqrt{np} \\ \beta-\alpha' &= \sqrt{mq} \\ \alpha''+\gamma &= \sqrt{nq} \\ \alpha''-\gamma &= \sqrt{mp} \\ \gamma'+\beta'' &= \sqrt{pq} \\ \gamma'-\beta'' &= \sqrt{mn} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \beta+\alpha' &= \sqrt{n'p'} \\ \beta-\alpha' &= \sqrt{m'q'} \\ \alpha''+\gamma &= \sqrt{n'q'} \\ \alpha''-\gamma &= \sqrt{m'p'} \\ \gamma'+\beta'' &= \sqrt{p'q'} \\ \gamma'-\beta'' &= \sqrt{m'n'} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Aus diesen Gleichungen würden wir unmittelbar

entweder

$$\left.\begin{aligned} 2\beta &= \sqrt{np}+\sqrt{mq} \\ 2\alpha' &= \sqrt{np}-\sqrt{mq} \\ 2\alpha'' &= \sqrt{nq}+\sqrt{mp} \\ 2\gamma &= \sqrt{nq}-\sqrt{mp} \\ 2\gamma' &= \sqrt{pq}+\sqrt{mn} \\ 2\beta'' &= \sqrt{pq}-\sqrt{mn} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} 2\beta &= \sqrt{n'p'}+\sqrt{m'q'} \\ 2\alpha' &= \sqrt{n'p'}-\sqrt{m'q'} \\ 2\alpha'' &= \sqrt{n'q'}+\sqrt{m'p'} \\ 2\gamma &= \sqrt{n'q'}-\sqrt{m'p'} \\ 2\gamma' &= \sqrt{p'q'}+\sqrt{m'n'} \\ 2\beta'' &= \sqrt{p'q'}-\sqrt{m'n'} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

erhalten; es können aber die Wurzelgrößen in den Gleichungen (13) und (14) zwar mit verschiedenen Vorzeichen genommen werden, doch finden hier nicht alle Combinationen dieser Vorzeichen Statt, (so z. B. können die Wurzelzeichen in den Gleichungen (13) nicht alle zugleich mit dem Zeichen —, und die in den Gleichungen (14) nicht alle zugleich mit dem Zeichen + genommen werden), und das Gleichungssystem (13) schließt nur 8 Gleichungssysteme in sich. Zur Ersparung des Raumes wiederholen wir die ersten Theile der Gleichungen eines jeden dieser Systeme nicht, und schreiben nur die zweiten Theile der Gleichungen eines jeden Systems in einer Columne den gemeinschaftlichen ersten Theilen gegenüber wie folgt:

§. 13.

$\beta+\alpha' =$	$+\sqrt{np}$	$+\sqrt{np}$	$-\sqrt{np}$	$-\sqrt{np}$	$+\sqrt{np}$	$+\sqrt{np}$	$-\sqrt{np}$	$-\sqrt{np}$
$\beta-\alpha' =$	$+\sqrt{mq}$	$+\sqrt{mq}$	$-\sqrt{mq}$	$-\sqrt{mq}$	$-\sqrt{mq}$	$-\sqrt{mq}$	$+\sqrt{mq}$	$+\sqrt{mq}$
$\alpha''+\gamma =$	$+\sqrt{nq}$	$-\sqrt{nq}$	$+\sqrt{nq}$	$-\sqrt{nq}$	$+\sqrt{nq}$	$-\sqrt{nq}$	$+\sqrt{nq}$	$-\sqrt{nq}$
$\alpha''-\gamma =$	$+\sqrt{mp}$	$-\sqrt{mp}$	$+\sqrt{mp}$	$-\sqrt{mp}$	$-\sqrt{mp}$	$+\sqrt{mp}$	$-\sqrt{mp}$	$+\sqrt{mp}$
$\gamma'+\beta'' =$	$+\sqrt{pq}$	$-\sqrt{pq}$	$-\sqrt{pq}$	$+\sqrt{pq}$	$+\sqrt{pq}$	$-\sqrt{pq}$	$-\sqrt{pq}$	$+\sqrt{pq}$
$\gamma'-\beta'' =$	$+\sqrt{mn}$	$-\sqrt{mn}$	$-\sqrt{mn}$	$+\sqrt{mn}$	$-\sqrt{mn}$	$+\sqrt{mn}$	$+\sqrt{mn}$	$-\sqrt{mn}$

Eben so schließt das Gleichungssystem (14) nur die acht folgenden Gleichungssysteme in sich:

$\beta+\alpha' =$	$-\sqrt{n'p'}$	$-\sqrt{n'p'}$	$+\sqrt{n'p'}$	$+\sqrt{n'p'}$	$-\sqrt{n'p'}$	$-\sqrt{n'p'}$	$+\sqrt{n'p'}$	$+\sqrt{n'p'}$
$\beta-\alpha' =$	$-\sqrt{m'q'}$	$-\sqrt{m'q'}$	$+\sqrt{m'q'}$	$+\sqrt{m'q'}$	$+\sqrt{m'q'}$	$+\sqrt{m'q'}$	$-\sqrt{m'q'}$	$-\sqrt{m'q'}$
$\alpha''+\gamma =$	$-\sqrt{n'q'}$	$+\sqrt{n'q'}$	$-\sqrt{n'q'}$	$+\sqrt{n'q'}$	$-\sqrt{n'q'}$	$+\sqrt{n'q'}$	$-\sqrt{n'q'}$	$+\sqrt{n'q'}$
$\alpha''-\gamma =$	$-\sqrt{m'p'}$	$+\sqrt{m'p'}$	$-\sqrt{m'p'}$	$+\sqrt{m'p'}$	$+\sqrt{m'p'}$	$-\sqrt{m'p'}$	$+\sqrt{m'p'}$	$-\sqrt{m'p'}$
$\gamma'+\beta'' =$	$-\sqrt{p'q'}$	$+\sqrt{p'q'}$	$+\sqrt{p'q'}$	$-\sqrt{p'q'}$	$-\sqrt{p'q'}$	$+\sqrt{p'q'}$	$+\sqrt{p'q'}$	$-\sqrt{p'q'}$
$\gamma-\beta'' =$	$-\sqrt{m'n'}$	$+\sqrt{m'n'}$	$+\sqrt{m'n'}$	$-\sqrt{m'n'}$	$+\sqrt{m'n'}$	$-\sqrt{m'n'}$	$-\sqrt{m'n'}$	$+\sqrt{m'n'}$

Bestimmen wir β, α', α'' ꝛc. aus irgend einem der ersten acht Gleichungssysteme, so ist das neue Coordinatensystem dem alten gleich; bestimmen wir diese Größen aber aus einem der zweiten acht Gleichungssysteme, so ist das neue Coordinatensystem dem alten symmetrisch *). Nennen wir die

*) In den Lehrbüchern findet man nur die Gleichungen (13) angegeben, aus welchen unsere ersten acht Gleichungssysteme entspringen, und die daselbst angewandte Herleitung, welche voraussetzt, daß das alte Coordinatensystem mit dem neuen zur Congruenz gebracht werden könne, was keinesweges der Fall zu seyn braucht, kann auch blos zu diesen Gleichungen und nicht zu den Gleichungen (14) führen. Wenn die Transformation der Coordinaten nur angewandt wird, um einen Körper oder ein System von Punkten an eine andere Stelle im Raume zu verlegen, finden allerdings nur die Gleichungen (13) und die aus ihnen entspringenden ersten acht Gleichungssysteme Anwendung; aber bei anderen Untersuchungen müssen auch die Gleichungen (14) und die aus ihnen entspringenden zweiten acht Gleichungssysteme in Betracht genommen werden, und das Außerachtlassen derselben kann zu sehr falschen Folgerungen führen. Ist z. B. $\alpha = 1$; $\beta' = 1$ und $\gamma'' = -1$ gegeben, so erhalten wir $m = 2$; $n = 2$; $p = 2$ und $q = -2$, woraus denn $\beta + \alpha' = \pm 2$; $\beta - \alpha' = \pm 2\sqrt{-1}$, so daß also β und α', und dann auch ebenso α'', γ, γ' u. β', nach den Gleichungen (13), imaginaire Werthe bekommen. Dennoch drücken die Formeln

$$x = x' \;;\; y = y' \;;\; z = -z'$$

in welchen $\alpha = 1$; $\beta' = 1$; $\gamma'' = -1$ und sämmtliche übrigen Größen α', α'', β

§. 13. Werthe von β, α', α'', γ, γ' und β'', welche diese Größen zufolge der Gleichungen (15) haben, respective b, a', a'', c, c' und b'', so sind die Transformationsformeln, welche uns die ersten acht Gleichungssysteme geben,

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha x + by + cz \\ y = a'x + \beta' y + c'z \\ z = a''x + b''y + \gamma'' z \end{array}\right\} ; \quad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha x + by - cz \\ y = a'x + \beta' y - c'z \\ z = -a''x - b''y + \gamma'' z \end{array}\right\} ;$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha x - by + cz \\ y = -a'x + \beta' y - c'z \\ z = a''x - b''y + \gamma'' z \end{array}\right\} ; \quad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha x - by - cz \\ y = -a'x + \beta' y + c'z \\ z = -a''x + b''y + \gamma'' z \end{array}\right\} ;$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha x + a'y + a''z \\ y = bx + \beta' y + b''z \\ z = cx + c'y + \gamma'' z \end{array}\right\} ; \quad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha x + a'y - a''z \\ y = bx + \beta' y - b''z \\ z = -cx - c'y + \gamma'' z \end{array}\right\} ;$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha x - a'y + a''z \\ y = -bx + \beta' y - b''z \\ z = cx - c'y + \gamma'' z \end{array}\right\} ; \quad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha x - a'y - a''z \\ y = -bx + \beta' y + b''z \\ z = -cx + c'y + \gamma'' z \end{array}\right\} .$$

Auf ähnliche Weise können sämmtliche Transformationsformeln, welche die zweiten acht Gleichungssysteme geben, aus denjenigen abgeleitet werden, welche das erste dieser Systeme giebt.

Eine jede der drei Größen α, β', γ'' muß nothwendigerweise kleiner als $+1$, und größer als -1 gegeben seyn, weil diese Größen die Cosinus von reellen Winkeln seyn sollen. Wenn nun die gegebenen Werthe von α, β' und γ'' zwischen den genannten Grenzen enthalten sind, so können vier verschiedene Fälle Statt finden, nämlich: es können alsdann alle 16 Gleichungssysteme reelle Werthe von β, α', α'' rc.; oder es können nur die ersten acht derselben reelle und die zweiten acht imaginaire; oder es können nur die zweiten acht derselben reelle und die ersten acht imaginaire; oder endlich können alle 16 nur imaginaire Werthe von β, α', α'' rc. geben. Die Bedingungen, unter welchen ein jeder dieser vier Fälle Statt hat, finden wir auf folgende Weise. Sollen die ersten acht Gleichungssysteme reelle Werthe von β, α', α'' rc. geben, so müssen m, n, p und q gleiche Zei-

---

β'', γ u. γ, reelle Werthe haben, die Transformation von einem Systeme zu einem neuen, völlig reellen System aus, dessen Achsen zwar mit denen des erstgenannten coincidiren, in welchem aber die positive Seite der Achse der z' auf der negativen Seite der Achse der z liegt. Und in der That finden wir für $\alpha = 1$, $\beta' = 1$ und $\gamma'' = -1$ auch $m' = 0$, $n' = 0$, $p' = 0$ und $q' = 4$ und somit $\beta' + \alpha = 0$; $\beta' - \alpha = 0$ rc., so daß also die Größen β, α', α'' rc., nach unseren Gleichungen (14) reelle Werthe erhalten und sämmtlich, wie es auch seyn muß, gleich Null werden.

chen haben; denn hätten zwei dieser Größen entgegengesetzte Zeichen, so würde einer der Ausdrücke $\beta+\alpha'$, $\beta-\alpha'$, $\alpha''+\gamma$, ꝛc., derjenige nämlich, welcher der Quadratwurzel aus dem Producte dieser beiden Größen gleich ist, imaginair. Sollen die zweiten acht Gleichungssysteme reelle Werthe von β, α', α'' ꝛc. geben, so müssen aus gleichen Gründen m', n', p' und q' gleiche Zeichen haben. Nun können aber die Größen m, n, p und q nicht sämmtlich negativ seyn, weil die Summe dieser Größen gleich $+4$, und es können auch die Größen m', n', p' u. q' nicht sämmtlich negativ seyn, weil auch ihre Summe gleich $+4$ ist. Die Realität der Wurzeln der ersten acht Gleichungssysteme erfordert also, daß m, n, p und q, die Realität der Wurzeln der zweiten acht Gleichungssysteme erheischt, daß m', n', p' und q' positiv oder null seyen. Da immer

$$m+m'=+2\ ;\quad n+n'=+2\ ;\quad p+p'=+2\ ;\quad q+q'=+2\ ,$$

so können wir auch sagen: „Die Wurzeln der ersten acht Gleichungssysteme sind reell, wenn m, n, p u. q sämmtlich $\geqq 0$, sie sind nicht alle reell, wenn eine oder mehrere dieser Größen < 0; die Wurzeln der zweiten acht Gleichungssysteme sind reell, wenn m, n, p u. q sämmtlich $\leqq +2$, sie sind nicht alle reell, wenn eine oder mehrere dieser Größen $> +2$. Sollen also die Wurzeln aller sechszehn Gleichungssysteme reell seyn, so muß jede der Größen m, n, p und q zwischen 0 und $+2$ liegen." So z. B. würde, wenn $\alpha = 0{,}9$, $\beta' = 0{,}7$ und $\gamma'' = 0{,}1$ gegeben wäre, ein neues reelles Coordinatensystem nicht existiren, weil $m = 2{,}7 > +2$, und $q = -0{,}5 < 0$ wäre; es würden, wenn $\alpha = 0{,}91$, $\beta' = 0{,}72$ und $\gamma'' = 0{,}64$, nur die acht neuen Coordinatensysteme möglich seyn, welche aus den acht ersten Gleichungssystemen hervorgehen, weil $m = 2{,}27 > +2$; und es würden, wenn $\alpha = 0{,}42$, $\beta' = 0{,}31$, $\gamma'' = -0{,}29$, blos diejenigen acht neuen Coordinatensysteme existiren, welche den zweiten acht Gleichungssystemen entsprechen, weil $q = -0{,}02 < 0$.

Wir können aber auch die Lage des neuen Coordinatensystems gegen das alte nicht dadurch, daß wir drei von den Größen α, β, γ, α' ꝛc. als gegeben betrachten, sondern auf andere Weise fixiren. So können wir die gegenseitige Lage der beiden rechtwinkligen Coordinatensysteme, von welchen wir auch jetzt annehmen, daß sie denselben Anfangspunkt haben, dadurch bestimmen, daß wir erstens die Lage der Geraden D, in welcher die Ebene der xy von der Ebene der $x'y'$ geschnitten wird, zweitens den Neigungswinkel dieser so eben genannten Ebenen, und drittens, die Lage der Achse der x' in der Ebene der $x'y'$ angeben. Die Lage der Geraden D in

§. 13. der Ebene der xy geben wir durch ihre Gleichung in Beziehung auf das Coordinatensystem der xy an, und es sey diese Gleichung

$$y = tang\,\psi \cdot x$$

Den Neigungswinkel der beiden Ebenen der xy und der $x'y'$ bezeichnen wir durch ϑ. Die Lage der Achse der x' gegen die Gerade D geben wir durch den Winkel an, welchen diese Achse mit der Geraden D bildet, und wollen wir denjenigen Winkel durch φ bezeichnen, welchen die positive Seite dieser Achse der x' mit derjenigen Seite der Geraden D bildet, die mit der positiven Seite der Achse der x den Winkel ψ einschließt. Auf diese Weise ist die Lage der Achsen der x' und der y' in Beziehung auf das alte Coordinatensystem völlig bestimmt, und auch die Richtung der positiven Seiten dieser Achsen gegeben. Es ist dadurch ferner die Lage der Achse der z', welche auf den Achsen der x' und der y' senkrecht ist, bestimmt, nicht aber die Richtung der positiven Seite dieser Achse der z', so daß also bei denselben Werthen von φ, ψ u. ϑ zwei neue Coordinatensysteme $x'y'z'$ möglich sind, von welchen das eine dem gegebenen gleich, das andere aber ihm symmetrisch seyn wird.

Aufgabe [32]. *Die alten Coordinaten, vermittelst der Winkel ψ, φ und ϑ, durch die neuen auszudrücken, und umgekehrt.*

Wir nehmen zuerst ein drittes rechtwinkliges Coordinatensystem $x''y''z''$ an, dessen Achse der x'' mit der Geraden D, und dessen Achse der z'' mit der Achse der z zusammenfällt. Zur Transformation des gegebenen Systems der xyz auf dieses dritte Cordinatensystem haben wir (I. §. 3. F. 9)

$$z = z'' \quad ; \quad y = sin\psi \cdot x'' + cos\psi \cdot y'' \quad ; \quad x = cos\psi \cdot x'' - sin\psi \cdot y''.$$

Sodann nehmen wir ein viertes rechtwinkliges Coordinatensystem $x'''y'''z'''$, dessen Achse der x''' mit der Achse der x'', d. i. mit der Geraden D, und dessen Achse der z''' mit der Achse der z' coincidirt. Weil nun die Achse der z' mit der Achse der z, also auch mit der Achse der z'' denselben Winkel bildet als die Ebene der $x'y'$ mit der Ebene der xy, oder, was dasselbe ist, mit der Ebene der $x''y''$, so bildet die Achse der y''' mit der Achse der y'' auch den Winkel ϑ, und wir haben wiederum

$$x'' = x''' \quad ; \quad y'' = cos\vartheta \cdot y''' - sin\vartheta \cdot z''' \quad ; \quad z'' = sin\vartheta \cdot y''' + cos\vartheta \cdot z'''.$$

Nehmen wir nun ein letztes Coordinatensystem $x'y'z'$ an, dessen in der Ebene der $x'''y'''$ liegende Achse der x' mit der Geraden D, d. i. mit der Achse der x''' den Winkel φ bildet, und dessen Achse der z' mit der Achse der z''' coincidirt, so haben wir endlich

z'''

$z''' = z'$; $y''' = \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y'$; $x''' = \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y'$. §. 13.

Eliminiren wir jetzt x''', y''', z''', x'', y'', u. z'', so kommt:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \begin{cases} + x' \cdot [\cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi] \\ - y' \cdot [\cos\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi] \\ + z' \cdot \sin\vartheta\sin\psi \end{cases} \\
y &= \begin{cases} + x' \cdot [\sin\psi\cos\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi] \\ - y' \cdot [\sin\psi\sin\varphi - \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi] \\ - z' \cdot \sin\vartheta\cos\psi \end{cases} \\
z &= x' \cdot \sin\vartheta\sin\varphi + y' \cdot \sin\vartheta\cos\varphi + z' \cdot \cos\vartheta
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Vertauschen wir z' mit $-z'$, so haben wir auch

$$\left.\begin{aligned}
x &= \begin{cases} + x' \cdot [\cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi] \\ - y' \cdot [\cos\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi] \\ - z' \cdot \sin\vartheta\sin\psi \end{cases} \\
y &= \begin{cases} + x' \cdot [\sin\psi\cos\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi] \\ - y' \cdot [\sin\psi\sin\varphi - \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi] \\ + z' \cdot \sin\vartheta\cos\psi \end{cases} \\
z &= x' \cdot \sin\vartheta\sin\varphi + y' \cdot \sin\vartheta\cos\varphi - z' \cdot \cos\vartheta
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Dies sind die gesuchten Transformationsformeln, welche die alten Coordinaten durch die neuen ausdrücken, und von denen sich die Formeln (17) auf gleiche, dagegen die Formeln (18) auf symmetrische Systeme beziehen. Diese Formeln (17) u. (18) lassen sich dadurch zusammen fassen, daß man den Coefficienten von z' doppelte Vorzeichen giebt, und alsdann hat man durch Vergleichung mit den Ausdrücken (6')

$$\alpha = \cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi \;;\; \beta = -\cos\psi\sin\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi \;;\; \gamma = \pm\sin\vartheta\sin\psi$$
$$\alpha' = \sin\psi\cos\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi \;;\; \beta' = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi \;;\; \gamma' = \mp\sin\vartheta\cos\psi$$
$$\alpha'' = \sin\vartheta\sin\varphi \;;\; \beta'' = \sin\vartheta\cos\varphi \;;\; \gamma'' = \pm\cos\vartheta$$

Die Gleichungen (7') geben nun unmittelbar

$$\left.\begin{aligned}
x' &= \begin{cases} + x \cdot [\cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi] \\ + y \cdot [\sin\psi\cos\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi] \\ + z \cdot \sin\vartheta\sin\varphi \end{cases} \\
y' &= \begin{cases} - x \cdot [\cos\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi] \\ - y \cdot [\sin\psi\sin\varphi - \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi] \\ + z \cdot \sin\vartheta\cos\varphi \end{cases} \\
z' &= \pm\left\{x\sin\vartheta\sin\psi - y\sin\vartheta\cos\psi + z\cos\vartheta\right\} \;;
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

§ 13. und dies sind die Transformationsformeln, welche die neuen Coordinaten durch die alten ausdrücken, und in deren letzter sich das Zeichen + auf gleiche, das Zeichen − aber auf symmetrische Coordinatensysteme bezieht.

Aus den Formeln (17) und (18) ergeben sich die folgenden für specielle Fälle:

I. Wenn die Gerade D, d. i. die Durchschnittslinie der Ebene der $x'y'$ mit der Ebene der xy, die Achse der x' ist. Alsdann ist $\varphi = 0$, also $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$, und somit

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - y'\cos\vartheta\sin\psi \pm z'\sin\vartheta\sin\psi, \\ y &= x'\sin\psi + y'\cos\vartheta\cos\psi \mp z'\sin\vartheta\cos\psi, \\ z &= y'\sin\vartheta \pm z'\cos\vartheta\ . \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

II. Wenn die Gerade D mit der Achse der x coincidirt. Alsdann ist $\psi = 0$, also $\cos\psi = 1$, $\sin\psi = 0$, und somit

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\cos\vartheta\sin\varphi + y'\cos\vartheta\cos\varphi \mp z'\sin\vartheta, \\ z &= x'\sin\vartheta\sin\varphi + y'\sin\vartheta\cos\varphi \pm z'\cos\vartheta\ . \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

III. Wenn die Gerade D sowohl die Achse der x als der x' ist. Alsdann haben wir $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, somit

$$x = x' \;;\; y = y'\cos\vartheta \mp z'\sin\vartheta \;;\; z = y'\sin\vartheta \pm z'\cos\vartheta. \quad (22)$$

IV. Wenn alle Punkte des zu transformirenden Systems in einer Ebene liegen, und diese Ebene zur Ebene der $x'y'$ genommen wird. Alsdann ist $z' = 0$, und somit

$$\left.\begin{aligned} x &= x'[\cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi] - y'[\cos\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\sin\psi\cos\varphi], \\ y &= x'[\sin\psi\cos\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi] - y'[\sin\psi\sin\varphi - \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi], \\ z &= x'\sin\vartheta\sin\varphi + y'\sin\vartheta\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

V. Wenn die Punkte des zu transformirenden Systems in einer Ebene liegen, und diese Ebene zur Ebene der $x'y'$, die Durchschnittslinie D dieser Ebene und der Ebene der xy aber zur Achse der x' genommen wird. Alsdann ist in den Formeln (23) $\varphi = 0$, oder in den Formeln (20) $z' = 0$, und somit

$$x = x'\cos\psi - y'\cos\vartheta\sin\psi \;;\; y = x'\sin\psi + y'\cos\vartheta\cos\psi \;;\; z = y'\sin\vartheta. \quad (24)$$

VI. Wenn die Punkte des zu transformirenden Systems in einer Ebene liegen, welche die Ebene der xy in der Achse der x schneidet, und nun jene Ebene zur Ebene der $x'y'$ genommen wird. Alsdann ist in den Formeln (23) $\psi = 0$, oder in den Formeln (21) $z' = 0$, und somit

§. 13.

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \;;\; y = \cos\vartheta(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) \;;\; z = \sin\vartheta(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi). \quad (25)$$

VII. Wenn alle Punkte des zu transformirenden Systems in einer Ebene liegen, welche die Ebene der xy in der Achse der x schneidet, wenn jene Ebene zur Ebene der $x'y'$, und die Achse der x auch zur Achse der x' genommen wird. Alsdann ist in den Formeln (23) $\varphi = \psi = 0$, oder in den Formeln (22) $z' = 0$, und somit

$$x = x' \;;\; y = y'\cos\vartheta \;;\; z = y'\sin\vartheta \quad (26)$$

Vom Rauminhalte der Polyeder und Flächeninhalte ebener Polygone im Raume.

§. 14.

Aufgabe [33]. **Die rechtwinkligen Coordinaten der Eckpunkte eines im Raume befindlichen Dreieckes sind gegeben. Es soll der Rauminhalt Q des prismatischen Körpers gefunden werden, welcher von dem genannten Dreiecke, von seiner Projection auf einer der Coordinatenebenen und von den projicirenden Ebenen seiner Seitenlinien eingeschlossen wird, unter der Voraussetzung, daß jenes Dreieck von der Projectionsebene nicht geschnitten wird.**

Es seyen $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ die gegebenen Coordinaten der Eckpunkte p_1, p_2, p_3 des Dreiecks, und es sey, absolut genommen, $z_1 < z_2 < z_3$, die Ebene der xy aber sey die genannte Projectionsebene. Wir legen durch den Punkt p_1 eine Ebene der Projectionsebene parallel; hierdurch wird der in Rede stehende Körper in ein dreiseitiges Prisma mit parallelen Grundflächen und in eine Pyramide zerlegt, die ihren Scheitel im Punkt p_1 hat und deren Grundfläche ein Paralleltrapez ist. Bezeichnen wir den Inhalt der Grundfläche des Prismas durch q, so ist der Rauminhalt desselben gleich $q \cdot z_1$. Der Inhalt der Grundfläche der Pyramide aber ist, wenn wir die Projection der Geraden p_2p_3 durch k bezeichnen, offenbar gleich $\frac{1}{2}(z_3 + z_2 - 2z_1)k$; ferner ist die Höhe dieser Pyramide, wie leicht einzusehen, dem Perpendikel h gleich, welcher von der Projection des Punktes p_1 auf die Projection der Gerade p_2p_3 gefällt ist; und demnach ist der Rauminhalt der Pyramide $\frac{1}{6}(z_3 + z_2 - 2z_1)kh$, oder, da offenbar $\frac{1}{2}kh = q$ ist, $\frac{1}{3}(z_3 + z_2 - 2z_1)q$. Der Inhalt des Prismas und der Pyramide zu-

§. 14. sammengenommen oder Q ist daher gleich $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)q$. Setzen wir für q seinen Ausdruck (I. §. 10. S. 2), so ergiebt sich

$$Q = \frac{1}{6}(z_1 + z_2 + z_3)\left\{(x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) - (y_2x_1 + y_3x_2 + y_1x_3)\right\} \ldots (1).$$

Wenn die Coordinaten schiefwinklig sind, so ist der in Rede stehende Rauminhalt noch immer durch die Formel (1) ausgedrückt, wenn wir nicht den auf der Längeneinheit construirten Cubus, sondern statt dessen ein Parallelepiped zur Raumeinheit nehmen, dessen Kanten der Längeneinheit gleich sind, und in welchem eine Ecke mit der von den Coordinatenebenen gebildeten Ecke coincidirt. Jener Cubus verhält sich zu diesem Parallelepiped offenbar wie $1 : \sin\hat{z}\sin Z'$; wenn wir, wie in §. 10, durch $\hat{z}$ den Winkel, welchen die Achsen der x und der y mit einander machen, durch Z' aber den Winkel, unter welchem die Achse der z gegen die Ebene der xy geneigt ist, bezeichnen. Wollen wir also den Cubus auf der Längeneinheit auch für schiefwinklige Coordinaten zur Raumeinheit nehmen, so müssen wir den Ausdruck (1) noch mit $\sin\hat{z}\sin Z'$, also zufolge (§. 10. S. 11 u. 12) noch mit

$$\Omega = \sqrt{\left\{1 - \cos^2\hat{x} - \cos^2\hat{y} - \cos^2\hat{z} + 2\cos\hat{x}\cos\hat{y}\cos\hat{z}\right\}}$$

multipliciren.

Aufgabe [34]. *Den Rauminhalt eines Tetraeders durch die rechtwinkligen Coordinaten seiner Eckpunkte auszudrücken.*

Wir wollen vorläufig annehmen, die Coordinatenebenen seyen so angenommen, daß das Tetraeder gänzlich in derjenigen körperlichen Ecke liegt, welche die positiven Seiten der Coordinatenachsen bilden; ferner daß, wenn p_1, p_2, p_3, p_4 die Eckpunkte des Tetraeders bezeichnen, die Projection eines Eckpunktes p_1 auf der Ebene der xy innerhalb der Projection des Dreiecks $p_2p_3p_4$, und der Punkt p_1 selbst zwischen der Ebene dieses Dreiecks $p_2p_3p_4$ und der Ebene der xy liegt. Projiciren wir nun alle Kanten des Tetraeders auf die Ebene der xy, so erhalten wir vier prismatische Körper von der in der vorigen Aufgabe genannten Art; und der gesuchte Rauminhalt ist offenbar dem Reste gleich, den man erhält, wenn man von dem Inhalte des Körpers auf der Projection des Dreiecks $p_2p_3p_4$ die Summe der drei übrigen Körper abzieht. Bezeichnen wir die Coordinaten von p_1, p_2, rc. durch x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2, rc., ferner den Flächeninhalt der Projectionen der Dreiecke $p_2p_3p_4$, $p_1p_3p_4$ rc. durch q_1, q_2 rc., so ist der Rauminhalt des Tetraeders, zufolge der vorigen Aufgabe, gleich

§ 14.

$\frac{1}{3}\left\{(z_2+z_3+z_4)q_1-(z_1+z_3+z_4)q_2-(z_1+z_2+z_4)q_3-(z_1+z_2+z_3)q_4\right\}$,

oder, was dasselbe ist, gleich

$\frac{1}{3}\left\{z_4(q_1-q_2-q_3)+z_3(q_1-q_2-q_4)+z_2(q_1-q_3-q_4)-z_1(q_2+q_3+q_4)\right\}$.

Da aber $q_1 = q_2+q_3+q_4$ ist, so können wir dem eben gefundenen Ausdrucke die einfachere Form

$$\frac{1}{3}\left\{z_4q_4+z_3q_3+z_2q_2-z_1q_1\right\}$$

geben. Setzen wir nun hierin für q_1, q_2, ꝛc. ihre durch die Coordinaten der Eckpunkte ausgedrückten Werthe (I. §. 10. G. 2), so erhalten wir für den gesuchten Inhalt des Tetraeders:

$$\frac{1}{6}\left\{\begin{matrix}+x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3-x_3y_2z_1\\-x_1y_2z_4-x_2y_4z_1-x_4y_1z_2+x_1y_4z_2+x_2y_1z_4+x_4y_2z_1\\+x_1y_3z_4+x_3y_4z_1+x_4y_1z_3-x_1y_4z_3-x_3y_1z_4-x_4y_3z_1\\-x_2y_3z_4-x_3y_4z_2-x_4y_2z_3+x_2y_4z_3+x_3y_2z_4+x_4y_3z_2\end{matrix}\right\} \text{*)} \quad (2)$$

Aus der Symmetrie, welche in diesem Ausdrucke herrscht, kann gefolgert werden, daß derselbe auch für jede beliebige Lage des Tetraeders, die von der oben angenommenen verschieden ist, Gültigkeit hat.

Liegen die Punkte p_1, p_2, p_3 und p_4 in einer und derselben Ebene, so wird der Ausdruck (2) gleich Null, wie es auch seyn muß, da diese vier Punkte alsdann kein Tetraeder bilden. Denn legen wir durch die Punkte p_1, p_2 u. p_3 eine Ebene, so wird die Gleichung derselben (§. 6. G. 3) von den Coordinaten x_4, y_4, z_4 befriedigt werden, wenn p_4 in derselben Ebene liegt. Die Substitution dieser Coordinaten in den ersten Theil der genannten Gleichung giebt aber den Ausdruck (2), der folglich alsdann gleich Null ist.

---

*) Dieser Ausdruck kann folgendermaßen gebildet werden. Man bezeichne beliebige drei Punkte einer Kreislinie mit den Ziffern 1, 2, 3; bilde alle Permutationen der Zeiger in der Complexion $x_1y_2z_3$, und gebe den dadurch entstehenden Complexionen, in welchen die Zeiger nach einer Kreisrichtung folgen, das Zeichen +, und denjenigen, in welchen die Zeiger nach der entgegengesetzten Kreisrichtung fortgehen, das Zeichen −, so hat man die in der ersten Zeile befindlichen 6 Glieder des Ausdruckes (2). Um die sechs Glieder der zweiten Zeile zu erhalten, braucht man nur in der ersten Zeile die Ziffer 3 mit der Ziffer 4 zu vertauschen und die Vorzeichen umzukehren. Die sechs Glieder der dritten Zeile erhält man aus der zweiten durch Vertauschung des Zeigers 2 mit dem Zeiger 3, und durch Umkehrung der Vorzeichen. Die vierte Zeile ergiebt sich aus der dritten durch Verwechselung des Zeigers 1 mit dem Zeiger 2 und durch Veränderung der Vorzeichen.

§. 14. Wenn ein Eckpunkt des Tetraeders z. B. p_4 im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, so ergiebt sich aus (2), da alsdann $x_4 = y_4 = z_4 = 0$ ist,

$$\tfrac{1}{6}\left\{x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1\right\} \qquad (3)$$

für den Inhalt des Tetraeders. Man kann bemerken, daß der zwischen den Parenthesen enthaltene Theil dieses Ausdruckes der Nenner der in §. 6. für A, B, u. C gefundenen Ausdrücke ist.

Da sich jedes Polyeder als eine Summe oder Differenz solcher prismatischen Körper als wir in der Aufgabe (31) betrachtet haben, ansehen läßt, so ist man im Stande den Rauminhalt eines jeden Polyeders durch die Coordinaten seiner Eckpunkte auszudrücken.

Aufgabe [35]. Der Flächeninhalt S eines ebenen Polygons im Raume ist gegeben. Es soll der Flächeninhalt einer orthogonalen Projection desselben gefunden werden.

Es sey die Ebene der xy die Projectionsebene und ω_z der Neigungswinkel der Ebene des Polygons gegen diese Projectionsebene. Fällen wir von zwei Eckpunkten p_1, p_2 des Polygons die Senkrechten $\overline{p_1q_1}$, $\overline{p_2q_2}$ auf die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, und legen durch die Geraden $\overline{p_1p_2}$, $\overline{p_1q_1}$ und $\overline{p_2q_2}$ die projicirenden Ebenen, welche durch die Projectionen p'_1, p'_2 der Punkte p_1, p_2 gehen, so haben wir in der projicirten Ebene ein Paralleltrapez $p_1q_1q_2p_2$, dessen Projection $p'_1q_1q_2p'_2$ ebenfalls ein Paralleltrapez ist, und die parallelen Seiten dieser Trapeze stehen auf ihrer gemeinschaftlichen Grundlinie $\overline{q_1q_2}$ senkrecht. Nun ist der Inhalt von $p_1q_1q_2p_2$ $= \tfrac{1}{2}\overline{q_1q_2}(\overline{p_1q_1} + \overline{p_2q_2})$ und der Inhalt von $p'_1q_1q_2p'_2 = \tfrac{1}{2}\overline{q_1q_2}(\overline{p'_1q_1} + \overline{p'_2q_2})$ und da $\overline{p'_1q_1}$ und $\overline{p'_2q_2}$ die Projectionen respective von $\overline{p_1q_1}$ und $\overline{p_2q_2}$ sind, so ist offenbar $\overline{p'_1q_1} = \overline{p_1q_1}\cdot\cos\omega_z$ und $\overline{p'_2q_2} = \overline{p_2q_2}\cdot\cos\omega_z$; folglich ist der Inhalt von $p'_1q_1q_2p'_2 = \tfrac{1}{2}\overline{q_1q_2}(\overline{p_1q_1} + \overline{p_2q_2})\cos\omega_z$, und demzufolge $p'_1q_1q_2p'_2 = p_1q_1q_2p_2\cdot\cos\omega_z$. Verfahren wir mit allen Eckpunkten des Polygons wie mit den Punkten p_1, p_2, so bilden wir dadurch in seiner Ebene eine Reihe von Paralleltrapezen, deren Summe oder Differenz dem Polygone gleich ist, und zugleich in der Projectionsebene eine Reihe von Paralleltrapezen, deren Summe oder Differenz der Projection des Polygons gleich ist. Da nun jedes einzelne Trapez der zweiten Reihe einem Trapez in der zuerst genannten, mit $\cos\omega_z$ multiplicirt, gleich ist, so ist auch die Projection des Polygons dem Producte dieses Polygons in $\cos\omega_z$ gleich. Bezeichnen wir also die Projectionen des Polygons auf die Ebenen der xy,

der xz und der yz durch S_z, S_y, und S_x, so ist, unter der Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, §. 14.

$$S_z = S \cdot \cos\omega_z \quad ; \quad S_y = S \cdot \cos\omega_y \quad ; \quad S_x = S \cdot \cos\omega_x \ . \qquad (4)$$

Aufgabe [36]. Der Flächeninhalt S eines ebenen Polygons im Raume durch die rechtwinkligen Coordinaten seiner Eckpunkte auszudrücken.

Quadriren wir die einzelnen Theile der in der vorigen Aufgabe gefundenen Gleichungen (4) und addiren sie, so ergiebt sich

$$(\cos^2\omega_z + \cos^2\omega_y + \cos^2\omega_x) S^2 = S^2_x + S^2_y + S^2_z \ .$$

Nun ist, zufolge §. 10. (G. 7), $\cos^2\omega_z + \cos^2\omega_y + \cos^2\omega_x = 1$, also ist

$$S = \sqrt{\left\{ S^2_x + S^2_y + S^2_z \right\}} \ . \qquad (5)$$

Wir können aber den Flächeninhalt S_x, S_y, S_z der Projectionen des Polygons durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte nach (I. §. 10. G. 2) ausdrücken, und setzen wir diese Ausdrücke in (5), so erhalten wir was verlangt worden.

Lehrsatz [3]. Bildet man die orthogonale Projection A eines ebenen Polygons S auf irgend eine Ebene E; ferner die orthogonalen Projectionen A′, A″, A‴ von S auf irgend drei zu einander rechtwinklige Ebenen, und die orthogonalen Projectionen B′, B″, B‴ von A′, A″, A‴ auf jene Ebene E, so ist $A = B' + B'' + B'''$.

Es sey ω der Winkel, welchen die Ebene des Polygons S mit der Ebene E bildet; ferner seyen ζ', ζ'', ζ''' die Winkel, welche die Ebene des Polygons, und η', η'', η''' die Winkel, welche die Ebene E mit den drei auf einander senkrechten Ebenen macht, so ist, nach Aufgabe (35),

$$A = S\cos\omega \quad ; \quad A' = S\cos\zeta' \quad ; \quad A'' = S\cos\zeta'' \quad ; \quad A''' = S\cos\zeta''' \ .$$

Daher ferner

$$B' = S\cos\zeta'\cos\eta' \quad ; \quad B'' = S\cos\zeta''\cos\eta'' \quad ; \quad B''' = S\cos\zeta'''\cos\eta''' \ ;$$

und folglich

$$B' + B'' + B''' = (\cos\zeta'\cos\eta' + \cos\zeta''\cos\eta'' + \cos\zeta'''\cos\eta''') S \ .$$

Da nun aber (§. 10. G. 8) $\cos\zeta'\cos\eta' + \cos\zeta''\cos\eta'' + \cos\zeta'''\cos\eta''' = \cos\omega$, so ist $B' + B'' + B''' = S\cos\omega$, und folglich

$$A = B' + B'' + B''' \ , \qquad (6)$$

w. z. e. w.

Von der Verwandtschaft der Collineation.

§. 15.

Zwei Systeme von Punkten, welche in einer solchen Beziehung stehen, daß jedem Punkte des einen Systems ein Punkt des anderen entspricht, dergestalt, daß wenn drei Punkte des einen Systems in gerader Linie liegen, die drei ihnen entsprechenden Punkte des anderen Systems sich ebenfalls in gerader Linie befinden, nennen wir, nach Herrn Möbius, collinear-verwandte oder collineare Systeme. Da eine Gerade im Raume durch zwei Punkte bestimmt ist, so können, zufolge dieser Erklärung, allen Punkten einer und derselben Geraden eines Systems nur Punkte einer und derselben Geraden des collinearen Systems entsprechen, oder, mit anderen Worten, einer Geraden des einen Systems entspricht eine Gerade des anderen Systems. Einer Geraden, welche zwei Punkte in dem einen Systeme verbindet, entspricht die Gerade, welche die beiden entsprechenden (homologen) Punkte in dem collinearen Systeme verbindet. Dem Durchschnittspunkte p zweier Geraden l_1, l_2 des einen Systems entspricht der Durchschnittspunkt π der homologen Geraden λ_1, λ_2 des collinearen Systems; denn da der Punkt p auf den Geraden l_1 und l_2 liegt, so muß der homologe Punkt π auf den homologen Geraden λ_1 und λ_2 liegen, und dieser Punkt π ist somit der Durchschnittspunkt der Geraden λ_1 und λ_2. Einer Ebene m des einen Systems entspricht eine Ebene μ des collinearen Systems. Denn, nehmen wir in der Ebene m einen Punkt a und eine Gerade l_1 beliebig an, so entspricht ihnen ein Punkt α und eine Gerade λ_1, und dreht sich eine Gerade l um den Punkt a, indem sie fortwährend die Gerade l_1 schneidet, und dadurch die Ebene m beschreibt, so dreht sich im collinearen Systeme die homologe Gerade λ um den Punkt α, indem sie fortwährend die

Gerade λ_1 schneidet und dadurch die homologe Ebene μ beschreibt. Es ist nun leicht einzusehen, daß homologe Ebenen sich in homologen Geraden schneiden. §. 15.

Es seyen x, y, z die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines Punktes in dem einen Systeme und t, u, v die rechtwinkligen oder schiefwinkligen, auf dieselben oder auf andere Achsen bezogenen Coordinaten des ihm entsprechenden Punktes in einem dem erstern collinear-verwandten Systeme, so sind offenbar t, u und v Functionen von x, y und z, so daß $t = \varphi(x, y, z)$, $u = \psi(x, y, z)$, $v = \chi(x, y, z)$; und es stellt sich nun die

Aufgabe [37]. Die Form der Functionen φ, ψ und χ zu bestimmen.

Wären die Functionen $t = \varphi(x, y, z)$, $u = \psi(x, y, z)$, $v = \chi(x, y, z)$, die wir, der Kürze wegen, durch φ, ψ, χ bezeichnen wollen, bekannt, so würde einer Ebene im Systeme tuv, deren Gleichung

$$gv + hu + kt + i = 0$$

ist, eine Ebene im Systeme xyz entsprechen, deren Gleichung durch Substitution der genannten Functionen gefunden wird, und die also

$$g\chi + h\psi + k\varphi + i = 0$$

seyn würde. Da aber diese Gleichung, was auch immer g, h, k und i seyn mögen, nur vom ersten Grade seyn darf, so wird sie die Form

$$\left.\begin{array}{l} g(m'''z + n'''y + p'''x + q''') + h(m''z + n''y + p''x + q'') \\ + k(m'z + n'y + p'x + q') + i(mz + ny + px + 1) \end{array}\right\} = 0$$

haben, woraus sich, durch das Identificiren mit der vorher angegebenen Gleichung,

$$\left.\begin{array}{l} v = \chi(x, y, z) = \dfrac{m'''z + n'''y + p'''x + q'''}{mz + ny + px + 1}, \\[2ex] u = \psi(x, y, z) = \dfrac{m''z + n''y + p''x + q''}{mz + ny + px + 1}, \\[2ex] t = \varphi(x, y, z) = \dfrac{m'z + n'y + p'x + q'}{mz + ny + px + 1} \end{array}\right. \quad (1)$$

ergiebt, was gesucht wurde.

Diese Ausdrücke von t, u u. v enthalten zusammen 15 Constanten m, n, p, q, m' ꝛc.; und diese Constanten können im Allgemeinen bestimmt werden, wenn fünf Punkte des einen und die fünf homologen Punkte des anderen Systems gegeben sind. Denn setzt man die Werthe der Coordina-

§. 15. ten dieser Punkte nach einander in die Gleichungen (1), so erhält man fünf mal drei, also 15 Gleichungen, welche in Beziehung auf m, n, p rc. vom ersten Grade und zur Bestimmung dieser Größen, im Allgemeinen, hinreichend sind. Hieraus folgt, daß einem gegebenen Systeme unzählig viele andere Systeme collinear-verwandt seyn können; sind aber auch fünf Punkte des anderen Systems gegeben, welche fünf bestimmten Punkten des erstern entsprechen sollen, so ist dieses andere System völlig bestimmt.

Entwickeln wir aus den Gleichungen (1) x, y und z, so erhalten wir Ausdrücke in t, u u. v von derselben Form, d. h. Brüche, deren Zähler und Nenner Functionen ersten Grades von t, u u. v, und deren Nenner einander gleich sind.

Der gemeinschaftliche Nenner der Ausdrücke (1) gleich Null gesetzt, giebt

$$mz + ny + px + 1 = 0 \quad , \qquad (2)$$

und diese Gleichung drückt eine Ebene aus, welche alle Punkte des Systems xyz enthält, die unendlich entfernten Punkten des Systems tuv entsprechen, weil für jeden Punkt, dessen Coordinaten x, y, z die Gleichung (2) befriedigen, die Coordinaten t, u, v des homologen Punktes gleich ∞ werden. Diese Ebene (2) soll die Gegenebene im Systeme xyz heißen. Auf ähnliche Weise giebt es im Systeme tuv eine Ebene, welche alle Punkte enthält, die unendlich entfernten Punkten des Systems xyz entsprechen, und diese Ebene wollen wir die Gegenebene im Systeme tuv nennen.

Zweien parallelen Ebenen in dem einen der beiden collinearen Systeme entsprechen zwei Ebenen in dem anderen, die im Allgemeinen nicht parallel sind, sondern die sich in einer, auf der Gegenebene dieses zweiten Systems liegenden Geraden schneiden. Und zweien parallelen Geraden in dem einen Systeme entsprechen zwei gerade Linien in dem anderen, die im Allgemeinen nicht parallel sind, sondern die sich in einem, auf der Gegenebene dieses zweiten Systems liegenden Punkte schneiden. Allen Geraden des einen Systems, welche einer und derselben Ebene parallel sind, entsprechen gerade Linien in dem anderen Systeme, welche im Allgemeinen durch eine und dieselbe, auf der Gegenebene dieses zweiten Systems liegende Gerade gehen.

Ein drittes System, dessen Coordinaten x′, y′, z′ seyn mögen, wird dem Systeme tuv collinear-verwandt seyn, wenn

$$v = \frac{g'''z' + h'''y' + k'''x' + i'''}{gz' + hy' + kx' + 1} \quad ,$$

$$u = \frac{g''z' + h''y' + k''x' + i''}{gz' + hy' + kx' + 1} \quad ,$$

$$\mathfrak{t} = \frac{g'z' + h'y' + k'x' + i'}{gz' + hy' + kx' + 1}$$

ist. Alsdann ist auch

$$\frac{m'''z + n'''y + p'''x + q'''}{mz + ny + px + 1} = \frac{g'''z' + h'''y' + k'''x' + i'''}{gz' + hy' + kx' + 1},$$

$$\frac{m''z + n''y + p''x + q''}{mz + ny + px + 1} = \frac{g''z' + h''y' + k''x' + i''}{gz' + hy' + kx' + 1}, \quad (3)$$

$$\frac{m'z + n'y + p'x + q'}{mz + ny + px + 1} = \frac{g'z' + h'y' + k'x' + i'}{gz' + hy' + kx' + 1}.$$

Aus diesen Gleichungen (3) können x', y' und z' durch x, y und z bestimmt werden, und wir finden durch die Entwicklung Ausdrücke von der vorher erwähnten Form, woraus wir schließen, daß das System $x'y'z'$ dem Systeme xyz collinear verwandt ist, und überhaupt, daß zwei Systeme, welche mit einem dritten in der Verwandtschaft der Collineation stehen, selbst collinear verwandt sind. Es ist klar, daß wir die Gleichungen (3) ebenfalls anwenden können, um die Beziehungen aufzufinden, die zwischen zwei collinear-verwandten Systemen Statt haben. Bezeichnen wir die in den Gleichungen (3) vorkommenden linearen Functionen von x, y, z durch A, B, C und N, diejenigen von x', y', z' durch A', B', C' und N', so haben wir statt der Gleichungen (3) die folgenden

$$\frac{A}{N} = \frac{A'}{N'}; \quad \frac{B}{N} = \frac{B'}{N'}; \quad \frac{C}{N} = \frac{C'}{N'}; \quad (4)$$

und diese Gleichungen enthalten 30 Constanten, zwischen welchen nur 15 Bedingungsgleichungen existiren, wenn (was zur gegenseitigen Bestimmung zweier collinearen Systeme hinreicht) fünf Paar homologer Punkte aus beiden Systemen bekannt sind. Wir können also die 15 Größen m, n, p, q, m' etc. beliebig und auf unzählig verschiedene Arten annehmen, wenn wir nur den 15 übrigen Größen g, h, k, etc. die ihnen bei diesen Annahmen, in Folge der 15 Bedingungsgleichungen, zukommenden Werthe geben. Sind nun für irgend zwei collineare Systeme die Constanten m, n, p etc. angenommen, und daraus g, h, k etc. gehörig bestimmt, so wird einer Ebene des einen Systems, deren Gleichung

$$\varkappa A + \lambda B + \mu C + \nu N = 0$$

ist, eine Ebene des anderen Systems entsprechen, deren Gleichung

$$\varkappa A' + \lambda B' + \mu C' + \nu N' = 0$$

seyn muß. Setzen wir, der Reihe nach, λ, μ und ν; $\varkappa$, μ und ν; $\varkappa$,

§. 15. λ und ν und $\varkappa$, λ und μ gleich Null, so ergiebt sich, daß den vier Ebenen

$$A = 0 \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad C = 0 \qquad N = 0$$

in dem einen Systeme, respective die vier Ebenen

$$A' = 0 \quad ; \quad B' = 0 \quad ; \quad C' = 0 \quad ; \quad N' = 0$$

in dem collinearen Systeme entsprechen.

Es seyen jetzt $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ zwei Punkte in dem einen Systeme, und ferner $x'_1 y'_1 z'_1$ und $x'_2 y'_2 z'_2$ die zwei Punkte in dem collinearen Systeme, welche respective jenen entsprechen; auch seyen

a_1 u. a_2 die von den Punkten $x_1 y_1 z_1$ u. $x_2 y_2 z_2$ auf die Ebene $A = 0$,
b_1 u. b_2 » » » » $x_1 y_1 z_1$ u. $x_2 y_2 z_2$ » » » $B = 0$,
α_1 u. α_2 » » » » $x'_1 y'_1 z'_1$ u. $x'_2 y'_2 z'_2$ » » » $A' = 0$,
β_1 u. β_2 » » » » $x'_1 y'_1 z'_1$ u. $x'_2 y'_2 z'_2$ » » » $B' = 0$

gefällten Perpendikel, so ist, wenn wir durch A_1, A_2, B_1 u. B_2 die Ausdrücke bezeichnen, welche, durch Substitution von x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 in A und B, hervorgehen, und wenn A'_1, A'_2, B'_1 u. B'_2 die Resultate der Substitution von x'_1, y'_1, z'_1 und x'_2, y'_2, z'_2 in A' und B' bedeuten, unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, zufolge §. 11 (S. 4)

$$a_1 = \frac{A_1}{\mu_3} \; ; \quad a_2 = \frac{A_2}{\mu_3} \; ; \quad b_1 = \frac{B_1}{\mu_2} \; ; \quad b_2 = \frac{B_2}{\mu_2} \; ,$$

$$\alpha_1 = \frac{A'_1}{\mu'_3} \; ; \quad \alpha_2 = \frac{A'_2}{\mu'_3} \; ; \quad \beta_1 = \frac{B'_1}{\mu'_2} \; ; \quad \beta_2 = \frac{B'_2}{\mu'_2} \; ,$$

wenn wir noch, der Kürze wegen,

$$\sqrt{m'''^2 + n'''^2 + p'''^2} = \mu_3 \; ; \quad \sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2} = \mu_2 \; ;$$
$$\sqrt{g'''^2 + h'''^2 + k'''^2} = \mu'_3 \; ; \quad \sqrt{g''^2 + h''^2 + k''^2} = \mu'_2$$

setzen. Es ist aber, weil $x_1 y_1 z_1$ und $x'_1 y'_1 z'_1$, $x_2 y_2 z_2$ und $x'_2 y'_2 z'_2$ homologe Punkte sind,

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A'_1}{B'_1} \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{A'_2}{B'_2} \; ,$$

also, wenn wir für A_1, B_1, A'_1 rc. die Werthe aus den letzten acht Gleichungen setzen,

$$\frac{\mu_3 a_1}{\mu_2 b_2} = \frac{\mu'_3 \alpha_1}{\mu'_2 \beta_1} \quad \text{und} \quad \frac{\mu_3 a_2}{\mu_2 b_2} = \frac{\mu'_3 \alpha_2}{\mu'_2 \beta_2} \; .$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

§. 15.

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} : \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

oder auch

$$\frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} : \frac{\beta_1}{\beta_2} .$$

Da man aber, wie wir oben bemerkt haben, m, n, p ꝛc. beliebig angenommen werden können, so bezeichnen $A = 0$ und $B = 0$ jede zwei Ebenen im Systeme xyz, und A' und B' die ihnen entsprechenden im Systeme $x'y'z'$. Eben deshalb sind aber auch a_1, a_2, b_1, b_2 die von zwei beliebigen Punkten auf je zwei beliebige Ebenen gefällten Perpendikel, und α_1, α_2, β_1, β_2 die von den homologen Punkten auf die homologen Ebenen herabgelassenen Senkrechten. Wir haben somit den

Lehrsatz [4]. Wenn man von zwei beliebigen Punkten A, B auf irgend zwei Ebenen a, b Senkrechte fällt, deren Länge durch Aa, Ab, Ba, Bb bezeichnet, und wenn man ferner in einem collinearen Systeme von den entsprechenden Punkten A', B' auf die entsprechenden Ebenen a', b' Perpendikel A'a', A'b', B'a', B'b' herabläßt, so ist

$$\frac{Aa}{Ab} : \frac{Ba}{Bb} = \frac{A'a'}{A'b'} : \frac{B'a'}{B'b'}$$

oder

$$\frac{Aa}{Ba} : \frac{Ab}{Bb} = \frac{A'a'}{B'a'} : \frac{A'b'}{B'b'} .$$

Aus diesem Satze läßt sich unmittelbar ein anderer über das Verhältniß der Raumtheile zweier collinearen Systeme ableiten. Sind nämlich A, B, C, D, E, F, sechs beliebige Punkte eines Systems, und A', B', C', D', E', F', die ihnen entsprechenden Punkte eines collinearen Systems, und bezeichnen wir durch $\overline{Aa}$, $\overline{Ab}$, $\overline{Ba}$, $\overline{Bb}$ die von den Punkten A und B auf die Ebenen der Dreiecke CDE und CDF gefällten Perpendikel, ferner durch $\overline{A'a'}$, $\overline{A'b'}$, $\overline{B'a'}$, $\overline{B'b'}$ die von den Punkten A' und B' auf die Ebenen der Dreiecke C'D'E' und C'D'F' herabgelassenen Senkrechten, so ist, in Folge des obigen Satzes,

$$\frac{\frac{1}{3}\overline{Aa} \cdot CDE}{\frac{1}{3}\overline{Ba} \cdot CDE} : \frac{\frac{1}{3}\overline{Ab} \cdot CDF}{\frac{1}{3}\overline{Bb} \cdot CDF} = \frac{\frac{1}{3}\overline{A'a'} \cdot C'D'E'}{\frac{1}{3}\overline{B'a'} \cdot C'D'E'} : \frac{\frac{1}{3}\overline{A'b'} \cdot C'D'F'}{\frac{1}{3}\overline{B'b'} \cdot C'D'F'}$$

oder, da $\frac{1}{3}\overline{Aa} \cdot CDE$ = dem Tetraeder ACDE, $\frac{1}{3}\overline{Ba} \cdot CDE$ = dem Tetraeder BCDE, u. s. f.,

$$\frac{ACDE}{BCDE} : \frac{ACDF}{BCDF} = \frac{A'C'D'E'}{B'C'D'E'} : \frac{A'C'D'F'}{B'C'D'F'} .$$

§. 16.

§. 16.

Besteht ein jedes von zwei collinear-verwandten Systemen nur aus Punkten, die sämmtlich in einer Ebene liegen, so lassen sich diese beiden Ebenen (vorausgesetzt, daß die Systeme nicht in der näheren Verwandtschaft der Affinität stehen) auf unzählig viele Arten in eine solche gegenseitige Lage bringen, daß alle Verbindungslinien homologer Punkte sich in einem und demselben Punkte schneiden, so, daß jedes der beiden Systeme als die perspectivische Abbildung oder Centralprojection des anderen angesehen werden kann. Daß es zwei solche Lagen gebe, ist schon (I. §. 12) dargethan. In einer jeden dieser beiden Lagen fallen beide Ebenen in eine einzige zusammen, dergestalt, daß zwei bestimmte, einander entsprechende Gerade, die wir die Collineationsachsen der beiden Systeme genannt haben, eine einzige Gerade ausmachen, in welcher nun ein jeder Punkt auf seinem entsprechenden liegt, und der Vereinigungspunkt der Verbindungslinien anderer homologen Punkte ist derjenige Punkt, welcher Collineationscentrum genannt worden ist. Nun ist leicht einzusehen, daß in jeder anderen Lage der beiden Ebenen, bei welcher die genannten Verbindungslinien in einem Punkte zusammen treffen, ebenfalls zwei Collineationsachsen auf einander liegen müssen. Liegen aber einmal zwei Collineationsachsen und in ihnen die homologen Punkte auf einander, so werden, welches auch der Neigungswinkel der beiden Ebenen seyn mag, die Verbindungslinien aller homologen Punkte beider Ebenen durch einen Punkt P gehen. Der Beweis hiervon ist in der Lösung der folgenden Aufgabe enthalten.

Aufgabe [38]. Zwei ebene collineare Systeme schneiden sich in einer ihrer Collineationsachsen, die eine der beiden Ebenen hat eine feste Lage, die andere aber dreht sich um jene Collineationsachse. Es soll der Ort des Punktes P gefunden werden, in welchem sich die Verbindungslinien homologer Punkte schneiden.

Es sey die Relation der beiden collinearen Systeme durch die Gleichungen (I. §. 12. G. 1)

$$u' = \frac{py}{my + nx + 1} \quad ; \quad t' = \frac{px}{my + nx + 1} \qquad (1)$$

ausgedrückt, wenn beide Systeme in einer Ebene collinear liegen, und der Anfangspunkt der Coordinaten, die wir rechtwinklig annehmen, sich im Collineationspunkte befindet. Die Gleichung der Collinationsachse ist alsdann (I. §. 13. G. 1) $my + nx + 1 - p = 0$. Aendern wir die Lage der rechtwinkligen Coordinatenachsen ohne den Anfangspunkt zu verrücken, so daß

die Abscissenachse der Collineationsachse parallel wird, und die Ordinatenachse auf dieser Linie senkrecht steht, so gehen die Gleichungen (1) in § 16.

$$u' = \frac{ay}{y+b} \quad ; \quad t' = \frac{ax}{y+b} \qquad (2)$$

über, und die Gleichung der Collineationsachse ist nun $y+b-a=0$. Nehmen wir jetzt diese Collineationsachse zur Abscissenachse, indem wir $y+a-b$ für y und $u'+a-b$ für u' setzen, so kommt

$$u' = \frac{by}{y+a} \quad ; \quad t' = \frac{ax}{y+a} \qquad (3)$$

Drehen wir nun das System tu um die zur Abscissenachse genommene Collineationsachse, so daß seine Ebene mit der Ebene der xy den Winkel ϑ bildet, und bezeichnen die Coordinaten jenes Systems in seiner neuen Lage durch t, u, v, so ist (§. 13. F. 26)

$$v = u' \sin\vartheta \quad ; \quad u = u' \cos\vartheta \quad ; \quad t = t' \ ,$$

und, wenn wir für t' und u' die Ausdrücke (3) substituiren,

$$v = \frac{by \sin\vartheta}{y+a} \quad ; \quad u = \frac{by \cos\vartheta}{y+a} \quad ; \quad t = \frac{ax}{y+a} \ , \qquad (4)$$

(zu welchen drei Gleichungen noch die vierte Gleichung $z=0$ gehört). Die Gerade, welche durch den Punkt xy und den homologen Punkt tuv geht, ist durch die Gleichungen

$$\left\{ \alpha - x = \frac{t-x}{v}\gamma \quad ; \quad \beta - y = \frac{u-y}{v}\gamma \right\}$$

ausgedrückt, wenn wir ihre laufenden Coordinaten durch α, β, γ bezeichnen. Setzen wir hierin für t, u, v die Ausdrücke (4), so erhalten wir

$$\alpha - x = -\frac{x}{b\sin\vartheta}\gamma \quad ; \quad \beta - y = \frac{b\cos\vartheta - a - y}{b\sin\vartheta}\gamma \qquad (5)$$

als Gleichungen der Geraden, welche einen Punkt xy mit seinem homologen Punkte verbindet. Diese Gleichungen werden aber, was auch immer x und y für Werthe haben mögen, befriedigt, wenn wir

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = b\cos\vartheta - a \quad ; \quad \gamma = b\sin\vartheta \qquad (6)$$

setzen; und es gehen folglich alle Geraden, welche homologe Punkte verbinden, durch einen und denselben Punkt P, dessen Coordinaten die Werthe (6) haben. Dieser Punkt P verändert seine Lage, wenn der Winkel ϑ verändert wird; da aber $\alpha = 0$ ist, so liegt er in der Ebene der $\beta\gamma$ oder der yz, d. i. in einer Ebene, welche auf der Collineationsachse senkrecht ist. Um

§. 16. die Curve zu finden, welche der Punkt P in der Ebene der $\beta\gamma$ beschreibt, brauchen wir nur ϑ zwischen den beiden letzten Gleichungen (6) zu eliminiren, wodurch wir

$$(\beta + a)^2 + \gamma^2 = b^2 \qquad (7)$$

erhalten. Die Curve, welche der Punkt P bei der Drehung des einen Systems um die Collineationsachse beschreibt, ist also ein, auf dieser Achse senkrecht stehender Kreis, dessen Radius gleich b, und dessen Mittelpunkts-Abscisse gleich $-a$ ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt daher, wie die Gleichungen (3) zeigen, auf der Gegenachse des Systems xy.

Wir werden zwei ebene collineare Systeme im Raume collinear-liegend nennen, wenn die Verbindungslinien der homologen Punkte sich in einem und demselben Punkte treffen. Dieser Punkt soll der Collineationspunkt der ebenen Systeme im Raume heißen. Zwei ebene Systeme haben also, wenn sie als Figuren im Raume betrachtet werden, unendlich viele Collineationspunkte *).

Setzen wir in den Gleichungen (6) $\vartheta = 0$, so ist $\beta = b - a$ und $\gamma = 0$; setzen wir aber $\vartheta = \pi$, so ist $\beta = -(a + b)$ und $\gamma = 0$, und diese Abscissen $\beta = b - a$ und $\beta = -(b + a)$ gehören denjenigen Punkten an, in welchen der Kreis (7) die Ebene der xy schneidet. Da nun sowohl für $\vartheta = 0$ als für $\vartheta = \pi$ beide collineare Ebenen auf einander liegen, so giebt es für ebene Systeme allerdings zwei in ihren Ebenen liegende Collineationspunkte, indessen können in einer Ebene liegende Systeme nicht so gelegt werden, daß sich die Verbindungslinien homologer Punkte in dem zweiten Collineationspunkte begegnen, ohne daß eins der beiden Systeme aus der gemeinschaftlichen Ebene herausgenommen und umgewendet wird.

Wenn für eine bestimmte Lage zweier collinear-liegenden, ebenen Systeme der Collineationspunkt im Raume gegeben ist, so können wir, wie leicht einzusehen, die in den Ebenen dieser Systeme liegenden Collineationspunkte und die Gegenachsen auf folgende Weise bestimmen. Wir halbiren die Neigungswinkel der beiden sich in einer Collineationsachse schneidenden Ebenen durch zwei Ebenen, fällen von dem Collineationspunkt im Raume zwei Senkrechte auf diese Halbirungsebenen, dann sind die Durchschnittspunkte dieser (verlängerten) Perpendikel und der gegebenen Ebenen die Collinea-

*) Da zwei ebene Vierecke immer als collineare Figuren betrachtet werden können, so folgt, daß zwei beliebige ebene Vierecke sich auf unzählig verschiedene Arten im Raume so legen lassen, daß die Verbindungslinien von je zwei Eckpunkten sich in einem und demselben Punkte schneiden.

lineationspunkte der letzteren. Wir legen durch den Collineationspunkt im Raume zwei Ebenen, welche den gegebenen parallel laufen; dann sind die Durchschnittslinien dieser Parallelebenen mit jenen gegebenen die Gegenachsen der letzteren. Daß wir bei derselben Lage der beiden ebenen Systeme zu jedem Punkte des einen Systems seinen homologen dadurch finden können, daß wir ihn mit dem Collineationspunkte verbinden, und wenn es nöthig ist, diese Verbindungslinie bis zur Ebene des anderen Systems verlängern, versteht sich jetzt von selbst. §. 16.

§. 17.

In zwei räumlichen collinear-verwandten Systemen S, S′, bilden jede zwei einander entsprechende Ebenen e, e′, für sich betrachtet, zwei Systeme von Punkten, welche im Allgemeinen in der Verwandtschaft der Collineation stehen. Die Gegenachse des Systems e, d. i. diejenige Gerade, welche die Punkte enthält, die unendlich entfernten Punkten des Systems e′ entsprechen, ist die Durchschnittslinie dieser Ebene e und der Gegenebene des Systems S (§. 15). Auf gleiche Weise ist die Gegenachse des Systems e′ die Durchschnittslinie der Ebene e′ und der Gegenebene des Systems S′.

Ist eine der beiden Ebenen, e, der Gegenebene in dem Systeme S parallel, so ist auch die entsprechende Ebene e′ der Gegenebene in dem Systeme S′ parallel, und dann stehen die beiden ebenen Systeme e und e′ im Allgemeinen in der näheren Verwandtschaft der Affinität.

Zwei räumliche collinear-verwandte Systeme lassen sich im Allgemeinen nicht in eine solche Lage bringen, daß alle Verbindungslinien von je zwei homologen Punkten durch einen und denselben Punkt gehen. Dies ist vielmehr nur dann der Fall, wenn je zwei einander entsprechende Ebenen e, e′, die den Gegenebenen parallel sind, nicht blos affine, sondern ähnliche ebene Systeme bilden. Zwei räumliche collinear-verwandte Systeme, welche diese Beschaffenheit haben, wollen wir centrisch-collinear nennen, und wenn sie in die angegebene Lage gebracht sind, sollen sie collinear-liegend heißen. Den Durchschnittspunkt der Verbindungslinien von je zwei homologen Punkten nennen wir Collineationspunkt oder Collineationscentrum.

Beziehen wir zwei centrisch-collineare und collinear-liegende Systeme auf ein und dasselbe rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der gemeinschaftliche Collineationspunkt ist, so wird eine, durch den Collineationspunkt und durch einen Punkt t′u′v′ gehende Gerade durch die Gleichungen

§. 17

$$\frac{t}{v} = \frac{t'}{v'} \; ; \; \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$$

ausgedrückt werden. Da aber diese Gerade den homologen Punkt $x'y'z'$ enthalten muß, so haben wir auch, indem wir x', y', z' für die laufenden Coordinaten t, u, v setzen,

$$\frac{x'}{z'} = \frac{t'}{v'} \; ; \; \frac{y'}{z'} = \frac{u'}{v'} \; .$$

Lassen wir die jetzt nicht mehr nöthigen Accente in diesen Gleichungen fort, und setzen dann für t, u, v die Ausdrücke (1) des §. 15, so haben wir

$$\frac{x}{z} = \frac{m'z + n'y + p'x + q'}{m'''z + n'''y + p'''x + q'''} \; ; \; \frac{y}{z} = \frac{m''z + n''y + p''x + q''}{m'''z + n'''y + p'''x + q'''} \; ,$$

zwei Gleichungen, welche nur dann von jedem Werthe von x, y u. z befriedigt werden, wenn

$$m' = 0 \, ; \; n' = 0 \, ; \; q' = 0 \, ; \; m'' = 0 \, ; \; p'' = 0 \, ; \; q'' = 0 \, ; \; n''' = 0 \, ; \; p''' = 0 \, ; \; q''' = 0 \, ;$$
$$p' = n'' = m'''$$

ist. Daher sind centrisch-collineare und collinear-liegende Systeme im Raume, wenn beide auf ein und dasselbe Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Collineationspunkte liegt, bezogen werden, durch die Gleichungen

$$v = \frac{kz}{mz + ny + px + 1} \; ; \; u = \frac{ky}{mz + ny + px + 1} \; ; \; t = \frac{kx}{mz + ny + px + 1} \quad (1)$$

mit einander verbunden.

In centrisch-collinearen und collinear-liegenden Systemen liegen je zwei homologe Ebenen, welche durch den Collineationspunkt gehen, auf einander. Denn ist

$$av + bu + ct = 0$$

die Gleichung irgend einer solchen Ebene in dem einen Systeme, so erhalten wir durch Substitution der Ausdrücke (1)

$$az + by + cx = 0$$

als Gleichung der entsprechenden Ebene, welche, wie wir sehen, mit jener zusammenfällt. Da nun je zwei durch den Collineationspunkt gehende, homologe Ebenen auf einander liegen, und homologe Ebenen sich in homologen Geraden schneiden, so liegen auch je zwei durch den Collineationspunkt gehende, homologe Gerade auf einander.

Da für $x = y = z = 0$ auch $t = u = v = 0$ ist, so liegen im Anfangspunkte der Coordinaten zwei homologe Punkte auf einander. Alle diejenigen homologen Punkte zweier collinear-liegenden Systeme, welche auf

einander liegen, finden wir, indem wir $t = x$, $u = y$ und $v = z$ setzen, §. 17.
wodurch wir, aus den Gleichungen (1),

$$(mz+ny+px+1)z = kz \; ; \; (mz+ny+px+1)y = ky \; ; \; (mz+ny+px+1)x = kx$$

erhalten. Diese Gleichungen werden befriedigt, wenn entweder zu gleicher Zeit $x = 0$, $y = 0$, und $z = 0$; oder wenn nur

$$mz + ny + px + 1 - k = 0 \qquad (2)$$

ist; und hieraus sehen wir, daß, außer den Collineationspunkten, alle Punkte der durch die Gleichung (2) ausgedrückten Ebene auf ihren homologen Punkten liegen. Diese Ebene (2) wollen wir die Collineationsebene nennen. Je zwei homologe Gerade und je zwei homologe Ebenen schneiden sich, wie leicht einzusehen, auf dieser Collineationsebene.

Zweien parallelen Ebenen des einen Systems entsprechen in dem collinear-liegenden Systeme zwei Ebenen, die im Allgemeinen nicht parallel sind. Denn es seyen

$$av + bu + ct + d = 0 \; ; \; av + bu + ct + d' = 0$$

die Gleichungen der zuerst genannten parallelen Ebenen, so erhalten wir durch Substitution der Ausdrücke (1)

$$k(az+by+cx)+d(mz+ny+px+1) = 0 \; ; \; k(az+by+cx)+d'(mz+ny+px+1) = 0$$

als Gleichungen der homologen Ebenen, und diese sind, wie man sieht, im Allgemeinen einander nicht parallel (eine Ausnahme macht der Fall, in welchem $a : b : c = m : n : p$ ist), vielmehr schneiden sie sich in einer Geraden, und zwar in derjenigen, in welcher sich die durch die Gleichungen

$$az + by + cx = 0 \;\; ; \;\; mz + ny + px + 1 = 0$$

ausgedrückten Ebenen schneiden, weil die Werthe von x, y, z, welche diesen Gleichungen genug thun, auch jene Gleichungen befriedigen. Die letzte dieser Gleichungen ist diejenige der Gegenebene des Systems xyz, welche, wie wir sehen, der Collinationsebene (2) parallel ist. Die erste der beiden vorher angegebenen Gleichungen, $az + by + cx = 0$, ist diejenige einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. i. durch das Collineationscentrum geht, und welche den beiden parallelen Ebenen im Systeme tuv parallel ist.

Aufgabe [39]. Es sind von zwei centrisch-collinearen und collinear-liegenden Systemen im Raume, das eine derselben, der gemeinschaftliche Collineationspunkt, die Collineationsebene und die Gegenebene des anderen Systems gegeben; es soll zu jedem Punkt des gegebenen Sy-

6*

§. 17. stems der homologe Punkt des anderen Systems durch Construction bestimmt werden.

Nehmen wir an, daß durch den Collineationspunkt C und durch den gegebenen Punkt P des ersten Systems irgend eine Ebene gelegt werde, so wird die entsprechende Ebene mit dieser Ebene zusammenfallen, wie oben gezeigt worden. Diese beiden auf einander liegenden Ebenen, für sich betrachtet, bilden zwei ebene collineare und collinear-liegende Systeme, so wie wir sie in der Aufgabe (21) des §. 13. I. betrachtet haben; ihre Collineationsachse liegt in dem Durchschnitte, welchen sie mit der Collineationsebene bilden, und ihre Gegenachse in demjenigen, den sie mit der Gegenebene machen. Der verlangte, dem Punkte P entsprechende, Punkt Π, welcher in der Ebene der beiden ebenen Systeme liegt, kann daher nach der genannten Aufgabe (21) des §. 13. I. gefunden werden, und die geforderte Construction reducirt sich demnach auf das Folgende.

„Man verbinde den Collineationspunkt C mit dem gegebenen Punkte P durch eine Gerade CP, ziehe durch P irgend eine Gerade, welche die Collineationsebene in einem Punkte A schneiden wird, und dieser Geraden durch C eine Parallele, welche die Gegenebene in einem Punkte B treffen wird, man verbinde die Punkte A und B durch die Gerade AB; so wird diese Gerade AB die Gerade CP schneiden, und der Durchschnittspunkt Π ist der verlangte Punkt *)."

Wenn, in den Formeln (1), $k = 1$ ist, geht die Gleichung der Collineationsebene in

$$mz + ny + px = 0$$

über, und dann enthält diese Ebene den Collineationspunkt.

Wenn aber $k = -1$ ist, also wenn

$$v = -\frac{z}{mz+ny+px+1}\,;\; u = -\frac{y}{mz+ny+px+1}\,;\; t = -\frac{x}{mz+ny+px+1}\,,$$

und demzufolge

$$z = -\frac{v}{mv+nu+pt+1}\,;\; y = -\frac{u}{mv+nu+pt+1}\,;\; x = -\frac{t}{mv+nu+pt+1}\,,$$

*) Von zwei centrisch-collinearen Systemen im Raume ist das eine diejenige Abbildung des anderen, welche in der Sculptur Relief genannt wird. Der Collineationspunkt heißt darin Augenpunkt, die Collineationsebene und die Gegenebene aber werden Bildfläche und Hauptfläche genannt. In der obigen Aufgabe ist die Construction eines Reliefs enthalten.

so ist die Gleichung der Collineationsebene §. 17.

$$mz + ny + px + 2 = 0 \quad .$$

Sind α, β, γ die Coordinaten eines Punktes im Systeme xyz, so sind in diesem Falle die Coordinaten des homologen Punktes im Systeme tuv

$$v = -\frac{\gamma}{m\gamma+n\beta+p\alpha+1} ; \; u = -\frac{\beta}{m\gamma+n\beta+p\alpha+1} ; \; t = -\frac{\alpha}{m\gamma+n\beta+p\alpha+1} ;$$

und sind α, β, γ die Coordinaten eines Punktes im Systeme tuv, so sind die Coordinaten des homologen Punktes im Systeme xyz

$$z = -\frac{\gamma}{m\gamma+n\beta+p\alpha+1} ; \; y = -\frac{\beta}{m\gamma+n\beta+p\alpha+1} ; \; x = -\frac{\alpha}{m\gamma+n\beta+p\alpha+1} .$$

Da nun die Ausdrücke für v u. z, u u. y, t u. x dieselben sind, so folgt, daß wir, im Falle $k = -1$, beliebig viele Punkte des einen Systems mit ihren homologen Punkten im anderen Systeme vertauschen können. Sind demnach P und P′, Q und Q′ zwei Paar homologe Punkte zweier centrisch-collinearen und collinear-liegenden Systeme, für welche $k = -1$ ist, so werden nicht nur die Geraden PQ und P′Q′, als homologe Linien, sich auf der Collineationsebene schneiden, sondern es werden auch die Geraden PQ′ und P′Q sich auf derselben Ebene treffen. Ist R u. R′ ein drittes Paar homologer Punkte in denselben Systemen, so werden nicht nur die Durchschnittslinien der Ebenen PQR und P′Q′R′, sondern es werden auch die Durchschnittslinien der Ebenen PQ′R und P′QR′, PQR′ und P′Q′R, P′QR u. PQ′R′ auf der Collineationsebene liegen. In demselben Falle, nämlich wenn $k = -1$ ist, coincidiren die Gegenebenen beider Systeme; denn die Gleichung der einen ist $mz + ny + px + 1 = 0$ und die der anderen $mv + nu + pt + 1 = 0$.

§. 18.

Die vier Constanten m, n, p, k, welche in den Gleichungen (1) des vorigen §. vorkommen, können bestimmt werden, wenn der Collineationspunkt der beiden centrisch-collinearen und collinear-liegenden Systeme und vier Paar homologer Punkte aus denselben bekannt sind. Denn setzt man die Coordinaten dieser vier Paar homologer Punkte nach einander in jene drei Gleichungen, so erhält man vier mal drei also zwölf Gleichungen; weil aber jedes Paar homologer Punkte x′y′z′, t′u′v′ mit dem zum Anfangspunkte genommenen Collineationspunkt in gerader Linie liegt, wird, wie im vorigen §. bemerkt worden, $\frac{x'}{z'} = \frac{t'}{v'}$ und $\frac{y'}{z'} = \frac{u'}{v'}$ seyn, und diejenigen Werthe

§. 18.

von m, n, p, k, welche der Gleichung $v' = \frac{kz'}{mz'+ny'+px'+1}$ genugthun, werden auch die Gleichungen $u' = \frac{ky'}{mz'+ny'+px'+1}$ und $t' = \frac{kx'}{mz'+ny'+px'+1}$ befriedigen, da diese Gleichungen aus jener entstehen, wenn man den ersten Theil jener Gleichung nach einander mit $\frac{u'}{v'}$ und $\frac{t'}{v'}$, den zweiten Theil aber mit $\frac{y'}{z'}$ und $\frac{x'}{z'}$ multiplicirt. Die drei Gleichungen, welche ein jedes der vier gegebenen Punkten-Paare liefert, drücken also nur eine Bedingung aus, und sämmtliche zwölf Gleichungen reduciren sich daher auf vier Gleichungen, welche in Beziehung auf die Größen m, n, p, k vom ersten Grade sind, und im Allgemeinen hinreichen, diese vier Größen zu bestimmen.

Zwei Tetraeder ABCD, A'B'C'D' können folglich immer als centrisch-collineare und collinear-liegende Körper angesehen werden, wenn die Verbindungslinien AA', BB', CC', DD' in einem Punkte O zusammen treffen. Die Ebenen ABC, ABD, ACD, BCD entsprechen alsdann respective den Ebenen A'B'C', A'B'D', A'C'D', B'C'D', und je zwei dieser homologen Ebenen schneiden sich auf der Collineationsebene. Daraus ergiebt sich der

Lehrsatz [5]. Wenn die vier (verlängerten) Verbindungslinien der Eckpunkte zweier Tetraeder sich in einem und demselben Punkte treffen, so liegen die Durchschnittslinien der diesen Eckpunkten gegenüberliegenden (erweiterten) Seitenebenen in einer und derselben Ebene.

Es können aber auch irgend zwei Pyramiden immer als centrisch-collineare und collinear-liegende Körper angesehen werden, wenn die Verbindungslinie ihrer Scheitel mit den Verbindungslinien der Eckpunkte ihrer Grundflächen in einem und demselben Punkte zusammen trifft. Denn nimmt man die beiden Scheitel und drei Paar Eckpunkte als einander entsprechend an, so werden die vier Constanten m, n, p, k dadurch bestimmt, und die beiden Grundflächen werden einander entsprechen; dann werden aber auch je zwei Punkte, welche auf diesen homologen Ebenen liegen, und deren Verbindungslinie durch den Collineationspunkt gehet, einander entsprechen, d. i. die übrigen Eckpunkte der Grundfläche werden homologe Punkte seyn; und deshalb werden endlich auch alle Seitenebenen der Pyramiden einander entsprechen. Hieraus ergiebt sich der allgemeinere

Lehrsatz [6]. Wenn die Verbindungslinie der beiden Scheitel zweier Pyramiden von den Verbindungslinien der Eckpunkte ihrer Grundflächen in einem und demselben Punkte getroffen wird, so liegen die Durchschnittslinien der Seitenebenen mit der Durchschnittslinie der Grundflächen in einer und derselben Ebene. §. 18.

§. 19.

Wenn, in den Gleichungen (1) des §. 15, $m = n = p = 0$ ist, so haben wir

$$v = m'''z + n'''y + p'''x + q''' ; \; u = m''z + n''y + p''x + q'' ; \; t = m'z + n'y + p'x + q'. \quad (1)$$

Die besondere Art der Collineationsverwandtschaft zweier Systeme, welche durch diese Gleichungen ausgedrückt wird, heißt Affinität.

Um die zwölf Constanten, welche in diesen Gleichungen (1) vorkommen, zu bestimmen, ist es hinreichend, wenn vier Punkte des einen Systems und die vier homologen Punkte des affinen Systems bekannt sind.

Ein drittes System, dessen Coordinaten x', y', z' seyn mögen, wird dem Systeme tuv ebenfalls affin seyn, wenn

$$v = g'''z' + h'''y' + k'''x' + i''' ; \; u = g''z' + h''y' + k''x' + i'' ; \; t = g'z' + h'y' + k'x' + i'$$

ist. Eliminiren wir t, u, v zwischen diesen Gleichungen und den Gleichungen (1) und entwickeln x', y', z', so ergeben sich für diese Größen Ausdrücke in x, y u. z von linearer Form; woraus denn folgt, daß zwei Systeme, die einem dritten affin sind, selbst in der Verwandtschaft der Affinität stehen.

Geben wir den Zeichen A, A', A_1, A_2, A'_1, A'_2, a_1, a_2, α_1, α_2, μ_3 μ'_3 dieselbe Bedeutung wie im §. 15, so haben wir für affine Systeme, unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten,

$$A_1 = A'_1 \; ; \; A_2 = A'_2$$

und

$$a_1 = \frac{A_1}{\mu_3} \; ; \; a_2 = \frac{A_2}{\mu_3} \; ; \; \alpha_1 = \frac{A'_1}{\mu'_3} \; ; \; \alpha_2 = \frac{A'_2}{\mu'_3} \; .$$

Aus diesen sechs Gleichungen ergiebt sich

$$a_1 : a_2 = \alpha_1 : \alpha_2 \; ,$$

und da, wie wir im §. 15. gesehen haben, $A = 0$ und $A' = 0$ jede zwei homologe Ebenen und a_1, a_2, α_1, α_2 die Perpendikel bezeichnen, welche von zwei Paar homologen Punkten auf diese Ebenen gefällt sind, so enthält die letzte Gleichung den

§ 19. **Lehrsatz [7]. Wenn man von zwei beliebigen Punkten A, B auf irgend eine Ebene a Senkrechte fälle, deren Länge durch Aa, Ba bezeichnet, und wenn man in einem affinen Systeme von den homologen Punkten A′, B′ auf die homologe Ebene a′ die Perpendikel A′a′, B′b′ herabläßt, so ist**

$$Aa : Ba = A'a' : B'a' \quad .$$

Sind daher A, B, C, D, E fünf Punkte des einen Systems und A′, B′, C′, D′, E′ die fünf homologen Punkte eines affinen Systems, so findet zwischen den Tetraedern ABCD, A′B′C′D′ und ABCE, A′B′C′E′ folgende Proportion

$$ABCD : A'B'C'D' = ABCE : A'B'C'E'$$

Statt. Auch ist leicht einzusehen, daß nicht nur zwei Tetraeder, welche eine Seitenebene gemein haben, sondern je zwei Tetraeder, und folglich auch je zwei körperliche Räume in dem einen Systeme sich eben so zu einander verhalten als die entsprechenden Räume in dem affinen Systeme.

Aus dem letzten Lehrsatze ergiebt sich ferner, daß auch je zwei parallele gerade Linien, welche von zwei Punkten A, B an eine Ebene a gezogen werden, sich eben so zu einander verhalten, wie zwei parallele Gerade in einem affinen Systeme, die von den beiden homologen Punkten A′, B′ an die homologe Ebene a′ gezogen sind. Sind nun A, B, C drei in gerader Linie liegende Punkte eines Systems und A′, B′, C′ die drei homologen Punkte eines affinen Systems, welche folglich ebenfalls in gerader Linie liegen, und legen wir durch den Punkt C irgend eine Ebene a, so wird ihr im affinen Systeme eine Ebene a′ entsprechen, welche durch den Punkt C′ geht; es werden also AC, BC als zwei gleichlaufende Gerade, welche von den Punkten A und B an die Ebene a gezogen, und A′C′, B′C′ als zwei gleichlaufende Gerade, welche von den Punkten A′, B′ an die Ebene a′ gezogen sind, angesehen werden können; wir haben daher den

Lehrsatz [8]. Sind A, B, C und A′, B′, C′ drei homologe, in gerader Linie liegende Punkte zweier affinen Systeme, so ist

$$AC : BC = A'C' : B'C' \quad .$$

In zwei affinen Systemen sind die Ebenen des einen Systems, welche parallelen Ebenen des andern entsprechen, selbst parallel. Denn sind

$$av + bu + ct + d = 0 \quad ; \quad av + bu + ct + d' = 0$$

die Gleichungen zweier parallelen Ebenen in dem einen Systeme, so sind die Gleichungen der ihnen entsprechenden Ebenen in dem affinen Systeme

$$(am'''+bm''+cm')z+(an'''+bn''+cn')y+(ap'''+bp''+cp')x+(aq'''+bq''+cq'+d)=0,$$
$$(am'''+bm''+cm')z+(an'''+bn''+cn')y+(ap'''+bp''+cp')x+(aq'''+bq''+cq'+d')=0,$$

in welchen die Coefficienten von x, y u. z dieselben sind. Da sich nun homologe Ebenen in homologen Geraden schneiden, so folgt hieraus zugleich, daß in affinen Systemen die homologen Linien paralleler Geraden auch parallel sind.

§. 20.

In zwei affinen Systemen werden, wie im vorigen §. gezeigt ist, homologe Gerade durch homologe Punkte in gleichem Verhältnisse getheilt. Findet die Gleichheit der Verhältnisse auch bei solchen Abschnitten Statt, welche nicht Theile einer und derselben Geraden sind, so heißen die affinen Systeme ähnlich.

Weil jedem Dreiecke in dem einen Systeme ein Dreieck in dem anderen Systeme entspricht und die Seiten dieser Dreiecke, wenn die Systeme ähnlich sind, in demselben Verhältnisse stehen, weil ferner parallelen Geraden parallele Gerade entsprechen, so folgt, daß je zwei Gerade eines Systems, sie mögen sich schneiden oder nicht, denselben Winkel bilden, als die beiden homologen Geraden in einem ähnlichen Systeme; woraus denn weiter folgt, daß je zwei Ebenen eines Systems denselben Neigungswinkel bilden, als die homologen Ebenen in einem ähnlichen Systeme.

Für zwei ähnliche Systeme finden zwischen den Coefficienten m', n', p', m'', 2c., gewisse Relationen Statt, die auf folgende Weise gefunden werden können.

Es seyen x', y', z' und t', u', v'; x'', y'', z'' und t'', u'', v'' die Coordinaten von zwei Paar homologer Punkte A u. A′, B u. B′; ferner sey k der willkürliche aber constante Exponent des schon erwähnten Verhältnisses. Wenn nun die Coordinatenwinkel beider Systeme respective durch $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ und $\hat{t}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$ bezeichnet werden, so ist (§. 2. F. 3)

$$\overline{AB}^2 = \begin{cases}(z''-z')^2+(y''-y')^2+(x''-x')^2+2(y''-y')(z''-z')\cos\hat{x}\\ +2(x''-x')(z''-z')\cos\hat{y}+2(x''-x')(y''-y')\cos\hat{z}\end{cases}$$

$$\overline{A'B'}^2 = \begin{cases}(v''-v')^2+(u''-u')^2+(t''-t')^2+2(u''-u')(v''-v')\cos\hat{t}\\ +2(t''-t')(v''-v')\cos\hat{u}+2(t''-t')(u''-u')\cos\hat{v}\end{cases}$$

und durch Substitution der Ausdrücke (1) des vorigen §.

§. 20.

$$\overline{A'B'}^2 = \left\{\begin{aligned}
&[m'''^2+m''^2+m'^2+2m'''m''\cos\hat{t}+2m'''m'\cos\hat{u}+2m''m'\cos\hat{v}](z''-z')^2\\
&+[n'''^2+n''^2+n'^2+2n'''n''\cos\hat{t}+2n'''n'\cos\hat{u}+2n''n'\cos\hat{v}](y''-y')^2\\
&+[p'''^2+p''^2+p'^2+2p'''p''\cos\hat{t}+2p'''p'\cos\hat{u}+2p''p'\cos\hat{v}](x''-x')^2\\
&+2\left\{\begin{matrix}m'''n'''+m''n''+m'n'+(m'''n''+m''n''')\cos\hat{t}\\ +(m'''n'+m'n''')\cos\hat{u}+(m''n'+m'n'')\cos\hat{v}\end{matrix}\right\}\cdot(y''-y')(z''-z')\\
&+2\left\{\begin{matrix}m'''p'''+m''p''+m'p'+(m'''p''+m''p''')\cos\hat{t}\\ +(m'''p'+m'p''')\cos\hat{u}+(m''p'+m'p'')\cos\hat{v}\end{matrix}\right\}\cdot(x''-x')(z''-z')\\
&+2\left\{\begin{matrix}n'''p'''+n''p''+n'p'+(n'''p''+n''p''')\cos\hat{t}\\ +(n'''p'+n'p''')\cos\hat{u}+(n''p'+n'p'')\cos\hat{v}\end{matrix}\right\}\cdot(x''-x')(y''-y')
\end{aligned}\right.$$

Da aber $\overline{A'B'}^2 = k^2 \cdot \overline{AB}^2$, und zwar für jede Werthe von x', y', z' und von x'', y'', z'', seyn soll, so muß

$$\begin{aligned}
m'''^2+m''^2+m'^2+2m'''m''\cos\hat{t}+2m'''m'\cos\hat{u}+2m''m'\cos\hat{v} &= k^2\ ,\\
n'''^2+n''^2+n'^2+2n'''n''\cos\hat{t}+2n'''n'\cos\hat{u}+2n''n'\cos\hat{v} &= k^2\ ,\\
p'''^2+p''^2+p'^2+2p'''p''\cos\hat{t}+2p'''p'\cos\hat{u}+2p''p'\cos\hat{v} &= k^2\ ,\\
m'''n'''+m''n''+m'n'+(m'''n''+m''n''')\cos\hat{t}+(m'''n'+m'n''')\cos\hat{u}+(m''n'+m'n'')\cos\hat{v} &= k^2\cos\hat{x}\ ,\\
m'''p'''+m''p''+m'p'+(m'''p''+m''p''')\cos\hat{t}+(m'''p'+m'p''')\cos\hat{u}+(m''p'+m'p'')\cos\hat{v} &= k^2\cos\hat{y}\ ,\\
n'''p'''+n''p''+n'p'+(n'''p''+n''p''')\cos\hat{t}+(n'''p'+n'p''')\cos\hat{u}+(n''p'+n'p'')\cos\hat{v} &= k^2\cos\hat{z}\ .
\end{aligned}$$

Eliminiren wir k zwischen diesen sechs Gleichungen, so erhalten wir fünf Bedingungsgleichungen, welche die genannten Relationen zwischen den Coefficienten m', n', p', m'' rc. ausdrücken. Sind beide Systeme auf rechtwinklige Achsen bezogen, so finden wir die folgenden Bedingungsgleichungen oder Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
m'''^2+m''^2+m'^2 = n'''^2+n''^2+n'^2 = p'''^2+p''^2+p'^2\ ;\\
m'''n'''+m''n''+m'n' = 0\ ;\ m'''p'''+m''p''+m'p' = 0\ ;\ n'''p'''+n''p''+n'p' = 0.
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Von den neun Größen, welche in diesen Gleichungen vorkommen, lassen sich also (wenn k unbestimmt ist) beliebige fünf durch die vier übrigen ausdrücken.

Wie auch zwei ähnliche Systeme liegen mögen, so liegt im Allgemeinen immer ein gewisser Punkt auf seinem homologen. Denn wenn wir annehmen, daß die Gleichungen (1) des vorigen §. sich auf dasselbe Coordinatensystem beziehen, und nun $t = x$, $u = y$ und $v = z$ setzen, so erhalten wir drei Gleichungen, welche in Beziehung auf x, y und z vom ersten Grade sind, und welche daher für diese Größen einfache reelle Werthe geben, die auch endlich sind, wenn k^2 einen von der Einheit verschiedenen Werth hat, was wir weiter unten zeigen werden. Dieser Punkt, den wir den Situationspunkt der beiden ähnlichen Systeme

nennen, hat die merkwürdige Eigenschaft, daß, wenn man von ihm nach einem Punkte des einen Systems und nach dem homologen Punkte des ähnlichen Systems gerade Linien zieht, diese Geraden immer in demselben constanten Verhältnisse stehen, wo auch der erste der beiden homologen Punkte angenommen werden mag; denn, da der Situationspunkt als sich selbst entsprechend anzusehen ist, so sind die genannten Linien homologe Gerade, die von homologen Punkten begrenzt werden. §. 20.

Nehmen wir den Situationspunkt zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, auf welches wir beide Systeme beziehen, so verschwinden, da nun für $x = y = z = 0$ auch $t = u = v = 0$ ist, die constanten Glieder q''', q'', q' in den Gleichungen (1) des vor. §., so daß die Beziehungsgleichungen der beiden ähnlichen Systeme

$$v = m'''z + n'''y + p'''x \;\; ; \;\; u = m''z + n''y + p''x \;\; ; \;\; t = m'z + n'y + p'x \quad (2)$$

sind, bei welchen aber noch zwischen den neun Coefficienten die Gleichungen (1) Statt haben.

Einer Ebene des einen Systems, welche durch den Situationspunkt, den jetzigen Anfangspunkt der Coordinaten, gehet, entspricht eine Ebene im ähnlichen Systeme, welche ebenfalls den Situationspunkt enthält. Ist

$$cv + bu + at = 0 \quad (3)$$

die Gleichung der zuerst genannten Ebene, so ist

$$(cm''' + bm'' + am')z + (cn''' + bn'' + an')y + (cp''' + bp'' + ap')x = 0 \quad (4)$$

die Gleichung der zuletzt genannten. Sollen diese Ebenen (3) und (4) auf einander liegen, so müssen a, b, c solche Werthe haben, daß die Gleichungen (3) u. (4), nachdem wir die eine derselben mit einem noch zu bestimmenden Factor λ multiplicirt haben, identisch sind, woraus wir

$$cm''' + bm'' + am' = \lambda c \;\; ; \;\; cn''' + bn'' + an' = \lambda b \;\; ; \;\; cp''' + bp'' + ap' = \lambda a \quad (5)$$

erhalten. Eliminiren wir a und b zwischen diesen Gleichungen (5), so gehet c von selbst fort, und wir finden

$$\lambda^3 - (m''' + n'' + p')\lambda^2 + \left\{ \begin{matrix} (n''p' - n'p'') \\ +(m'''n'' - m''n''') \\ +(m'''p' - m'p''') \end{matrix} \right\} \lambda - \left\{ \begin{matrix} m'''(n''p' - n'p'') \\ +m''(n'p''' - n'''p') \\ +m'(n'''p'' - n''p''') \end{matrix} \right\} = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichung hat, da sie vom dritten Grade ist, wenigstens eine reelle Wurzel, und wenn wir diesen reellen Werth von λ in beliebige zwei von den Gleichungen (5) setzen, so erhalten wir zwei Gleichungen, welche in Beziehung auf die Quotienten $\frac{b}{c}$ und $\frac{a}{c}$ vom ersten Grade sind, und also für

§. 20. diese Größen reelle Werthe geben. Hieraus folgt, daß es bei jeder Lage zweier ähnlichen Systeme immer eine Ebene (3) giebt, welche mit ihrer homologen Ebene (4) zusammenfällt. Um zu wissen, ob es außer dieser Ebene noch zwei andere oder mehrere andere Ebenen gebe, welche mit ihren homologen Ebenen zusammen fallen, müßten wir entscheiden, ob die Gleichung (6) noch zwei andere reelle Wurzeln habe, und ob überhaupt die drei Gleichungen (5) die Verhältnisse der Größen a, b, c vollkommen bestimmen oder ob in gewissen Fällen diese Gleichungen nicht unabhängig von einander sind. Da aber die Coefficienten der Gleichung (6) aus neun Größen zusammen gesetzt sind, welche wiederum durch die Gleichungen (1) mit einander verbunden sind, so verfahren wir bei dieser Untersuchung vorläufig wie folgt.

Wir nehmen die eine Ebene, welche mit ihrer homologen coincidirt, und deren Existenz wir so eben nachgewiesen haben, zur Ebene der xy und der tu in dem rechtwinkligen Coordinatensysteme, auf welches wir beide Systeme beziehen. Da jetzt für $z = 0$ auch $v = 0$ ist, welche Werthe x und y auch haben mögen, so müssen in der ersten Gleichung (2) n''' und p''' gleich Null seyn. Setzen wir nun in die Gleichungen (1) $n''' = 0$ und $p''' = 0$, so ergiebt sich zunächst aus den drei letzten derselben, daß auch $m'' = 0$ und $m' = 0$ ist. Die Gleichungen (2) reduciren sich daher auf

$$v = m'''z \quad ; \quad u = n''y + p''x \quad ; \quad t = n'y + p'x \; , \qquad (7)$$

und die Relationen (1) ziehen sich in

$$n''^2 + n'^2 = m'''^2 \quad ; \quad p''^2 + p'^2 = m'''^2 \quad ; \quad n''p'' + n'p' = 0$$

zusammen. Setzen wir jetzt, um auch dieser drei Bedingungsgleichungen zwischen den fünf Größen m''', n'', n', p'', p' nicht mehr zu bedürfen,

$$m''' = k \quad ; \quad n'' = k\cos\beta \quad ; \quad p'' = k\sin\beta \; ,$$

so ergiebt sich eben aus diesen Bedingungsgleichungen, daß wir entweder $n' = -k\sin\beta$ und $p' = +k\cos\beta$, oder daß wir $n' = +k\sin\beta$ und $p' = -k\cos\beta$ setzen müssen.

Die Beziehungsgleichungen (2) sind daher, bei der gegenwärtigen Lage der Coordinatenachsen, entweder

$$v = kz \; ; \; u = k\cos\beta \cdot y + k\sin\beta \cdot x \; ; \; t = -k\sin\beta \cdot y + k\cos\beta \cdot x \; ; \quad (8)$$

oder

$$v = kz \; ; \; u = k\cos\beta \cdot y + k\sin\beta \cdot x \; ; \; t = +k\sin\beta \cdot y - k\cos\beta \cdot x \; . \quad (9)$$

Setzen wir $x = 0$ und $y = 0$, so ist auch $t = 0$ und $u = 0$; es entspricht also die Achse der z der Achse der v, und da diese beiden Achsen auf einander liegen, so folgt, daß nicht allein bei jeder Lage zweier ähnlichen

Systeme eine durch den Situationspunkt gehende Ebene, sondern daß auch die auf dieser Ebene in dem Situationspunkt senkrecht stehende Gerade sich selbst entspricht, was, wie wir beiläufig bemerken wollen, eine unmittelbare Folge von der Gleichheit der einander entsprechenden Winkel ist. §. 20.

Wir betrachten nun zuerst den Fall, in welchem $n' = -k\sin\beta$, $p' = +k\cos\beta$ ist, und in welchem also die Gleichungen (8) Statt haben. Für diesen ersten Fall gehet unsere Gleichung (6) in

$$\lambda^3 - (1 + 2\cos\beta)k\lambda^2 + (1 + 2\cos\beta)k^2\lambda - k^3 = 0$$

über, und läßt sich in

$$(\lambda - k)(\lambda^2 - 2\cos\beta k\lambda + k^2) = 0$$

zerlegen, so daß λ nur den einen reellen Werth k hat (indem wir weder $\beta = 0$ noch $\beta = \pi$ annehmen, da wir diese ganz speciellen Fälle, in welchen sich die Gleichungen (8) auf $v = kz$, $u = \pm ky$, $t = \pm kx$ zurückziehen, hier nicht zu betrachten brauchen), für welchen Werth die beiden letzten Gleichungen (5) in

$$(\cos\beta - 1) \cdot b - \sin\beta \cdot a = 0 \quad ; \quad \sin\beta \cdot b + (\cos\beta - 1) \cdot a = 0 \quad ,$$

oder, was dasselbe ist, in

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta \cdot a + \sin\tfrac{1}{2}\beta \cdot b = 0 \quad ; \quad \cos\tfrac{1}{2}\beta \cdot a - \sin\tfrac{1}{2}\beta \cdot b = 0$$

übergehen, woraus $a = 0$ und $b = 0$ folgt, so daß die Gleichung (3) nun $z = 0$ ist. Es existirt demnach in diesem ersten Falle, im Allgemeinen, außer der zur Ebene der xy genommenen, keine andere Ebene, welche mit ihrer homologen Ebene zusammen fällt.

Betrachten wir nun den Fall, in welchem $n' = +k\sin\beta$, $p' = -k\cos\beta$ ist, und in welchem also die Gleichungen (9) Statt haben. Für diesen zweiten Fall gehet unsere Gleichung (6) in

$$\lambda^3 - k\lambda^2 - k^2\lambda + k^3 = 0$$

über, und läßt sich in

$$(\lambda - k)^2(\lambda + k) = 0$$

zerlegen, so daß λ die beiden reellen Werthe k und $-k$ hat.

Für $\lambda = k$ sind die zwei letzten Gleichungen (5) beide auf

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta \cdot a - \sin\tfrac{1}{2}\beta \cdot b = 0$$

reducirbar, und bestimmen also nicht die Größen a und b, sondern nur das Verhältniß derselben, nämlich $a = \tang\tfrac{1}{2}\beta \cdot b$.

Für $\lambda = -k$ sind die zwei letzten Gleichungen (5) beide auf

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta \cdot a + \cos\tfrac{1}{2}\beta \cdot b = 0$$

§. 20. reducirbar, und bestimmen also nicht die Größen a und b, sondern nur das Verhältniß derselben, nämlich $b = -tang\frac{1}{2}\beta \cdot a$. Da aber die erste der Gleichungen (5) sich auf $ck = c\lambda$ zurückzieht, so ist, wenn nicht $\lambda = k$, sondern $\lambda = -k$ genommen wird, nothwendigerweise $c = 0$.

Wenn nun erstens $\lambda = k$ und $a = tang\frac{1}{2}\beta \cdot b$ genommen wird, so giebt die Gleichung (3)

$$cv + b(u + tang\tfrac{1}{2}\beta \cdot t) = 0 \;; \qquad (10)$$

und wenn wir zweitens $\lambda = -k$, $c = 0$ und $b = -tang\frac{1}{2}\beta \cdot a$ nehmen, giebt die Gleichung (3)

$$tang\tfrac{1}{2}\beta \cdot u = t \;. \qquad (11)$$

Die Gleichung (10) drückt, da das Verhältniß $b : c$ beliebig angenommen werden kann, jede Ebene aus, welche die, durch den Situationspunkt gehende und durch die Gleichungen:

$$\left\{ \; v = 0 \;\; ; \;\; u + tang\tfrac{1}{2}\beta \cdot t = 0 \; \right\} \qquad (12)$$

angegebene Gerade enthält. Die Gleichung (11) aber gehört derjenigen Ebene an, welche auf derselben Geraden (12) im Situationspunkte senkrecht stehet.

Das Resultat unserer Untersuchung ist demnach Folgendes:

I. In dem Falle der Gleichungen (8) giebt es, außer der zur Ebene der xy genommenen, keine andere Ebene, welche mit ihrer homologen zusammen fällt.

II. In dem Falle der Gleichungen (9) giebt es unzählig viele Ebenen, welche mit ihren homologen zusammen fallen. Alle diese Ebenen, mit Ausnahme einer einzigen, schneiden sich in einer und derselben Geraden (12), welche den Situationspunkt enthält, und die einzige nicht darunter begriffene Ebene ist auf derselben Geraden (12) im Situationspunkte senkrecht.

In dem Falle I. nennen wir die gemeinschaftliche Achse der z und der v; in dem Falle II. aber die durch die Gleichungen (12) ausgedrückte Gerade die Situationsachse der beiden ähnlichen Systeme.

Bis hieher haben wir die gegenseitige Lage der beiden Systeme nicht geändert; jetzt wollen wir das eine System in seiner ursprünglichen Lage lassen, das andere aber um die Situationsachse drehen.

In dem Falle I. drehen wir das System xyz um die Achse der z, bis der Drehungswinkel gleich β ist; dies ist eben so viel, als wenn wir die Achsen der x und der y um den Winkel $-\beta$ dreheten, und sodann das Coordinatensystem der xyz und der tuv wieder zur Congruenz brächten. Die

Formeln (9) in (I. §. 3) auf die obigen Gleichungen (8) angewendet, geben uns nun auf der Stelle

$$v = kz \quad ; \quad u = ky \quad ; \quad t = kx \quad . \qquad (13)$$

In dem Falle II. drehen wir das System xyz um die Gerade (12) und zwar um zwei rechte Winkel. Damit wir aber nur wenige Substitutionen zu machen brauchen, wollen wir zuvor die eben genannte Gerade zur Achse der x und der t nehmen; dann gehen die Gleichungen (12) in

$$\left\{ v = 0 \quad ; \quad u = 0 \right\} \quad \text{oder} \quad \left\{ z = 0 \quad ; \quad y = 0 \right\}$$

über, so daß $tang \frac{1}{2}\beta = 0$, also $\beta = 0$, $cos \beta = 1$ und $sin \beta = 0$ wird, wodurch die Gleichungen (9) sich auf

$$v = kz \quad ; \quad u = ky \quad ; \quad t = -kx \qquad (14)$$

reduciren. Drehen wir nun das System xyz um die jetzige Achse der x, und zwar um zwei rechte Winkel, so haben wir die Transformationsformeln (22) des §. 13 (und zwar mit den oberen Vorzeichen) anzuwenden, in welchen, da der Drehungswinkel gleich π, $\vartheta = -\pi$ zu setzen ist, wodurch sie sich auf $x = x'$, $y = -y'$, $z = -z'$ reduciren; und die Gleichungen (14) verwandeln sich, wenn wir die Accente weglassen, in

$$v = -kz \quad ; \quad u = -ky \quad ; \quad t = -kx \quad . \qquad (15)$$

In beiden Fällen I. und II. haben wir also, nach der gehörigen Drehung um die Situationsachse,

$$\frac{u}{v} = \frac{y}{z} \quad ; \quad \frac{t}{v} = \frac{x}{z} \quad ;$$

woraus sich ergiebt, daß, nach dieser Drehung, je zwei homologe Punkte mit dem Situationspunkte in gerader Linie liegen. Wir bemerken hierbei noch, daß die Formeln (13) und (15) sich gegenseitig verwechseln, wenn k negativ ist, was wohl beachtet werden muß.

Fassen wir das bis jetzt Gefundene zusammen, so haben wir Folgendes.

In zwei ähnlichen Systemen giebt es im Allgemeinen immer einen Situationspunkt und eine durch ihn gehende Situationsachse, welche die Eigenschaft besitzt, daß das eine der beiden Systeme nur um diese Achse gedreht zu werden braucht, damit jedes Paar homologer Punkte mit dem Situationspunkte in gerader Linie zu liegen komme, und daß alsdann die Beziehung der beiden Systeme durch die Gleichungen

$$v = \pm kz \quad ; \quad u = \pm ky \quad ; \quad t = \pm kx \qquad (16)$$

ausgedrückt sey.

§. 20. Bedeutet k eine positive Größe, so liegen je zwei homologe Punkte auf derselben Seite des Situationspunktes wenn die oberen Zeichen, und auf entgegengesetzten Seiten wenn die unteren Vorzeichen gelten. Der Situationspunkt heißt, bei der jetzigen Lage der Systeme, der Aehnlichkeitspunkt, und zwar der äußere wenn die oberen, und der innere wenn die unteren Vorzeichen gelten. Die Systeme nennen wir in jenem Falle vollkommen-ähnlich, in diesem Falle symmetrisch-ähnlich; in beiden Fällen sollen sie ähnlich-liegend heißen.

In ähnlichen und ähnlich-liegenden Systemen sind homologe Ebenen, und daher auch homologe Gerade einander parallel. Denn ist $av+bu+ct+d = 0$ die Gleichung einer Ebene, so ist, zufolge der Gleichungen (16),
$az+by+cx+\frac{d}{k} = 0$ oder $az+by+cx-\frac{d}{k} = 0$ die Gleichung der homologen Ebene, welche, wie man sieht, der ersteren parallel ist.

Werden zwei ähnliche und ähnlich-liegende Systeme auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt nicht im Aehnlichkeitspunkte liegt, so sind die Beziehungsgleichungen

$$v = \pm kz+c \quad ; \quad u = \pm ky+b \quad ; \quad t = \pm kx+a \,. \qquad (16')$$

Es seyen x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' die Coordinaten von drei, auf dieselben Achsen bezogenen, ähnlichen Systemen, von welchen das erste und zweite, ferner das erste und dritte ähnlich-liegend sind; und es sey der Aehnlichkeitspunkt des ersten und zweiten Systems der Anfangspunkt der Coordinaten. Alsdann ist

$$z = k'z' \quad ; \quad y = k'y' \quad ; \quad x = k'x' \quad ;$$
$$z'' = kz+c \quad ; \quad y'' = ky+b \quad ; \quad x'' = kx+a \quad ;$$

und eliminiren wir z, y, x, so kommt

$$z'' = kk'z'+c \quad ; \quad y'' = kk'y'+b \quad ; \quad x'' = kk'x'+a \,.$$

Aus diesen letzten Gleichungen erhellet, daß auch das zweite und dritte System ähnlich-liegend sind. Da kk' positiv ist wenn k und k' von gleichen Zeichen, negativ aber wenn k und k' von entgegengesetzten Zeichen sind; da ferner, wenn $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ respective die Aehnlichkeitspunkte des ersten und dritten und des zweiten und dritten Systems sind, wie wir leicht finden,

$$z_1 = \frac{c}{1-k} \quad ; \quad y_1 = \frac{b}{1-k} \quad ; \quad x_1 = \frac{a}{1-k} \quad ;$$
$$z_2 = \frac{c}{1-kk'} \quad ; \quad y_2 = \frac{b}{1-kk'} \quad ; \quad x_2 = \frac{a}{1-kk'} \quad ;$$

also

also

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2} \quad ; \quad \frac{x_1}{z_1} = \frac{x_2}{z_2}$$

ist; so folgt der

Lehrsatz [9]. I. Sind zwei Systeme A, B einem dritten C ähnlich und ähnlich-liegend, so sind sie selbst ähnlich und ähnlich-liegend. II. Sind beide Systeme A, B dem Systeme C vollkommen-ähnlich oder symmetrisch-ähnlich, so sind A und B vollkommen-ähnlich; ist aber von den beiden Systemen A, B das eine dem Systeme C vollkommen-ähnlich und das andere ihm symmetrisch-ähnlich, so sind A und B symmetrisch-ähnlich. III. Die drei Aehnlichkeitspunkte von je zwei der drei Systeme A, B, C liegen in gerader Linie.

Sind einem Systeme A_1 drei andere Systeme A_2, A_3, A_4 ähnlich und ähnlich-liegend, so sind je zwei der letzteren ebenfalls ähnlich und ähnlich-liegend; und bezeichnen wir die Aehnlichkeitspunkte von A_1 u. A_2 durch $a_{1,2}$, von A_1 u. A_3 durch $a_{1,3}$, u. s. f., so liegen von diesen sechs Aehnlichkeitspunkten vier mal drei in einer Geraden, nämlich

$$\begin{array}{lllllll}
a_{1,2} & , & a_{1,3} & , & a_{2,3} & \text{in einer Geraden } g_4 & , \\
a_{1,2} & , & a_{1,4} & , & a_{2,4} & \text{» \quad » \quad »} \; g_3 & , \\
a_{1,3} & , & a_{1,4} & , & a_{3,4} & \text{» \quad » \quad »} \; g_2 & , \\
a_{2,3} & , & a_{2,4} & , & a_{3,4} & \text{» \quad » \quad »} \; g_1 & ;
\end{array}$$

die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 bilden ein vollständiges Viereck, und sämmtliche sechs Aehnlichkeitspunkte liegen somit in einer Ebene.

Nachdem wir zu all' diesen Resultaten gelangt sind, wollen wir jetzt wieder die allgemeinen Gleichungen (1) des vorigen §., nämlich

$$\left.\begin{array}{l}
v = m'''z + n'''y + p'''x + q''' \quad , \\
u = m''z + n''y + p''x + q'' \quad , \\
t = m'z + n'y + p'x + q' \quad ,
\end{array}\right\} \quad (17).$$

betrachten, indem wir annehmen, daß x, y, z und t, u, v sich auf ein und dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem beziehen, und daß die beiden in Rede stehenden Systeme einander ähnlich seyen; denn wir haben bis jetzt weder die Lage des Situationspunktes noch die Situationsachse gefunden. Ehe wir aber diese Aufsuchung vornehmen, wollen wir uns mit den Relationen zwischen den Coefficienten der Gleichungen (17) beschäftigen, welche, an sich

§. 20. merkwürdig, mehrere Ausdrücke, die bei dieser Untersuchung vorkommen, bedeutend verkürzen.

Wir bemerken zuerst, daß die für die Aehnlichkeit der beiden Systeme, zu Anfang dieses §. aufgefundenen Bedingungen, da die Coordinaten jetzt rechtwinklig genommen sind, durch folgende sechs Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} m'''^2 + m''^2 + m'^2 = k^2 \\ n'''^2 + n''^2 + n'^2 = k^2 \\ p'''^2 + p''^2 + p'^2 = k^2 \end{array}\right\} (18) \qquad \left.\begin{array}{l} m'''n''' + m''n'' + m'n' = 0 \\ m'''p''' + m''p'' + m'p' = 0 \\ n'''p''' + n''p'' + n'p' = 0 \end{array}\right\} (19)$$

ausgedrückt sind.

Multipliciren wir die Gleichungen (17) der Reihe nach durch m''', m'' und m', und addiren die Producte, so erhalten wir, mit Rücksicht auf die Gleichungen (18 u. 19), unmittelbar

$$k^2 z = m'''v + m''u + m't - (m'''q''' + m''q'' + m'q') \; .$$

Und auf gleiche Weise finden wir, durch Multiplication mit n''', n'', n' und mit p''', p'', p',

$$k^2 y = n'''v + n''u + n't - (n'''q''' + n''q'' + n'q') \quad ,$$
$$k^2 x = p'''v + p''u + p't - (p'''q''' + p''q'' + p'q') \quad .$$

Auf diese Weise sind x, y u. z vermittelst t, u u. v ausgedrückt.

Entwickeln wir m''' u. m'' aus den beiden ersten Gleichungen (19), so kommt

$$m'' = \frac{n'p''' - n'''p'}{n'''p'' - n''p'''} \cdot m' \quad ; \quad m''' = \frac{n''p' - n'p''}{n'''p'' - n''p'''} \cdot m' \quad ;$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die erste Gleichung (18) ergiebt sich

$$\left\{(n''p' - n'p'')^2 + (n'p''' - n'''p')^2 + (n'''p'' - n''p''')^2\right\} m'^2 = k^2(n'''p'' - n''p''')^2 \; .$$

Der Coefficient von m'^2 in dieser Gleichung ist aber identisch mit

$$(n'''^2 + n''^2 + n'^2)(p'''^2 + p''^2 + p'^2) - (n'''p''' + n''p'' + n'p')^2 \quad ,$$

ein Ausdruck, der, zufolge der zweiten und dritten Gleichung (18) und der dritten Gleichung (19), sich auf k^4 reducirt. Die gefundene Gleichung zieht sich demnach auf

$$k^2 m'^2 = (n'''p'' - n''p''')^2 \quad ,$$

oder, wenn wir die Wurzel ausziehen, auf

$$\pm km' = n'''p'' - n''p'''$$

zurück. Substituiren wir den Werth von m', welcher sich hieraus ergiebt, in die vorher gefundenen Ausdrücke von m'' und m''', so erhalten wir

$$\pm km'' = n'p''' - n'''p' \quad ; \quad \pm km''' = n''p' - n'p'' \quad .$$ §. 20.

Auf ähnliche Weise finden wir Ausdrücke für n', n'', n''', p', p'' und p''', so daß wir überhaupt folgende bemerkenswerthe neun Gleichungen haben:

$$\left.\begin{array}{lll} \pm km''' = n''p' - n'p'' \; ; & \pm kn''' = p''m' - p'm'' \; ; & \pm kp''' = m''n' - m'n'' \; ; \\ \pm km'' = n'p''' - n'''p' \; ; & \pm kn'' = p'm''' - p'''m' \; ; & \pm kp'' = m'n''' - m'''n' \; ; \\ \pm km' = n'''p'' - n''p''' \; ; & \pm kn' = p'''m'' - p''m''' \; ; & \pm kp' = m'''n'' - m''n''' . \end{array}\right\} (20)$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung (18) folgt

$$(m''^2 + m'^2)(n''^2 + n'^2) = (k^2 - m'''^2)(k^2 - n'''^2) \quad ,$$

oder, was dasselbe ist,

$$m''^2n''^2 + m''^2n'^2 + m'^2n''^2 + m'^2n'^2 - m'''^2n'''^2 + k^2(m'''^2 + n'''^2) = k^4 \quad .$$

Setzen wir hierin den, aus der ersten Gleichung (19) sich ergebenden Ausdruck von $m'''^2n'''^2$, nämlich $m''^2n''^2 + 2m''m'n''n' + m'^2n'^2$, so reducirt sich die gefundene Gleichung auf

$$(m''n' - m'n'')^2 + k^2(m'''^2 + n'''^2) = k^4 \quad ,$$

oder, in Folge der dritten Gleichung (20) und durch Division mit k^2, auf

$$m'''^2 + n'''^2 + p'''^2 = k^2 \quad .$$

Auf gleiche Weise können wir noch zwei Gleichungen herleiten, so daß wir folgende drei Gleichungen haben:

$$\left.\begin{array}{l} m'''^2 + n'''^2 + p'''^2 = k^2 \quad , \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 = k^2 \quad , \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 = k^2 \quad . \end{array}\right\} (18')$$

Setzen wir in die so eben hergeleitete erste Gleichung (18′) für m''', n''', p''' die Ausdrücke aus (20), so erhalten wir

$$\begin{aligned} k^4 &= (n''p' - n'p'')^2 + (p''m' - p'm'')^2 + (m''n' - m'n'')^2 \\ &\equiv (m''^2 + n''^2 + p''^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2) - (m''m' + n''n' + p''p')^2 \quad , \end{aligned}$$

und, in Folge der beiden letzten Gleichungen (18′) ergiebt sich hieraus

$$m''m' + n''n' + p''p' = 0 \quad .$$

Auf gleiche Weise können wir noch zwei Gleichungen herleiten, so daß wir ferner folgende drei Gleichungen haben:

$$\left.\begin{array}{l} m''m' + n''n' + p''p' = 0 \quad , \\ m'''m' + n'''n' + p'''p' = 0 \quad , \\ m'''m'' + n'''n'' + p'''p'' = 0 \quad . \end{array}\right\} (19')$$

Ist k eine absolute Zahl, und sind die Beziehungsgleichungen der beiden ähnlichen Systeme

§. 20.

$$v = +kz \quad ; \quad u = +ky \quad ; \quad t = +kx \quad ,$$

so sind diese Systeme vollkommen-ähnlich, und es ist alsdann

$$m''' = +k \quad ; \quad n''' = 0 \quad ; \quad p''' = 0 \quad ; \quad m'' = 0 \quad ; \quad n'' = +k \quad ;$$
$$p'' = 0 \quad ; \quad m' = 0 \quad ; \quad n' = 0 \quad ; \quad p' = +k \quad ;$$

somit ist $n''p' - n'p'' = k^2$ und $km''' = k^2$, welche Werthe nur dann die erste Gleichung (20) befriedigen, wenn in dieser das obere Zeichen genommen wird. Sind aber die Beziehungsgleichungen der beiden ähnlichen Systeme

$$v = -kz \quad ; \quad u = -ky \quad ; \quad t = -kx \quad ,$$

so sind die beiden Systeme symmetrisch-ähnlich, und es ist alsdann

$$m''' = -k \quad ; \quad n''' = 0 \quad ; \quad p''' = 0 \quad ; \quad m'' = 0 \quad ; \quad n'' = -k \quad ;$$
$$p'' = 0 \quad ; \quad m' = 0 \quad ; \quad n' = 0 \quad ; \quad p' = -k \quad ;$$

somit ist $n''p' - n'p'' = k^2$ und $m'''k = -k^2$, welche Werthe nur dann die erste Gleichung (20) befriedigen, wenn in dieser das untere Vorzeichen genommen wird. Auf ähnliche Weise überzeugen wir uns, daß wenn k eine absolute Zahl ist, alle Gleichungen (20) im Falle der vollkommenen Aehnlichkeit mit dem oberen Zeichen, im Falle der symmetrischen Aehnlichkeit mit dem unteren Vorzeichen genommen werden müssen.

Wenn die vier Größen m''', n'', p' und k gegeben sind, lassen sich die übrigen sechs Größen m'', m', n''', n', p''' und p'' bestimmen. Subtrahiren wir von der Summe der beiden ersten Gleichungen (18) die dritte Gleichung (18'), so kommt

$$m'''^2 + n'''^2 + m''^2 + n''^2 = p'^2 + k^2 \quad .$$

Nun ist, zufolge der letzten Gleichung (20),

$$2m'''n'' - 2m''n''' = \pm 2kp' \quad ,$$

und wenn wir diese Gleichung von der vorigen subtrahiren, und zu ihr addiren, so erhalten wir

$$(m''' - n'')^2 + (m'' + n''')^2 = (p' \mp k)^2 \quad ,$$
$$(m''' + n'')^2 + (m'' - n''')^2 = (p' \pm k)^2 \quad ,$$

woraus

$$m'' + n''' = \sqrt{(p' \mp k)^2 - (m''' - n'')^2} \quad ,$$
$$m'' - n''' = \sqrt{(p' \pm k)^2 - (m''' + n'')^2} \quad ,$$

oder auch

$$m'' + n''' = \sqrt{(\pm k - m''' + n'' - p')(\pm k + m''' - n'' - p')} \quad ,$$
$$m'' - n''' = \sqrt{(\pm k + m''' + n'' + p')(\pm k - m''' - n'' + p')} \quad .$$

Auf ähnliche Weise können wir Ausdrücke für $p'''+m'$ und $p'''-m'$, $n'+p''$ und $n'-p''$ finden; und wir haben, wenn wir, der Kürze wegen, §. 20.

$$\left.\begin{array}{l} \pm k + m''' - n'' - p' = M \ , \\ \pm k - m''' + n'' - p' = N \ , \\ \pm k - m''' - n'' + p' = P \ , \\ \pm k + m''' + n'' + p' = Q \end{array}\right\} \quad (21)$$

setzen, überhaupt

$$\left.\begin{array}{l} m''+n''' = \sqrt{MN} \ ; \ p'''+m' = \sqrt{PM} \ ; \ n'+p'' = \sqrt{NP} \ ; \\ m''-n''' = \sqrt{PQ} \ ; \ p'''-m' = \sqrt{NQ} \ ; \ n'-p'' = \sqrt{MQ} \ . \end{array}\right\} \quad (22)$$

Wenn k eine absolute Zahl ist, so ist in den Ausdrücken M, N, P u. Q das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem die beiden Systeme vollkommen oder symmetrisch-ähnlich seyn sollen.

Jetzt bemerken wir zunächst, daß wenn gleich m''', n'', p' u. k beliebig angenommen werden mögen, diesen Größen doch nicht jeder Werth beigelegt werden kann. Es kann nämlich, erstens, jede der Größen m''', n'' und p', absolut genommen, nicht größer als k seyn, weil, wenn nur eine dieser Größen größer als k wäre, die Gleichungen (18) und (18') nicht von reellen Werthen der übrigen sechs Größen befriedigt werden könnten. Zweitens müssen m''', n'' u. p' solche Werthe haben, daß die Werthe der vier Ausdrücke M, N, P u. Q gleiche Zeichen bekommen, weil im anderen Falle wenigstens eins der Producte MN, PQ, PM, NQ, NP u. MQ negativ, und also wenigstens einer der Werthe von $m''+n'''$, $m''-n'''$, $p'''+m'$, 2c. imaginair wäre. Nun ist aber $M+N+P+Q = \pm 4k$, also müssen die Größen M, N, P u. Q in dem Falle der vollkommenen Aehnlichkeit sämmtlich positiv, in dem Falle der symmetrischen Aehnlichkeit sämmtlich negativ seyn. Setzen wir zur Abkürzung

$$m'''+n''+p' = A \ ,$$

so haben wir, wenn k eine absolute Zahl bedeutet, nach dem so eben Erwiesenen,

in dem Falle der vollkommenen Aehnlichkeit beider Systeme:

erstens $3k - A \geqq 0$, zweitens $Q \equiv +k + A \geqq 0$; (23)

in dem Falle der symmetrischen Aehnlichkeit beider Systeme:

erstens $3k + A \geqq 0$, zweitens $Q \equiv -k + A \leqq 0$. (24)

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an die Bestimmung des Situationspunktes. Die Coordinaten dieses Punktes finden wir, wenn wir in den Gleichungen (17) $v = z$, $u = y$ und $t = x$ setzen, wodurch wir

§. 20.

$$(m'''-1)z + n'''y + p'''x + q''' = 0 \; ,$$
$$m''z + (n''-1)y + p''x + q'' = 0 \; ,$$
$$m'z + n'y + (p'-1)x + q' = 0$$

erhalten. Entwickeln wir nun x, y und z, und bezeichnen die in Rede stehenden Coordinaten durch x_1, y_1, z_1 so erhalten wir, nach einigen Reductionen, welche durch die Anwendung der Gleichungen (20) bewirkt werden,

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{(1-p'-n''\pm m'''k)q'''+(n'''\pm m''k)q''+(p'''\pm m'k)q'}{(1\mp k)(1-A\pm k+k^2)} \; , \\ y_1 &= \frac{(m''\pm n'''k)q'''+(1-m'''-p'\pm n''k)q''+(p''\pm n'k)q'}{(1\mp k)(1-A\pm k+k^2)} \; , \\ x_1 &= \frac{(m'\pm p'''k)q'''+(n'\pm p''k)q''+(1-m'''-n''\pm p'k)q'}{(1\mp k)(1-A\pm k+k^2)} \; . \end{aligned}\right\} (25)^{*)}$$

In diesen Ausdrücken für die Coordinaten des Situationspunktes gelten die oberen oder die unteren Vorzeichen, je nachdem beide Systeme vollkommen oder symmetrisch-ähnlich sind. Sollten diese Coordinaten-Ausdrücke $= \infty$ oder $= \frac{0}{0}$ werden, so müßte der gemeinschaftliche Nenner, und somit einer seiner beiden Factoren verschwinden. Von dem Falle, in welchem der erste dieser Factoren, nämlich $1 \mp k$, verschwindet, abstrahiren wir jetzt, weil der specielle Fall, in welchem $k^2 = 1$ ist, den Gegenstand des folgenden §. bilden wird. Es bleibt uns also blos der zweite Factor zu betrachten übrig. Wenn aber k nicht der Einheit gleich ist, kann, bei zwei vollkommen ähnlichen Systemen, auch die Gleichung

$$1 - A + k + k^2 = 0$$

nicht Statt haben. Denn, da in dem Falle der vollkommenen Aehnlichkeit, wie wir oben gesehen haben,

$$+ A - 3k \leqq 0$$

ist, so würde sich durch Addition

$$1 - 2k + k^2 \leqq 0 \; ,$$

also entweder $(1-k)^2 < 0$ oder $(1-k)^2 = 0$ ergeben. Das erste ist für jeden reellen Werth von k, und das andere für jeden von 1 verschiedenen Werth unmöglich. Eben so kann, wenn k nicht der Einheit gleich ist, bei zwei symmetrisch-ähnlichen Systemen auch die Gleichung

$$1 - A - k + k^2 = 0$$

nicht Statt haben, weil in diesem Falle

---

*) Vergleiche: Journal f. d. reine u. angew. Mathematik Bd. XV. S. 311.

$$+A - k \leqq 0 \quad ,$$ §. 20.

also durch Addition, wie vorher,

$$1 - 2k + k^2 \leqq 0$$

folgen würde, was, wie schon gesagt, unmöglich ist.

Die Coordinaten des Situationspunktes sind also bei zwei ähnlichen Systemen immer bestimmt und endlich.

Nunmehr wollen wir die Gleichungen der Situationsachse aufsuchen. Zu dem Ende kehren wir zu der Gleichung (6) zurück. Diese Gleichung reducirt sich mit Hülfe der Gleichungen (20), und wenn wir, wie vorher,

$$m''' + n'' + p' = A$$

setzen, auf

$$\lambda^3 - A\lambda^2 \pm Ak\lambda \mp k^3 = 0 \quad , \qquad (26)$$

und läßt sich wie folgt

$$(\lambda \mp k)(\lambda^2 - [A \mp k]\lambda + k^2) = 0 \qquad (27)$$

zerlegen, wo die oberen Zeichen für die vollkommene, die unteren für die symmetrische Aehnlichkeit gelten.

Betrachten wir zuerst den zweiten Factor, so sehen wir, daß er für λ zwei Werthe giebt, die nur dann reell sind, wenn

$$(A \mp k)^2 - 4k^2 \geqq 0 \quad ,$$

d. i., wenn

$$(A \mp k + 2k)(A \mp k - 2k) \geqq 0 \quad .$$

Sollte diese Bedingung erfüllt werden, so müßte im Falle der vollkommenen Aehnlichkeit

$$(A + k)(A - 3k) \geqq 0 \quad ,$$

und im Falle der symmetrischen Aehnlichkeit

$$(A + 3k)(A - k) \geqq 0$$

seyn. Im ersten Falle kann aber nicht $(A + k)(A - 3k) > 0$ seyn, weil dies mit den Gleichungen (23) im Widerspruche steht, und im zweiten Falle kann nicht $(A + 3k)(A - k) > 0$, weil dies den Gleichungen (24) widerspricht. Der zweite Factor der Gleichung (27) wird also nur dann für λ zwei reelle Werthe geben können, wenn

$$(A \mp k)^2 - 4k^2 = 0 \quad ,$$

d. i. wenn sie einander gleich sind. Im Falle der vollkommenen Aehnlichkeit ist dann

§. 20.

entweder $A = 3k$ und somit $\lambda = +k$,
oder $A = -k$ » » $\lambda = -k$.

Im Falle der symmetrischen Aehnlichkeit aber ist alsdann

entweder $A = -3k$ und somit $\lambda = -k$,
oder $A = k$ » » $\lambda = +k$.

Der erste Factor der Gleichung (27) giebt in dem Falle der vollkommenen Aehnlichkeit

$$\lambda = +k\ ,$$

und in dem Falle der symmetrischen Aehnlichkeit

$$\lambda = -k\ ,$$

welchen Werth A auch haben mag.

Fassen wir diese Ergebnisse zusammen, so haben wir Folgendes:

Es hat λ, in Folge der Gleichung (6) oder (26), im Falle der vollkommenen Aehnlichkeit nur den einen reellen Werth $+k$; in dem untergeordneten, ganz speciellen Falle, in welchem $A = -k$, hat λ einen zweiten reellen Werth $= -k$. Und es hat λ, im Falle der symmetrischen Aehnlichkeit nur den einen reellen Werth $-k$; in dem untergeordneten, ganz speciellen Falle, in welchem $A = k$, hat λ einen zweiten reellen Werth $= +k$.

Gehen wir nun zu den Gleichungen (5) zurück, so finden wir aus den beiden letzten derselben, und wenn wir die Gleichungen (20) benutzen,

im Falle der vollkommenen Aehnlichkeit:

$$\frac{a}{c} = \frac{p'''\lambda + m'k}{\lambda^2 - (n'' + p')\lambda + m'''k}\ ;\quad \frac{b}{c} = \frac{n'''\lambda + m''k}{\lambda^2 - (n'' + p')\lambda + m'''k}\ ;$$

im Falle der symmetrischen Aehnlichkeit:

$$\frac{a}{c} = \frac{p'''\lambda - m'k}{\lambda^2 - (n'' + p')\lambda - m'''k}\ ;\quad \frac{b}{c} = \frac{n'''\lambda - m''k}{\lambda^2 - (n'' + p')\lambda - m'''k}\ .$$

Setzen wir, zufolge des vorher Gesagten, in dem ersten Falle $\lambda = +k$, und in dem zweiten $\lambda = -k$, so haben wir im Allgemeinen:

im Falle der vollkommenen Aehnlichkeit:

$$\frac{a}{c} = \frac{p''' + m'}{+k + m''' - n'' - p'}\ ;\quad \frac{b}{c} = \frac{n''' + m''}{+k + m''' - n'' - p'}\ ,$$

im Falle der symmetrischen Aehnlichkeit:

$$\frac{a}{c} = \frac{p''' + m'}{-k + m''' - n'' - p'}\ ;\quad \frac{b}{c} = \frac{n''' + m''}{-k + m''' - n'' - p'}\ .$$

Bedienen wir uns der Gleichungen (21) u. (22), so können wir diesen eben § 20. gefundenen Ausdrücken verschiedene andere Formen geben, und zwar ergiebt sich, für beide Fälle, zunächst

$$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{PM}}{M} \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{MN}}{M} \quad ;$$

also auch

$$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{M}} \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}} \quad ; \qquad (28)$$

und sodann ferner

$$\frac{a}{c} = \frac{m'' - n'''}{n' - p''} \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{p''' - m'}{n' - p''} \; . \qquad (29)$$

Die Gleichung derjenigen Ebene (8), welche mit ihrer homologen zusammen fällt, ist nun in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(\pm k + m''' - n'' - p')(v - z_1) + (n''' + m'')(u - y_1) + (p''' + m')(t - x_1) = 0 \quad ,$$

oder auch, was auf dasselbe hinausläuft:

$$\sqrt{M}(v - z_1) + \sqrt{N}(u - y_1) + \sqrt{P}(t - x_1) = 0 \quad , \qquad (30)$$

oder endlich

$$(n' - p'')(v - z_1) + (p''' - m')(u - y_1) + (m'' - n''')(t - x_1) = 0 \; . \quad (31)$$

Es bliebe uns jetzt noch die Bestimmung der Werthe von $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ für den speciellen Fall übrig, in welchem bei vollkommen-ähnlichen Systemen $A = -k$, und bei symmetrisch-ähnlichen $A = +k$ ist, in welchem also, nach dem oben Gezeigten, für λ respective $-k$ und $+k$ zu setzen wäre. Da wir aber hierbei auf unbestimmt erscheinende Ausdrücke kommen, so wollen wir folgendermaßen verfahren. Wir bezeichnen die vorher gefundenen Werthe von $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ respective durch $\frac{a'}{c'}$ und $\frac{b'}{c'}$, die jetzt zu bestimmenden aber durch $\frac{a''}{c''}$ und $\frac{b''}{c''}$. Nun befriedigen $\frac{a'}{c'}$ und $\frac{b'}{c'}$ nothwendigerweise eine jede der drei Gleichungen (5), wenn wir darin respective $\lambda = +k$ und $\lambda = -k$ setzen, so daß wir haben

$$m'''c' + m''b' + m'a' = \pm kc' \; ; \; n'''c' + n''b' + n'a' = \pm kb' \; ; \; p'''c' + p''b' + p'a' = \pm ka' .$$

Es müssen aber $\frac{a''}{c''}$ u. $\frac{b''}{c''}$ dieselben Gleichungen befriedigen, wenn wir darin respective $\lambda = -k$ und $\lambda = +k$ setzen, so daß wir haben

§. 20. $m'''c'' + m''b'' + m'a'' = \mp kc''$; $n'''c'' + n''b'' + n'a'' = \mp kb''$;

$$p'''c'' + p''b'' + p'a'' = \mp ka'' \ .$$

Durch Multiplication und Addition erhalten wir aus diesen sechs Gleichungen

$$(m'''^2 + n'''^2 + p'''^2)c'c'' + (m''^2 + n''^2 + p''^2)b'b'' + (m'^2 + n'^2 + p'^2)a'a''$$
$$+ (m'''m'' + n'''n'' + p'''p'')(c'b'' + b'c'') + (m'''m' + n'''n' + p'''p')(c'a'' + a'c'')$$
$$+ (m''m' + n''n' + p''p')(b'a'' + a'b'') = -k^2(c'c'' + b'b'' + a'a'') \ ;$$

und diese Gleichung reducirt sich, zufolge der Relationen (18′) u. (19′), auf

$$c'c'' + b'b'' + a'a'' = 0 \ ,$$

woraus wir sehen, daß jede Ebene, deren Gleichung

$$c''(v - z_1) + b''(u - y_1) + a''(t - x_1) = 0 \qquad (32)$$

ist, auf der Ebene

$$c'(v - z_1) + b'(u - y_1) + a'(t - x_1) = 0$$

d. i. auf der Ebene (30) senkrecht steht, daß sich also alle Ebenen (32) in derjenigen Geraden schneiden, welche die Situationsachse der beiden Systeme ist.

Für die Gleichungen dieser Situationsachse haben wir, nach dem bisher Gefundenen, unmittelbar

$$\sqrt{M}(t - x_1) = \sqrt{P}(v - z_1) \ ; \ \sqrt{M}(u - y_1) = \sqrt{N}(v - z_1) \ , \qquad (33)$$

oder auch

$$(n' - p'')(t - x_1) = (m'' - n''')(v - z_1) \ ; \ (n' - p'')(u - y_1) = (p''' - m')(v - z_1) \ . \qquad (34)$$

Die Situationsachse ist, allgemein zu reden, die einzige Gerade, welche mit ihrer homologen coincidirt; sie bildet mit je zwei homologen Ebenen, und eben so mit je zwei homologen Geraden gleiche Winkel; enthält eine Ebene diese Achse oder ist sie ihr parallel, so enthält auch die homologe Ebene diese Achse oder ist ihr parallel; und je zwei homologe Ebenen, welche die Situationsachse enthalten oder ihr parallel sind, schließen einen constanten Winkel ein. Alles dies ist daraus klar, daß, wie wir früher schon gesehen haben, das eine der beiden ähnlichen Systeme durch bloße Drehung um die Situationsachse in eine solche Lage gebracht werden kann, daß es mit dem anderen ähnlich-liegend ist. Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Größe dieser Drehung oder, was dasselbe ist, den Winkel zu bestimmen, den je zwei homologe, die Situationsachse enthaltende oder ihr parallele Ebenen einschließen, was auf folgende Weise geschehen kann.

Die Gleichung §. 20.

$$(m''-n''')v-(n'-p'')t = 0$$

drückt, zufolge der Gleichungen (34), eine Ebene aus, welche der Situationsachse parallel ist. Dieser Ebene entspricht in dem anderen Systeme eine Ebene, deren Gleichung, wie wir durch Substitution der Ausdrücke (17) finden,

$$\left\{(m''-n''')m'''-(n'-p'')m'\right\}z+\left\{(m''-n''')n'''-(n'-p'')n'\right\}y$$
$$+\left\{(m''-n''')p'''-(n'-p'')p'\right\}x+(m''-n''')q'''-(n'-p'')q' = 0$$

ist. Der gesuchte Drehungswinkel, den wir $\varkappa$ nennen wollen, ist dem Neigungswinkel der beiden so eben angegebenen Ebenen gleich, und wir haben also, da die Coordinaten rechtwinklig angenommen sind, zufolge (§.9. G.2), unmittelbar:

$$\cos\varkappa = \frac{m'''(m''-n''')^2-(n'-p'')(m''-n''')(p'''+m')+(n'-p'')^2p'}{\sqrt{R}\cdot\sqrt{S}} \quad ,$$

wenn wir, der Kürze wegen,

$$(m''-n''')^2+(n'-p'')^2 = R \quad ,$$
$$(m''-n''')^2(m'''^2+n'''^2+p'''^2)-2(m''-n''')(n'-p'')(m'm'''+n'n'''+p'p''')$$
$$+(n'-p'')^2(m'^2+n'^2+p'^2) = S$$

setzen. In Folge der Gleichungen (18') u. (19') reducirt sich dieser letzte Ausdruck aber auf

$$k^2(m''-n''')^2+k^2(n'-p'')^2 = S \quad ,$$

so daß wir $S = Rk^2$, und somit $\sqrt{R}\sqrt{S} = \pm kR$, also

$$\cos\varkappa = \frac{m'''(m''-n''')^2-(n'-p'')(m''-n''')(p'''+m')+(n'-p'')^2p'}{\pm k\left\{(m''-n''')^2+(n'-p'')^2\right\}}$$

haben. Diesem Ausdruck von $\cos\varkappa$ können wir eine viel einfachere Gestalt geben; denn substituiren wir für $m''-n'''$, $n'-p''$ und $p'''+m'$ die Ausdrücke (22), so bekommen Zähler und Nenner dieses Bruches den gemeinschaftlichen Factor Q, und wenn wir durch diesen Factor heben, kommt

$$\cos\varkappa = \frac{Pm'''-MP+Mp'}{\pm k(P+M)} = \frac{(2m'''-M)P+(2p'-P)M}{\pm 2k(P+M)} \quad .$$

Da aber ferner $2m'''-M = 2p'-P = m'''+n''+p'\mp k$, so haben wir endlich

$$2\cos\varkappa = \frac{m'''+n''+p'}{\pm k}-1 \quad .$$

§. 20. Wir wollen noch, zum Schlusse dieses §., eine geometrische Construction des Situationspunktes und der Situationsachse aufsuchen. Die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} z &= m'''z + n'''y + p'''x + q''' , \\ y &= m''z + n''y + p''x + q'' , \\ x &= m'z + n'y + p'x + q' \end{aligned} \qquad (35)$$

bestimmen, wie wir schon gesehen haben, den Situationspunkt, die Coordinaten mögen rechtwinklig oder schiefwinklig seyn. Jede von ihnen drückt eine Ebene aus, und der Situationspunkt ist derjenige Punkt, in welchem sich diese drei Ebenen schneiden; wir brauchen also nur diese Ebenen zu construiren, um den Situationspunkt zu finden. Die erste dieser Ebenen enthält offenbar den Durchschnitt derjenigen beiden Ebenen, deren Gleichungen respective

$$z = 0 \quad \text{und} \quad m'''z + n'''y + p'''x + q''' = 0$$

sind, und sie enthält ferner den Durchschnitt von zwei anderen Ebenen, welche

$$z = h \quad \text{und} \quad m'''z + n'''y + p'''x + q''' = h$$

zu Gleichungen haben, wo h eine beliebige constante Größe bedeutet. Es drückt aber $z = 0$ die Ebene der xy oder der tu aus, und $m'''z + n'''y + p'''x + q''' = 0$ stellt die der Ebene der tu entsprechende Ebene dar; ferner drückt $z = h$ eine der Ebene der tu parallele Ebene aus, und $m'''z + n'''y + p'''x + q''' = h$ stellt die dieser letzten Ebene entsprechende Ebene dar. Hieraus sehen wir, wie die erste der genannten drei Ebenen durch die Durchschnitte bestimmt wird, welche zwei parallele Ebenen mit ihren homologen bilden. Auf ähnliche Weise können wir auch die beiden anderen der genannten drei Ebenen bestimmen, und da die Coordinatenebenen ganz beliebig angenommen werden können, so ergiebt sich folgende Construction des Situationspunktes. „Man nehme in dem einen der beiden Systeme drei beliebige Ebenen a, b, c, und drei andere Ebenen α, β, γ, welche jenen respective parallel sind; ferner in dem ähnlichen Systeme die diesen Ebenen entsprechenden Ebenen a', b', c' und α', β', γ'; durch die Durchschnitte der Ebenen a u. a', α u. α' lege man eine Ebene A, durch die Durchschnitte der Ebenen b u. b', β u. β' eine Ebene B, durch die Durchschnitte der Ebenen c u. c', γ u. γ' eine Ebene C, so werden sich die drei Ebenen A, B, C im Allgemeinen in einem Punkte S schneiden, welcher der Situationspunkt ist."

Da die Situationsachse mit je zwei homologen Ebenen und mit je zwei homologen Geraden gleiche Winkel macht, so sieht man leicht ein, daß

jede Ebene, welche den Neigungswinkel eines Paares homologer, den Situationspunkt enthaltender Ebenen halbirt, die Situationsachse enthalten muß, woraus sich die folgende Construction ergiebt: „Man halbire die Neigungswinkel der Ebene A und ihrer homologen A′ durch eine Ebene E_a, den Neigungswinkel der Ebene B und ihrer homologen B′ durch eine Ebene E_b, so ist der Durchschnitt dieser Ebenen E_a und E_b die Situationsachse." §. 20.

§. 21.

Ist der Exponent k des zu Anfang des vorigen §. erwähnten Verhältnisses gleich ± 1, so sind die beiden Systeme nicht blos einander ähnlich, sondern einander gleich, und zwar vollkommen gleich oder symmetrisch gleich. Zwischen den Coefficienten m''', n''', p''', m'', ꝛc. finden dann, vorausgesetzt, daß die Coordinaten rechtwinklig sind, die Relationen (18), (19), (18′), (19′) und (20) des vorigen §. Statt, in welchen aber für k überall 1 zu setzen ist. (Diese Relationen sind alsdann dieselben, welche wir in §. 13 zwischen den Größen γ'', β'', α'', γ' ꝛc. gefunden haben.)

Sind zwei Systeme vollkommen gleich, so haben sie im Allgemeinen keinen Situationspunkt, denn die Ausdrücke (25) im vor. §., wenn wir darin die oberen Vorzeichen und $k = 1$ nehmen, werden, im Allgemeinen, $= \infty$. Sind zwei Systeme symmetrisch gleich, so haben sie, im Allgemeinen, immer einen Situationspunkt.

I. Wir wollen den Fall der symmetrischen Gleichheit zuerst betrachten. Die Ausdrücke für die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Situationspunktes sind, wie wir aus den Formeln (25) des vor. §. finden, wenn wir darin die unteren Vorzeichen und $k = 1$ nehmen,

$$z_1 = \frac{(1-m'''-n''-p')q'''+(n'''-m'')q''+(p''-m')q'}{2(1-m'''-n''-p')},$$

$$y_1 = \frac{(m''-n''')q'''+(1-m'''-n''-p')q''+(p''-n')q'}{2(1-m'''-n''-p')},$$

$$x_1 = \frac{(m'-p''')q'''+(n'-p'')q''+(1-m'''-n''-p')q'}{2(1-m'''-n''-p')}.$$

Die Gleichungen der Situationsachse sind, wie im vorigen §. gefunden,

$$(n'-p'')(t-x_1) = (m''-n''')(v-z_1)\ ;\ (n'-p'')(u-y_1) = (p'''-m')(v-z_1).$$

Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Situationspunkte, ohne die Richtung der Coordinatenachsen zu ändern, so sind die Gleichungen der Situationsachse

$$(n'-p'')t = (m''-n''')v\ \ ;\ \ (n'-p'')u = (p'''-m')v\ .$$

§. 21. Einem in dieser Situationsachse liegenden Punkte $x'y'z'$ entspricht ein Punkt $t'u'v'$, welcher ebenfalls in der Situationsachse liegt, was nach dem im vorigen §. Dargethanen von selbst klar ist, und diese beiden homologen Punkte befinden sich in gleicher Entfernung vom Situationspunkte, auf verschiedenen Seiten desselben. Denn da die Punkte $x'y'z'$ und $t'u'v'$ einander entsprechen, so haben wir

$$v' = m'''z' + n'''y' + p'''x' \quad ,$$

und da der Punkt $x'y'z'$ in der Situationsachse liegt, so haben wir ferner

$$(n'-p'')x' = (m''-n''')z' \quad ; \quad (n'-p'')y' = (p'''-m')z' \quad .$$

Eliminiren wir zwischen diesen drei Gleichungen x' und y', so kommt

$$(n'-p'')v' = (m'''n'-m'n'''+p'''m''-p''m''')z' \quad ,$$

eine Gleichung, welche sich mit Hülfe der Gleichungen (20) des vor. §., in denen $k = 1$ und die unteren Vorzeichen zu nehmen sind, auf

$$v' = -z'$$

reducirt, was unsere Behauptung ausdrückt.

Wird das eine der beiden symmetrisch gleichen Systeme um die Situationsachse gedreht, bis der Drehungswinkel $\varkappa$ eine solche Größe erreicht, daß

$$\cos\varkappa = -\tfrac{1}{2}(1 + m''' + n'' + p') \quad ,$$

so kommen beide Systeme in eine solche Lage, daß die Verbindungslinien von je zwei homologen Punkten durch den Situationspunkt gehen und von ihm halbirt werden.

II. Jetzt wollen wir den Fall der vollkommenen Gleichheit betrachten. Zwei vollkommen gleiche Systeme haben, wie schon oben bemerkt, im Allgemeinen keinen Situationspunkt; es kann auch, im Allgemeinen, das eine System nicht durch bloße Drehung um eine Achse mit dem andern zur Congruenz gebracht werden; aber es giebt immer eine gerade Linie, die mit ihrer homologen zusammenfällt; wird eins der beiden vollkommen gleichen Systeme der Richtung dieser Situationsachse parallel verschoben, und sodann um diese Achse gedreht, so kommen beide Systeme zur Congruenz.

Die Richtung dieser Situationsachse (nicht die Situationsachse selbst) ist wieder durch die Gleichungen

$$(n'-p'')t = (m''-n''')v \quad ; \quad (n'-p'')u = (p'''-m')v$$

ausgedrückt; und wir bemerken in Beziehung auf diese Richtung Folgendes. Jede Ebene des einen Systems, welche auf der genannten Richtung senkrecht steht, kann durch die Gleichung

$$(n'-p'')v + (p'''-m')u + (m''-n''')t + \delta = 0$$

ausgedrückt werden, wo δ eine für jede einzelne Ebene zu bestimmende Constante bedeutet. Dieser Ebene entspricht in dem anderen Systeme eine Ebene, als deren Gleichung wir §. 21.

$$\begin{aligned}&\{m'''(n'-p'')+m''(p'''-m')+m'(m''-n''')\}z\\+&\{n'''(n'-p'')+n''(p'''-m')+n'(m''-n''')\}y\\+&\{p'''(n'-p'')+p''(p'''-m')+p'(m''-n''')\}x\\+&(n'-p'')q'''+(p'''-m')q''+(m''-n''')q'+\delta=0\end{aligned}$$

finden. Diese Gleichung reducirt sich vermittelst der Formeln (20) des vorigen §., in welchen $k = 1$ und das obere Vorzeichen zu nehmen ist, auf

$$(n'-p'')z+(p'''-m')y+(m''-n''')x+(n'-p'')q'''+(p'''-m')q''+(m''+n''')q'+\delta=0;$$

und hieraus ergiebt sich, was auch leicht vorauszusehen war, daß jede auf der genannten Richtung senkrechte Ebene ihrer homologen Ebene parallel ist. Die Entfernung, h, dieser beiden Ebenen ist, nach §. 11 (Aufg. 24), durch

$$h = \frac{(n'-p'')q'''+(p'''-m')q''+(m''-n''')q'}{\sqrt{(n'-p'')^2+(p'''-m')^2+(m''-n''')^2}}$$

ausgedrückt, und also, da dieser Ausdruck δ nicht enthält, immer dieselbe. Zwei homologe, auf der Richtung der Situationsachse senkrechte Ebenen haben demnach eine constante Entfernung von einander, und eben deshalb existirt für zwei vollkommen gleiche Systeme im Allgemeinen kein Situationspunkt.

Was die geometrische Construction der Situationsachse für zwei vollkommen gleiche Systeme betrifft — für symmetrisch gleiche Systeme ist diese Construction dieselbe wie für ähnliche Systeme — so geben uns die drei Gleichungen (35) des vor. §., durch welche wir dort den Situationspunkt fanden, hier die Richtung der Situationsachse; denn eliminiren wir zwischen beliebige zwei dieser drei Gleichungen y und x, so erhalten wir zwei Gleichungen, deren erste Glieder, wenn wir nämlich die Gleichungen (20) des vor. §., nachdem wir darin $k = 1$ und die oberen Zeichen genommen, berücksichtigen, respective

$$(n'-p'')x-(m''-n''')z \quad \text{und} \quad (n'-p'')y-(p'''-m')z$$

sind; und hieraus folgt, wenn wir uns des zu Ende des vorigen §. Gefundenen erinnern, die Richtigkeit der folgenden Construction. „Man nehme in dem einen der beiden vollkommen gleichen Systeme zwei beliebige Ebenen a, b und zwei andere Ebenen α, β, welche jenen respective parallel sind; ferner in dem anderen Systeme die diesen Ebenen entsprechenden Ebe-

§. 21. nen a', b' und α', β'; durch die Durchschnitte f_a, f_α der Ebenen a und a', α und α' lege man eine Ebene A, durch die Durchschnitte f_b, f_β der Ebenen b und b', β und β' eine Ebene B, so werden sich diese Ebenen A, B in einer Geraden g schneiden, und diese Gerade g giebt die Richtung der Situationsachse an. Nunmehr nehme man in dem einen Systeme eine beliebige auf der Richtung der Geraden g senkrechte Ebene C, und in dem anderen Systeme die entsprechende Ebene C', welche auf derselben Geraden senkrecht seyn wird. Fallen diese beiden Ebenen C, C' auf einander, so ist die Gerade g selbst die gesuchte Situationsachse. Fallen die Ebenen C, C', wie es im Allgemeinen der Fall seyn wird, nicht auf einander, und wird die Gerade f_a von der Ebene C in einem Punkt p_a und von der Ebene C' in einem Punkte p'_a geschnitten, wird ferner die Gerade f_b von der Ebene C in einem Punkte p_b und von der Ebene C' in einem Punkte p'_b getroffen; so errichte man in den Punkten p_a, p_b auf der Ebene C zwei Perpendikel, welche die Ebene C' in den Punkten p''_a, p''_b treffen, und lege nun durch p''_a eine Ebene a'' der Ebene a, und durch p''_b eine Ebene b'' der Ebene b parallel, halbire den Neigungswinkel der Ebenen a' und a'' durch eine Ebene E_a und den Neigungswinkel der Ebenen b' und b'' durch eine Ebene E_b, dann ist der Durchschnitt der Ebenen E_a u. E_b die verlangte Situationsachse." Wird das erste System, der Richtung dieser Situationsachse parallel, verschoben, bis die Ebenen C u. C' zusammen fallen, und sodann um diese Achse gedreht, bis der Cosinus des Drehungswinkels

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(m''' + n'' + p' - 1) \quad ,$$

so kommen beide Systeme zur Congruenz.

§. 22.

Zwei Systeme, von welchen das eine aus Punkten, die sämmtlich in einer und derselben gegebenen Ebene liegen, das andere aber aus Geraden im Raume besteht, und welche in einer solchen Beziehung zu einander stehen, daß jedem Punkte der gegebenen Ebene eine Gerade im Raume dergestalt entspricht, daß wenn drei Punkte des ebenen Systems in gerader Linie liegen, die drei ihnen entsprechenden Geraden sich in einer Ebene befinden, wollen wir central-collineare Systeme nennen. Da eine jede Gerade in der Ebene durch zwei Punkte, und eine jede Ebene im Raume durch zwei in ihr liegende Gerade vollkommen bestimmt ist, so können, nach der aufgestellten Definition, allen Punkten einer und derselben Geraden in der gegebenen Ebene nur Punkte einer und derselben Ebene im Raume entsprechen, oder, mit anderen Worten, in central-collinearen Systemen entspricht einer Geraden g in der gegebenen Ebene eine

eine Ebene G im Raume. Einer Geraden g in der gegebenen Ebene, welche zwei Punkte d_1, d_2 derselben verbindet, entspricht eine Ebene G im Raume, welche die den Punkten d_1, d_2 entsprechenden Geraden D_1, D_2 enthält. Dem Durchschnittspunkte d zweier Geraden g_1, g_2 in dem ebenen Systeme entspricht die Durchschnittslinie D der Ebenen G_1, G_2, welche den Geraden g_1, g_2 entsprechen; denn da der Punkt d auf den Geraden g_1, g_2 liegt, so muß die ihm entsprechende Gerade D auf den Ebenen G_1, G_2 liegen und somit deren Durchschnittslinie seyn. §. 22.

Aufgabe [40]. *Diejenigen Gleichungen zu finden, durch welche die Relation zweier central-collinearen Systeme ausgedrückt wird.*

Wir beziehen die Punkte der gegebenen Ebene auf zwei beliebige in ihr liegende rechtwinklige oder schiefwinklige Achsen durch die Coordinaten t, u, und die Punkte im Raume auf drei beliebige rechtwinklige oder schiefwinklige Achsen durch die Coordinaten x, y, z. Soll nun dem Punkte tu die, durch die Gleichungen

$$\left\{ x = \alpha z + a \; ; \; y = \beta z + b \right\}$$

ausgedrückte Gerade entsprechen, so müssen α, β, a und b von t und u auf eine bestimmte Weise abhängig, d. i. es müssen diese Größen Functionen von t und u seyn, so daß $\alpha = \varphi_1(t,u)$; $\beta = \varphi_2(t,u)$; $a = f_1(t,u)$; $b = f_2(t,u)$ ist. Alsdann sind die Gleichungen der, dem Punkte tu entsprechenden Geraden

$$\left\{ x = \varphi_1(t,u)\cdot z + f_1(t,u) \; ; \; y = \varphi_2(t,u)\cdot z + f_2(t,u) \right\},$$

aus welchen wir, wenn die genannten Functionen bekannt wären, u und t in x, y, z ausdrücken könnten. Hieraus folgt, daß u und t Functionen von x, y, z sind, daß also $u = \psi_1(x,y,z)$; $t = \psi_2(x,y,z)$ ist. Wenn daher

$$gu + ht + k = 0$$

die Gleichung irgend einer Geraden in der Ebene der tu ist, so wird die Gleichung der ihr entsprechenden Ebene

$$g\psi_1(x,y,z) + h\psi_2(x,y,z) + k = 0$$

seyn. Da aber diese Gleichung, was auch immer g, h und k für Werthe haben mögen, als die Gleichung einer Ebene, nur vom ersten Grade seyn darf, so wird sie die Form

$$g(m''z+n''y+p''x+q'')+h(m'z+n'y+p'x+q')+k(mz+ny+px+1) = 0$$

haben, woraus sich denn ergiebt, daß

§. 22.

$$u = \psi_1(x, y, z) = \frac{m''z + n''y + p''x + q''}{mz + ny + px + 1}$$
$$t = \psi_2(x, y, z) = \frac{m'z + n'y + p'x + q'}{mz + ny + px + 1} \qquad (1)$$

ist *). Bezeichnen wir, der Kürze wegen, die Zähler und den Nenner dieser Ausdrücke durch A, B und D, so daß also

$$u = \frac{A}{D} \quad ; \quad t = \frac{B}{D} \qquad (2)$$

ist; so entspricht einer Geraden im Systeme tu, deren Gleichung

$$gu + ht + k = 0 \qquad (3)$$

seyn mag, die Ebene im Systeme xyz, deren Gleichung

$$gA + hB + kD = 0 \qquad (4)$$

ist. Diese Gleichung (4) wird, welche Werthe g, h, k auch haben mögen, durch diejenigen Werthe von x, y, z befriedigt, welche den Gleichungen

$$A = 0 \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad D = 0$$

zu gleicher Zeit genügen; es gehen demnach alle Ebenen des Systems xyz, welche geraden Linien in der Ebene der tu entsprechen, durch einen bestimmten Punkt O. Diesen Punkt, der auch in unendlicher Entfernung liegen kann, nennen wir das Centrum der Collineation.

Einem Punkte in der Ebene der tu, dessen Coordinaten $u = b$ und $t = a$ sind, entspricht eine Gerade im Raume, deren Gleichungen, durch Substitution aus (2),

$$\{ \; A = bD \quad ; \quad B = aD \; \} \qquad (5)$$

gefunden werden. Da diese Gleichungen offenbar durch die Coordinaten des Centrums der Collineation O befriedigt werden, so gehen alle Geraden des Systems xyz, welche Punkten in der Ebene der tu entsprechen, durch dieses Centrum.

Umgekehrt entspricht einer durch das Centrum O gehenden Ebene eine Gerade in der Ebene der tu. Denn jede durch den Punkt O gehende Ebene in dem Systeme xyz kann durch eine Gleichung von der Form

*) Die hier gefundenen Gleichungen (1) ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (1) des §. 15, wenn man in diesen $m''' = n''' = p''' = q''' = 0$ setzt, wodurch, für alle Werthe von x, y, z sogleich $v = 0$ wird, und demzufolge alle Punkte des Systems tuv in der Ebene der tu liegen. Um aber zu zeigen, daß die obigen Gleichungen (1) nicht nur den Bedingungen der Aufgabe genügen, sondern, daß sie sie erschöpfend befriedigen, ist die oben gemachte Herleitung nöthig.

$$gA + hB + kD = 0$$ §. 22.

dargestellt werden (§. 7. S. 8); und setzen wir, in Folge von (2), für A und B respective Du und Dt, so kommt

$$gu + ht + k = 0 \quad ,$$

wodurch eine Gerade in der Ebene der tu ausgedrückt ist. Und einer durch das Centrum O gehenden Geraden entspricht ein Punkt in der Ebene der tu. Denn jede in dem Systeme xyz durch den Punkt O gehende Gerade kann durch zwei Gleichungen von der Form

$$\left| \; A = bD \quad ; \quad B = aD \; \right|$$

dargestellt werden (§. 7. S. 9); und setzen wir für A und B respective Du und Dt, so kommt

$$u = b \quad ; \quad t = a \quad ,$$

wodurch ein Punkt in der Ebene der tu ausgedrückt ist.

Wir sehen also, daß, so wie das System tu nur aus Punkten besteht, die sämmtlich in einer Ebene liegen, das System xyz auch nur aus Geraden besteht, die sich in einem Punkte O schneiden.

Es ist noch zu bemerken, daß die Ebene D = 0 nur solche Gerade des Systems xyz enthält, welche unendlich entfernten Punkten in der Ebene tu entsprechen, weil für D = 0 sowohl t = ∞ als u = ∞ wird.

Die 11 Coefficienten m, n, p, m′, ꝛc. können bestimmt werden, wenn, außer dem Centrum der Collineation, vier Punkte d_1, d_2, d_3, d_4 in der Ebene der tu, von welchen nicht drei in einer Geraden liegen, und die vier ihnen entsprechenden, sich in dem Centrum schneidenden Geraden D_1, D_2, D_3, D_4 im Systeme xyz, von welchen also auch nicht drei in einer Ebene enthalten, gegeben sind. Denn da die Geraden des Systems xyz sich sämmtlich in dem Centrum schneiden, so müssen die Zähler und der Nenner der Ausdrücke (4) von den gegebenen Coordinaten dieses Punktes befriedigt werden, was uns drei Bedingungsgleichungen vom ersten Grade für die genannten Coefficienten liefert. Setzen wir nun auch die Coordinaten der gegebenen vier Punkte d_1, d_2, d_3, d_4, und respective die Coordinaten von vier Punkten δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, welche in den gegebenen Geraden D_1, D_2, D_3, D_4 liegen, nach einander in die Gleichungen (1), so erhalten wir zwei mal vier, also noch acht Gleichungen vom ersten Grade zwischen jenen Coefficienten. Wir haben demnach 11 Gleichungen vom ersten Grade, aus welchen die 11 Coefficienten im Allgemeinen bestimmt werden können.

§. 22. Ein anderes System $t'u'$ von Punkten in einer Ebene, welches mit dem Systeme tu collinear-verwandt ist, stehet mit dem Systeme xyz in der Beziehung der Central-Collineation. Denn sind die Systeme tu und $t'u'$ durch die Gleichungen (I. §. 11. G. 2)

$$u' = \frac{g''u + h''t + k''}{gu + ht + k} \quad ; \quad t' = \frac{g'u + h't + k'}{gu + ht + k} \qquad (6)$$

auf einander bezogen, so erhalten wir durch Elimination von t u. u zwischen den Gleichungen (2) und (6) auf der Stelle

$$u' = \frac{g''A + h''B + k''D}{gA + hB + kD} \quad ; \quad t' = \frac{g'A + h'B + k'D}{gA + hB + kD} \,, \qquad (7)$$

zwei Ausdrücke, deren Zähler und Nenner lineare Functionen von x, y, z, und deren Nenner einander gleich sind; und da diese Zähler und Nenner offenbar durch diejenigen Werthe von x, y, z annullirt werden, welche zu gleicher Zeit die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$ befriedigen, so ist der Punkt O, welcher das Centrum der Collineation der Systeme tu und xyz, auch das Centrum der Systeme $t'u'$ und xyz.

Sind es die Gleichungen

$$u = \frac{\gamma''u' + \delta''t' + \varkappa''}{\gamma u' + \delta t' + 1} \quad ; \quad t = \frac{\gamma'u' + \delta't' + \varkappa'}{\gamma u' + \delta t' + 1} \,,$$

welche die Beziehung der collinearen Systeme tu und $t'u'$ ausdrücken, so erhalten wir vermittelst der Gleichungen (1)

$$\frac{\gamma''u' + \delta''t' + \varkappa''}{\gamma u' + \delta t' + 1} = \frac{m''z + n''y + p''x + q''}{mz + ny + px + 1} \,;\; \frac{\gamma'u' + \delta't' + \varkappa'}{\gamma u' + \delta t' + 1} = \frac{m'z + n'y + p'x + q'}{mz + ny + px + 1} \,, \quad (8)$$

und auch diese Gleichungen können benutzt werden, um alle Beziehungen aufzufinden, welche zwischen zwei central-collinearen Systemen Statt haben. Vermittelst derselben finden wir, da die Gleichungen (1) oder (8) ihre Form behalten, wenn wir sie in rechtwinklige Coordinaten transformiren, ganz nach derselben Weise, die wir in §. 15 und in I. §. 11 ausgeführt haben, das Folgende:

Fället man im Systeme xyz von zwei beliebigen Punkten δ_1, δ_2 auf zwei beliebige, durch das Centrum O gehende Ebenen G_1, G_2 vier Perpendikel, deren Länge man durch δ_1G_1, δ_1G_2, δ_2G_1, δ_2G_2 bezeichnet; fället man ferner im Systeme tu, von denjenigen beiden Punkten d_1, d_2, welche den Geraden $O\delta_1$, $O\delta_2$ entsprechen, Perpendikel auf diejenigen Geraden g_1, g_2, welche den Ebenen G_1, G_2 entsprechen, und bezeichnet die Längen dieser Senkrechten durch d_1g_1, d_1g_2, d_2g_1, d_2g_2; so ist

$$\frac{d_1 g_1}{d_1 g_2} : \frac{d_2 g_1}{d_2 g_2} = \frac{\delta_1 G_1}{\delta_1 G_2} : \frac{\delta_2 G_1}{\delta_2 G_2} \quad . \tag{9}$$

Es entsprechen aber den Punkten d_1, d_2 die Geraden $O\delta_1$, $O\delta_2$, die wir deshalb D_1, D_2 nennen; und wenn wir die Winkel, welche diese Geraden D_1, D_2 respective mit den Ebenen G_1, G_2 bilden, durch (D_1, G_1), (D_1, G_2), (D_2, G_1), (D_2, G_2) bezeichnen, so ist $\delta_1 G_1 = O\delta_1 \sin(D_1, G_1)$, $\delta_1 G_2 = O\delta_1 \sin(D_1, G_2)$, $\delta_2 G_1 = O\delta_2 \sin(D_2, G_1)$, $\delta_2 G_2 = O\delta_2 \sin(D_2, G_2)$, also in Folge von (9)

$$\frac{d_1 g_1}{d_1 g_2} : \frac{d_2 g_1}{d_2 g_2} = \frac{\sin(D_1, G_1)}{\sin(D_1, G_2)} : \frac{\sin(D_2, G_1)}{\sin(D_2, G_2)} \quad . \tag{10}$$

Nicht nur die Perpendikel $\delta_1 G_1$, $\delta_2 G_1$, ꝛc. stehen mit den Senkrechten $d_1 g_1$, $d_2 g_1$, ꝛc., in der angegebenen Proportion (9), sondern jede acht Gerade, die respective von den Punkten δ_1, δ_2 an die Ebenen G_1, G_2, und von den Punkten d_1, d_2 an die Geraden g_1, g_2 gezogen sind, wenn sie mit jenen Perpendikeln, also auch mit den zuletzt genannten Ebenen und Geraden gleiche Winkel bilden. Hieraus ergiebt sich denn leicht der Satz:

Sind d_1, d_2, d_3, d_4 vier in gerader Linie liegende Punkte des Systems tu und D_1, D_2, D_3, D_4 die vier diesen Punkten entsprechenden Geraden des Systems xyz, welche folglich in einer Ebene liegen, so ist, wenn (D_1, D_2), (D_1, D_3), (D_2, D_4), (D_3, D_4) die Winkel bezeichnen, welche die genannten Geraden mit einander bilden, und wenn $d_1 d_2$, $d_1 d_3$, $d_2 d_4$, $d_3 d_4$ die durch die Punkte d_1, d_2, d_3, d_4 auf ihrer Geraden begrenzten Abschnitte bedeuten,

$$\frac{d_1 d_2}{d_2 d_4} : \frac{d_1 d_3}{d_3 d_4} = \frac{\sin(D_1, D_2)}{\sin(D_2, D_4)} : \frac{\sin(D_1, D_3)}{\sin(D_3, D_4)} \quad . \tag{11}$$

Irgend eine Ebene E im Raume, welche nicht durch das Centrum O gehet, wird von einer Geraden D des Systems xyz, welche einem Punkte d des Systems tu entspricht, in einem Punkte δ geschnitten. Ist die Lage der Ebene E bekannt, so können wir die Beziehung, welche zwischen den Punkten d des Systems tu und den Punkten δ der Ebene Statt hat, leicht auffinden. Denn nehmen wir an, daß in den Gleichungen (1) die Coordinaten so transformirt werden, daß die Ebene E die Ebene der xy wird, wodurch diese Gleichungen (1) ihre Form im Allgemeinen nicht ändern, so haben wir, um die genannte Beziehung zu finden, nur $z = 0$ zu setzen. Wir erhalten dadurch auf der Stelle

$$u = \frac{n''y + p''x + q''}{ny + px + 1} \quad ; \quad t = \frac{n'y + p'x + q'}{ny + px + 1} \quad ;$$

§. 22. woraus denn folgt, daß das System von Punkten in der Ebene der tu zu dem Systeme von Punkten in der Ebene E in der Verwandtschaft der Collineation stehet. Man sieht leicht ein, daß auch der umgekehrte Satz wahr ist, nämlich: Sind A und E zwei ebene collinear-verwandte Systeme (die auch einander affin, oder ähnlich oder gleich seyn können), und ist O ein außerhalb der Ebene E liegender Punkt, so ist das System A mit demjenigen Systeme central-collinear, welches entstehet, wenn alle Punkte des Systems E mit dem Punkte O durch gerade Linien verbunden werden.

Ist daher das System in der Ebene tu, und sind außerdem vier in dem Centrum O zusammentreffende Gerade des Systems xyz gegeben, welche vier bestimmten Punkten jener Ebene entsprechen, so können wir, vorausgesetzt, daß nicht drei von jenen Geraden in einer Ebene, und also auch nicht drei von diesen Punkten in gerader Linie liegen, das System xyz dadurch construiren, daß wir die vier Geraden im Raume durch eine beliebige Ebene E schneiden, und sodann in dieser Ebene ein dem Systeme tu collineares System verzeichnen, in welchem die vier Durchschnittspunkte der genannten Geraden den vier bestimmten Punkten in dem Systeme tu entsprechen (I. §. 11. Aufg. 20); und sodann jeden Punkt δ der Ebene E, welcher einem Punkte d der Ebene tu homolog ist, mit dem Punkte O durch eine Gerade $O\delta$ verbinden, welche, unbegrenzt verlängert, dem Punkte d entsprechen wird.

Wir haben vorher gesehen, daß das System von Punkten δ, in welchen eine Ebene E im Raume die Geraden D des Systems xyz schneidet, mit dem System tu collinear-verwandt ist. Legen wir nun eine zweite Ebene E′, welche nicht durch den Mittelpunkt geht, so erhalten wir ein zweites System von Punkten δ', welches ebenfalls mit dem Systeme tu collinear-verwandt ist. Es folgt hieraus, daß beide Systeme E und E′ in der Verwandtschaft der Collineation stehen (I. §. 11.).

Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten x, y, z nach dem Centrum O, so ist klar, daß die constanten Glieder in den Zählern und Nennern der Ausdrücke (1) verschwinden, und daß also dadurch die Form der Gleichungen (1) in

$$u = \frac{m''z + n''y + p''x}{mz + ny + x} \quad ; \quad t = \frac{m'z + n'y + p'x}{mz + ny + x}$$

umgewandelt wird. Transformiren wir jetzt x, y, z, die wir, wie oben, als rechtwinklig annehmen, in Polarcoordinaten der vierten Art, indem wir von den Formeln (10) des §. 1. Gebrauch machen, so erhalten wir

$$u = \frac{m''tg\tau' + n''tgt' + p''}{mtg\tau' + ntgt' + 1} \quad ; \quad t = \frac{m'tg\tau' + n'tgt' + p'}{mtg\tau' + ntgt' + 1} \, , \quad (12)$$ §. 22.

zwei Gleichungen, welche mit den Gleichungen (2) in (I. §. 11) genau dieselbe Form haben.

Vermittelst der Central-Collineation lassen sich aus vielen Sätzen, welche sich auf ebene Figuren beziehen, analoge Sätze von pyramidalischen Körpern ableiten, welche sodann keines Beweises mehr bedürfen. Ein Beispiel wird zur Bestätigung hinreichen; wir wählen dazu die beiden zu Ende des §. 21. (I. S. 70 u. 71) neben einander gestellten Sätze, denen wir die daraus abgeleiteten Sätze gegenüberstellen.

Wenn die n Seitenlinien eines n-seitigen Polygons sich um eben so viele feste, in gerader Linie befindliche Punkte drehen, während (n—1) Eckpunkte desselben sich auf (n—1) festen Geraden bewegen, so beschreibt der nte Eckpunkt eine gerade Linie.

Wenn die n Seitenebenen einer n-seitigen Pyramide sich um eben so viele feste, in einer durch den Scheitel der Pyramide gehenden Ebene befindliche Punkte drehen, während (n—1) Seitenkanten derselben, sich auf (n—1) festen, den Scheitel der Pyramide enthaltenden Ebenen bewegen, so beschreibt die nte Seitenkante eine Ebene.

Wenn die n Eckpunkte eines n-seitigen Polygons sich auf eben so vielen, durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden bewegen, während die (n—1) Seitenlinien desselben sich um (n—1) feste Punkte drehen, so dreht sich die nte Seitenlinie ebenfalls um einen festen Punkt.

Wenn die n Seitenkanten einer n-seitigen Pyramide sich auf eben so vielen, eine und dieselbe durch den Scheitel gehende Gerade enthaltenden Ebenen bewegen, während die (n—1) Seitenebenen derselben sich um (n—1) feste, durch den Scheitel gehende Gerade drehen, so dreht sich die nte Seitenebene ebenfalls um eine feste durch den Scheitel gehende Gerade.

Um auf diese Weise aus einem Satze von Punkten und geraden Linien in der Ebene einen anderen Satz von Geraden und Ebenen im Raume zu bilden, ist, wie man sieht, weiter nichts nöthig, als für „Punkte" „Gerade, welche sich in einem Centrum schneiden," und für „gerade Linien" „Ebenen, welche durch dasselbe Centrum gehen" zu setzen.

Von der Reciprocität.

§. 23.

Zwei Systeme von Punkten, welche in einer solchen Beziehung stehen, daß jedem Punkte des einen Systems eine Ebene des andern Systems und auch zugleich jedem Punkte des zweiten Systems eine Ebene des ersten Systems entspricht, heißen reciproke Systeme. Der Punkt und die ihm entsprechende Ebene werden in Beziehung auf einander Pol und Polarebene genannt.

Aufgabe [41]. Diejenige Gleichung zu finden, durch welche die Reciprocität zweier Systeme ausgedrückt wird.

Es seyen x, y, z die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines Punktes in dem einen Systeme, und t, u, v die rechtwinkligen oder schiefwinkligen, auf dieselben oder auf andere Achsen bezogenen, Coordinaten eines Punktes im reciproken Systeme. Soll nun dem Punkte xyz die Ebene, deren Gleichung

$$mv + nu + pt + q = 0$$

ist, entsprechen, so müssen m, n, p und q von x, y und z abhängig, also $m = \varphi_1(x,y,z)$, $n = \varphi_2(x,y,z)$, $p = \varphi_3(x,y,z)$ und $q = \varphi_4(x,y,z)$ seyn, so daß diese dem Punkte xyz entsprechende Ebene durch die Gleichung

$$\varphi_1(x,y,z)\cdot v + \varphi_2(x,y,z)\cdot u + \varphi_3(x,y,z)\cdot t + \varphi_4(x,y,z) = 0$$

ausgedrückt ist. Damit aber, in Folge dieser Relation zwischen x, y, z, t, u und v, dem Punkte tuv eine Ebene im Systeme xyz entspreche, muß diese Gleichung auch in Beziehung auf x, y, z vom ersten Grade seyn; was nur der Fall ist, wenn φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 Functionen des ersten Grades sind, so daß also die gesuchte Gleichung

$$(az + by + cx + d)v + (a'z + b'y + c'x + d')u + (a''z + b''y + c''x + d'')t + a'''z + b'''y + c'''x + 1 = 0 \quad (1)$$

ist. Diese Gleichung, in welcher wir die Constanten a, b, c 2c. als gegeben betrachten, und welcher wir auch die Form

$$(av + a'u + a''t + a''')z + (bv + b'u + b''t + b''')y + (cv + c'u + c''t + c''')x + dv + d'u + d''t + 1 = 0 \quad (2)$$

geben können, drückt also wenn wir z, y, z constant setzen, die Polarebene des Punktes xyz, und wenn wir t, u, v constant setzen die Polarebene des Punktes tuv aus.

§. 23. Die Coordinaten des Pols einer Polarebene, deren Gleichung

$$mv + nu + pt + 1 = 0$$

gegeben ist, finden wir, indem wir diese Gleichung der Gleichung (1) identisch setzen, woraus die Gleichungen

$$\frac{az + by + cx + d}{a'''z + b'''y + c'''x + 1} = m \; ; \; \frac{a'z + b'y + c'x + d'}{a'''z + b'''y + c'''x + 1} = n \; ; \; \frac{a''z + b''y + c''x + d''}{a'''z + b'''y + c'''x + 1} = p \quad (3)$$

hervorgehen, welche x, y, z zu bestimmen im Allgemeinen hinreichend sind.

Ist nur ein Punkt $t'u'v'$ einer Polarebene im Systeme tuv gegeben, so ist diese Ebene nicht gänzlich bestimmt; es ist daher auch der Pol xyz dieser Ebene nicht gänzlich bestimmt, sondern nur die Relation

$$(az + by + cx + d)v' + (a'z + b'y + c'x + d')u' + (a''z + b''y + c''x + d'')t' \\ + a'''z + b'''y + c'''x + 1 = 0 \quad , \qquad (4)$$

welche aus der Gleichung (1) durch Substitution von t', u', v' für t, u, v hervorgehet, und welcher auch die Form

$$(av' + a'u' + a''t' + a''')z + (bv' + b'u' + b''t' + b''')y + (cv' + c'u' + c''t' + c''')x \\ + dv' + d'u' + d''t' + 1 = 0 \qquad (5)$$

gegeben werden kann. Der Ort der Pole aller Ebenen, welche durch den Punkt $t'u'v'$ gehen, ist folglich die durch die Gleichung (5) ausgedrückte Ebene, und da durch diese selbige Gleichung (5) die Polarebene des Punktes $t'u'v'$ dargestellt wird, so folgt, daß der Ort der Pole aller Ebenen, welche durch einen Punkt p gehen, die Polarebene dieses Punktes p ist. Wir haben also folgende allgemeine Eigenschaft zweier reciproken Systeme: *Die Pole von drei oder mehreren Ebenen, welche sich in einem Punkte schneiden, liegen in einer Ebene, der Polarebene dieses Punktes; und umgekehrt, die Polarebenen von drei oder mehreren Punkten, welche in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem Punkte, dem Pol dieser Ebene.* Dies läßt sich auch auf folgende Weise ausdrücken: *Dreht sich eine Ebene um einen in ihr liegenden Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf einer Ebene, der Polarebene jenes Punktes; und umgekehrt, bewegt sich ein Punkt auf einer Ebene, so dreht sich seine Polarebene um einen Punkt, den Pol dieser Ebene.*

Dreht sich eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade g, so ist dies eben so viel, als drehte sie sich zugleich um zwei Punkte dieser Geraden; der Pol jener Ebene muß sich also zugleich auf zwei Ebenen, nämlich auf den Polarebenen der beiden Punkte, bewegen, folglich beschreibt er die Durch-

§ 23. schnittslinie g' dieser Polarebenen; und umgekehrt, bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden g', so dreht sich seine Polarebene um eine Gerade g, nämlich um die Durchschnittslinie der Polarebenen von irgend zwei Punkten jener Geraden. Jeder Geraden g des einen Systems entspricht daher gewissermaßen eine Gerade g' des reciproken Systems. Wir sagen gewissermaßen; denn es entsprechen den Punkten der Geraden g nicht, wie bei der Collineation, die in der Geraden g' liegenden Punkte, sondern den Punkten der Geraden g entsprechen die, die Gerade g' enthaltenden, Ebenen, und umgekehrt. Zwei Gerade g und g', welche auf diese Weise einander entsprechen, nennen wir reciproke Gerade. Aus dem bisher Gezeigten ergiebt sich nun folgende allgemeine Eigenschaft der reciproken Geraden: Schneiden sich drei oder mehrere Gerade in einem Punkte, so liegen ihre reciproken Geraden in einer Ebene, und umgekehrt, liegen drei oder mehrere Gerade in einer Ebene, so schneiden sich ihre reciproken Geraden in einem Punkte.

Wenn die Gleichungen einer Geraden in dem einen Systeme gegeben sind, können wir die Gleichungen ihrer reciproken Geraden in dem anderen Systeme dadurch finden, daß wir die, jene gegebenen Gleichungen befriedigenden Coordinaten zweier Punkte $x'y'z'$ und $x''y''z''$ der ersteren Geraden nach einander für x, y, z in die allgemeine Gleichung (1) der Polarebene setzen, wodurch wir die Gleichungen zweier Polarebenen erhalten, welche zusammen genommen die Durchschnittslinie dieser Ebenen, d. i. die reciproke Gerade der gegebenen ausdrücken. Wir können aber auch die gesuchte reciproke Gerade durch Gleichungen ausdrücken, welche keine anderen Constanten, als die in den gegebenen Gleichungen vorkommenden enthalten. Sind nämlich

$$\left\{ \; y = mz + m' \quad ; \quad x = nz + n' \; \right\} \qquad (6)$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden im Systeme xyz, und setzen wir diese Ausdrücke von y und x in die Gleichung (1), so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} \left\{(a+bm+cn)v+(a'+b'm+c'n)u+(a''+b''m+c''n)t+(a'''+b'''m+c'''n)\right\}z \\ +\left\{(bm'+cn'+d)v+(b'm'+c'n'+d')u+(b''m'+c''n'+d'')t+(b'''m'+c'''n'+1)\right\} \end{array}\right\} = 0$$

als Gleichung der Polarebene desjenigen Punktes der gegebenen Geraden (6), dessen Ordinate gleich z ist. Diese Gleichung drückt folglich, wenn wir dem z nach einander alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegen, alle Polarebenen der, in der Geraden (6) liegenden Punkte aus; und da sie befriedigt wird, wenn zu gleicher Zeit

$$\left.\begin{aligned}(a+bm+cn)v+(a'+b'm+c'n)u+(a''+b''m+c''n)t+a'''+b'''m+c'''n &= 0\\ (bm'+cn'+d)v+(b'm'+c'n'+d')u+(b''m'+c''n'+d'')t+b'''m'+c'''n'+1 &= 0\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

ist, was auch immer dem z für ein Werth beigelegt werden mag, so enthalten die eben genannten Polarebenen diejenige Gerade, welche die Gleichungen (7) ausdrücken; es sind folglich die Gleichungen (7) diejenigen der reciproken Geraden der Geraden (6). Wir finden auf dieselbe Weise, daß die reciproke Gerade derjenigen Linie, welche im Systeme tuv durch die Gleichungen

$$u = mv + m' \quad ; \quad t = nv + n' \qquad (8)$$

ausgedrückt ist, durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(a+a'm+a''n)z+(b+b'm+b''n)y+(c+c'm+c''n)x+d+d'm+d''n &= 0\\ (a'm'+a''n'+a''')z+(b'm'+b''n'+b''')y+(c'm'+c''n'+c''')x+d'm'+d''n'+1 &= 0\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

dargestellt wird.

Da drei oder mehrere parallele Ebenen so angesehen werden können, als schnitten sie sich in einer und derselben unendlich entfernten Geraden, so folgt, daß die Pole aller Ebenen, welche einer und derselben Ebene parallel sind, auf einer und derselben Geraden liegen. Dies läßt sich auch auf folgende Art erweisen. Wenn in der Gleichung

$$v = nu + pt + q \qquad (10)$$

n und p constant, q aber veränderlich ist, so drückt sie alle einer bestimmten Ebene parallelen Ebenen aus. Der Pol einer dieser Ebenen ist durch die Gleichungen

$$\frac{a'z+b'y+c'x+d'}{az+by+cx+d} = -n \quad ; \quad \frac{a''z+b''y+c''x+d''}{az+by+cx+d} = -p \quad ;$$

$$\frac{a'''z+b'''y+c'''x+1}{az+by+cx+d} = -q$$

bestimmt. Die beiden ersten dieser drei Gleichungen, welche wir auf die Form

$$\left.\begin{aligned}a'z+b'y+c'x+d'+n(az+by+cx+d) &= 0\\ a''z+b''y+c''x+d''+p(az+by+cx+d) &= 0\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

bringen, drücken aber, da n und p constant sind, eine bestimmte Gerade aus; folglich liegen die Pole aller genannten parallelen Ebenen in einer bestimmten Geraden.

Die Gerade, welche die Pole xyz aller, einer gegebenen Ebene parallelen, Ebenen des Systems tuv enthält, kann der, dieser Ebene conjugirte Durchmesser des Systems xyz genannt werden; und die Gerade, welche die Pole tuv aller, einer gegebenen Ebene parallelen Ebenen des Systems



§. 23. xyz enthält, kann der, dieser Ebene **conjugirte Durchmesser** des Systems tuv heißen.

Alle conjugirten Durchmesser eines Systems schneiden sich im Allgemeinen in **einem** Punkte. Denn die Gleichungen eines Durchmessers (11) im Systeme xyz werden, was auch n und p seyn mögen, von denjenigen Werthen von x, y, z befriedigt, welche den Gleichungen

$$az+by+cx+d=0\ ;\ a'z+b'y+c'x+d'=0\ ;\ a''z+b''y+c''x+d''=0 \quad (12)$$

zugleich genügen; und die Gleichungen eines jeden Durchmessers im Systeme tuv werden durch diejenigen Werthe von t, u, v befriedigt, welche den Gleichungen

$$av+a'u+a''t+a'''=0\ ;\ bv+b'u+b''t+b'''=0\ ;\ cv+c'u+c''t+c'''=0 \quad (13)$$

zugleich genugthun. Jene Werthe von x, y, z und diese Werthe von t, u, v sind offenbar immer einfach und reell; sie sind im Allgemeinen auch bestimmt und endlich. Daher schneiden sich die Durchmesser eines jeden Systems im Allgemeinen in **einem** Punkte. Diesen Punkt nennen wir den **Mittelpunkt** des Systems.

Entwickeln wir aus den Gleichungen (12) die Werthe von x, y und z, so erhalten wir drei Ausdrücke, deren gemeinschaftlicher Nenner

$$ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c \quad (14)$$

ist. Haben nun die neun Coefficienten a, b, c, a', ... c'' solche Werthe, daß dieser Ausdruck (14) verschwindet, so sind die Coordinaten des Mittelpunktes im Systeme xyz entweder gleich ∞ oder gleich $\frac{0}{0}$, d. i. das System xyz hat keinen oder unbestimmt viele Mittelpunkte. — Entwickeln wir aus den Gleichungen (13) die Werthe von t, u und v, so erhalten wir drei Ausdrücke, deren gemeinschaftlicher Nenner ebenfalls der Ausdruck (14) ist. In den speciellen Fällen, in welchen das System xyz keinen oder unbestimmt viele Mittelpunkte hat, hat also auch das System tuv keinen oder unbestimmt viele Mittelpunkte, und umgekehrt.

Jede Ebene, welche den Mittelpunkt eines Systems enthält, werden wir eine **Diametralebene** dieses Systems nennen; wir werden von einem Durchmesser sagen, er sey einer Diametralebene **conjugirt**, wenn er die Pole derjenigen Ebenen enthält, welche dieser Diametralebene parallel sind, und dann werden wir auch diese Diametralebene jenem Durchmesser **conjugirt** nennen.

§. 24.

Die 15 Coefficienten a, b, c, d, a' 2c. können bestimmt werden, wenn die Coordinaten von fünf Punkten des einen Systems, von welchen nicht

vier in einer Ebene liegen, und die fünf Gleichungen ihrer Polarebenen in dem reciproken Systeme, von welchen sich also auch nicht vier in einem Punkte schneiden, gegeben sind. Denn setzen wir in die Gleichungen (3) des vor. §. für x, y, z die gegebenen Coordinaten, und für m, n, p die Coefficienten der gegebenen Gleichungen, so erhalten wir fünf mal drei, also 15 Gleichungen, welche in Beziehung auf a, b, c ꝛc. vom ersten Grade, und zur Bestimmung dieser 15 Coefficienten hinreichend sind. §. 24.

Die Form der Gleichungen (1) und (2) des vor. §. wird durch eine bloße Transformation der Coordinaten nicht geändert, daher können wir, der Allgemeinheit unserer Betrachtungen unbeschadet, annehmen, daß diese Gleichungen sich auf rechtwinklige Coordinaten beziehen. Bezeichnen wir nun, der Kürze wegen, die Gleichung (1) oder (2) des vor. §. durch

$$F(x,y,z,t,u,v) = 0 \quad , \qquad (1)$$

so ist

die Gleichung der Polarebene des Punktes $x'y'z' \ldots F(x',y',z',t,u,v) = 0$, (2)
» » » » » » $x''y''z'' \ldots F(x'',y'',z'',t,u,v) = 0$, (3)
» » » » » » $t'u'v' \ldots F(x,y,z,t',u',v') = 0$, (4)
» » » » » » $t''u''v'' \ldots F(x,y,z,t'',u'',v'') = 0$. (5)

Bezeichnen wir die Resultate der Substitution von x', y', z' und x'', y'', z'' für x, y, z in

$az+by+cx+d$, $a'z+b'y+c'x+d'$, $a''z+b''y+c''x+d''$ durch m', n', p' und m'', n'', p'';

ferner die Resultate der Substitution von t', u', v' und t'', u'', v'' für t, u, v in

$av+a'u+a''t+a'''$, $bv+b'u+b''t+b'''$, $cv+c'u+c''t+c'''$ durch m_1, n_1, p_1 und m_2, n_2, p_2;

und setzen, wiederum der Kürze wegen,

$\sqrt{m'^2+n'^2+p'^2} = \mu'$, $\sqrt{m''^2+n''^2+p''^2} = \mu''$, $\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2} = \mu_1$, $\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2} = \mu_2$; benennen aber die Längen der Perpendikel

von den Punkten $x'y'z'$ und $x''y''z''$ auf die Ebene (4) mit α_1 und α_2,
» » » $x'y'z'$ und $x''y''z''$ » » » (5) » β_1 und β_2,
» » » $t'u'v'$ und $t''u''v''$ » » » (2) » α' und α'',
» » » $t'u'v'$ und $t''u''v''$ » » » (3) » β' und β'',

so haben wir (§. 11. F. 4)

§. 24.
$$\begin{array}{llll} \mu_1\alpha_1 = F(x',y',z',t',u',v') & ; & \mu_1\alpha_2 = F(x'',y'',z'',t',u',v') & ; \\ \mu_2\beta_1 = F(x',y',z',t'',u'',v'') & ; & \mu_2\beta_2 = F(x'',y'',z'',t'',u'',v'') & ; \\ \mu'\alpha' = F(x',y',z',t',u',v') & ; & \mu'\alpha'' = F(x',y',z',t'',u'',v'') & ; \\ \mu''\beta' = F(x'',y'',z'',t',u',v') & ; & \mu''\beta'' = F(x'',y'',z'',t'',u'',v'') & . \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$\frac{\alpha_1 \cdot \beta'}{\alpha_2 \cdot \beta''} = \frac{\alpha' \cdot \beta_1}{\alpha'' \cdot \beta_2} \; ,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} : \frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{\beta_1}{\beta_2} : \frac{\beta'}{\beta''} \text{ oder } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} : \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha'}{\alpha''} : \frac{\beta'}{\beta''} \qquad (6)$$

Wir haben daher den

Lehrsatz [10]. *Wenn man zwei Punkte A, B in einem Systeme, ferner zwei Punkte C′, D′ in einem reciproken Systeme beliebig annimmt; von den Punkten A, B auf die Polarebene c, d von C′, D′ die Senkrechten Ac, Ad, Bc, Bd, von den Punkten C′, D′ aber auf die Polarebenen a′, b′ von A, B die Senkrechten C′a′, C′b′, D′a′, D′b′ fällt; so ist*

$$\frac{Ac}{Bc} : \frac{Ad}{Bd} = \frac{C'a'}{D'a'} : \frac{C'b'}{D'b'} \; .$$

Zwei Systeme die mit einem dritten in der Beziehung der Reciprocität stehen, sind einander collinear-verwandt. Denn sind x, y, z und x′, y′, z′ die Coordinaten der beiden zuerst genannten Systeme, a, b, c, d, a′ ꝛc. die Constanten für das erste und dritte, f, g, h, k, f′ ꝛc. diejenigen für das zweite und dritte, sind ferner t, u, v die Coordinaten des dritten Systems, und ist

$$mv + nu + pt + 1 = 0$$

die Gleichung einer Ebene in diesem letzten Systeme, so haben wir

$$\frac{az+by+cx+d}{a'''z+b'''y+c'''x+1} = m \; ; \quad \frac{a'z+b'y+c'x+d'}{a'''z+b'''y+c'''x+1} = n \; ;$$

$$\frac{a''z+b''y+c''x+d''}{a'''z+b'''y+c'''x+1} = p \; ;$$

$$\frac{fz'+gy'+hx'+k}{f'''z'+g'''y'+h'''x'+1} = m \; ; \quad \frac{f'z'+g'y'+h'x'+k'}{f'''z'+g'''y'+h'''x'+1} = n \; ;$$

$$\frac{f''z'+g''y'+h''x'+k''}{f'''z'+g'''y'+h'''x'+1} = p \; ;$$

folglich auch § 24.

$$\frac{az+by+cx+d}{a'''z+b'''y+c'''x+1} = \frac{fz'+gy'+hx'+k}{f'''z'+g'''y'+h'''x'+1} \; ;$$

$$\frac{a'z+b'y+c'x+d'}{a'''z+b'''y+c'''x+1} = \frac{f'z'+g'y'+h'x'+k'}{f'''z'+g'''y'+h'''x'+1} \; ;$$

$$\frac{a''z+b''y+c''x+d''}{a'''z+b'''y+c'''x+1} = \frac{f''z'+g''y'+h''x'+k''}{f'''z'+g'''y'+h'''x'+1} \; ;$$

drei Gleichungen, welche, zufolge (§. 15. S. 3), die Verwandtschaft der Collineation zwischen den beiden Systemen xyz und $x'y'z'$ ausdrücken.

§. 25.

Nehmen wir an, daß die Gleichungen (1) u. (2) des vor. §. sich auf dieselben rechtwinkligen Coordinatenachsen beziehen, so ist die Polarebene eines Punktes $x_1y_1z_1$, wenn er als ein Punkt des Systems xyz angesehen wird, durch die Gleichung

$$(az_1+by_1+cx_1+d)v+(a'z_1+b'y_1+c'x_1+d')u+(a''z_1+b''y_1+c''x_1+d'')t + a'''z_1+b'''y_1+c'''x_1+1 = 0 \quad , \qquad (7)$$

und wenn er als ein Punkt des Systems tuv betrachtet wird, durch die Gleichung

$$(az_1+a'y_1+a''x_1+a''')z+(bz_1+b'y_1+b''x +b''')y+(cz_1+c'y_1+c''x_1+c''')x + dz_1+d'y_1+d''x_1+1 = 0 \qquad (8)$$

ausgedrückt. Diese beiden Gleichungen (7, 8) drücken im Allgemeinen nicht dieselbe Ebene aus. Sollen die Polarebenen eines und desselben beliebig angenommenen Punktes in beiden Systemen zusammen fallen, so muß, wenn nicht etwa $a = b' = c'' = 0$ (ein Fall, von dem im §. 27 die Rede seyn wird),

$$a' = b \;\; ; \;\; a'' = c \;\; ; \;\; a''' = d \;\; ; \;\; b'' = c' \;\; ; \;\; b''' = d' \;\; ; \;\; c''' = d'' \quad (9)$$

seyn. Es läßt sich nun aber, im Allgemeinen, durch eine bloße Verlegung des einen der beiden Systeme bewirken, daß diese sechs Bedingungen erfüllt werden. Denn verändert man die Lage des Systems xyz, so ändert sich auch die Lage der Achsen dieses Systems, und man hat daher, um das System xyz in seiner neuen Lage auf diejenigen Achsen zu beziehen, auf welche vorher beide Systeme bezogen waren, die Coordinaten x, y, z zu transformiren. Durch diese Transformation werden aber in die Gleichung (1) des §. 23 sechs Größen, nämlich die drei Coordinaten des neuen Anfangspunktes und die in §. 13 mit φ, ψ und ϑ bezeichneten Winkel eingeführt, wodurch nun gerade eben so viele unbestimmte Größen als Bedingungsglei-

§. 25. chungen vorhanden sind. Nehmen wir jetzt an, diese sechs Größen seyen so bestimmt worden, daß die Bedingungsgleichungen (9) erfüllt werden, und haben durch diese Bestimmung reelle Werthe erhalten, so nimmt die Gleichung (1) des §. 23. die Form

$$(az + b'x + c'y + a'')v + (by + a'x + c'z + b'')u + (cx + a'y + b'z + c'')t + a''z + b''y + c''x + d = 0 \qquad (10)$$

oder, was dasselbe ist, die Form

$$(av + b't + c'u + a'')z + (bu + a't + c'v + b'')y + (ct + a'u + b'v + c'')x + a''v + b''u + c''t + d = 0 \qquad (11)$$

an, wo a, b, c, a' ꝛc. Größen bedeuten, die von den vorher eben so bezeichneten Quantitäten verschieden sind; und nun entspricht einem jeden Punkte immer dieselbe Polarebene, man mag ihn als einen Punkt des Systems xyz oder des Systems tuv ansehen; ferner entspricht einer jeden Ebene derselbe Pol und einer jeden Geraden dieselbe reciproke Gerade, man mag diese Ebene und diese Gerade als zu dem einen oder zu dem anderen Systeme gehörend betrachten.

Die Symmetrie, welche in der Gleichung (10) oder (11) herrscht, tritt noch deutlicher heraus, wenn man sie wie folgt schreibt

$$azv + byu + cxt + a'(xu + yt) + b'(xv + zt) + c'(yv + zu) + a''(v + z) + b''(u + y) + c''(t + x) + d = 0 \ ;$$

und diese Symmetrie bleibt bestehen, wenn man die gemeinschaftlichen rechtwinkligen Achsen beider Systeme, in andere rechtwinklige oder schiefwinklige Achsen verwandelt, ohne die jetzige Lage der beiden Systeme gegen einander zu ändern.

Zwei reciproke Systeme, welche die angegebene Lage haben, werden wir reciprok-liegend nennen.

Wir bemerken sogleich, daß bei dieser reciproken Lage die Mittelpunkte beider Systeme, wenn es dergleichen giebt, auf einander liegen. Denn die Gleichungen (12 u. 13) des vor. §. verwandeln sich, wenn wir die Gleichungen (10) und (11) statt der Gleichungen (1) und (2) des §. 23. zum Grunde legen, in

$$az + b'x + c'y + a'' = 0 \ ; \ by + a'x + c'z + b'' = 0 \ ; \ cx + a'y + b'z + c'' = 0 \ ;$$
$$av + b't + c'u + a'' = 0 \ ; \ bu + a't + c'v + b'' = 0 \ ; \ ct + a'u + b'v + c'' = 0 \ ;$$

und geben also für x u. t, für y u. u, für z u. v dieselben Werthe, und folglich, da die Coordinatenachsen dieselben sind, auch denselben Mittelpunkt.

Wir haben vorher gezeigt, daß, wenn wir die beiden Systeme, durch Ver-

Verlegung des einen derselben, in die genannte Lage bringen wollen, gerade §. 25. so viele Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind, als unbestimmte Größen eingeführt werden. Wir müssen aber noch nachweisen, daß diese Größen, welche die neue Lage des fortbewegten Systems bestimmen, in Folge jener Bedingungsgleichungen, auch wirklich reelle Werthe erhalten; denn wenn diese Größen oder einige von ihnen imaginaire Werthe erhielten, würde die reciproke Lage der beiden Systeme nicht möglich seyn. Wollten wir nun durch Transformation der Coordinaten, wie oben gesagt worden, die sechs Gleichungen bilden, so müßten wir, um die genannten sechs Größen zu bestimmen, zunächst fünf derselben eliminiren, wodurch wir, nach sehr beschwerlichen Rechnungen, zu einer Gleichung für die sechste Größe gelangen würden, die, wie sich aus einer gewissen Betrachtung schließen läßt, von einem geraden Grade seyn muß, und von der es ungewiß ist, ob sich aus ihr erkennen lassen wird, daß sie immer reelle Wurzeln habe. Um nun diesen äußerst beschwerlichen und vielleicht nutzlosen Rechnungen auszuweichen, verfahren wir auf folgende Weise, wodurch wir zugleich ein neues Licht über die Reciprocität räumlicher Systeme verbreiten.

Wir beschränken unsere Betrachtung auf den allgemeinen Fall, d. i. auf denjenigen, in welchem jedes der beiden Systeme einen Mittelpunkt hat. Den Mittelpunkt des einen Systems nehmen wir zum Anfangspunkte der x, y, z und den Mittelpunkt des andern Systems zum Anfangspunkte der t, u, v, indem wir beide Coordinatensysteme rechtwinklig annehmen. Da nun die Gleichungen (12) und (13) des §. 23. respective durch die Mittelpunktscoordinaten, also bei der jetzigen Lage der Coordinatensysteme respective durch $x = y = z = 0$ und durch $t = u = v = 0$ befriedigt werden, so folgt, daß bei dieser Lage der Anfangspunkte

$$d = d' = d'' = a''' = b''' = c''' = 0$$

seyn werde, und daß also die Gleichung (1) des §. 23. sich auf

$$(az+by+cx)v+(a'z+b'y+c'x)u+(a''z+b''y+c''x)t+1 = 0 \quad (15)$$

reducirt. — Jetzt wollen wir nachweisen, daß es in einem der beiden reciproken Systeme immer drei auf einander senkrechte Durchmesser giebt, deren conjugirte Diametralebenen in dem andern Systeme ebenfalls auf einander senkrecht sind. Solche drei Durchmesser werden wir Achsen des Systems nennen.

Die Gleichungen irgend eines Durchmessers im Systeme xyz sind

$$\left\{ y = \beta z \quad ; \quad x = \gamma z \right\} \quad (16)$$

§. 25. **Einem Punkte x'y'z' dieses Durchmessers entspricht eine Polarebene, als deren Gleichung wir aus (15)**

$$(a+b\beta+c\gamma)z'v+(a'+b'\beta+c'\gamma)z'u+(a''+b''\beta+c''\gamma)z't+1 = 0$$

finden, indem wir nämlich statt x' und y', in Folge der Gleichungen (16), respective $\gamma z'$ und $\beta z'$ setzen. Die dem Durchmesser (16) conjugirte Diametralebene, welche der eben gefundenen Polarebene parallel ist, wird daher durch die Gleichung

$$(a+b\beta+c\gamma)v+(a'+b'\beta+c'\gamma)u+(a''+b''\beta+c''\gamma)t = 0 \quad (17)$$

ausgedrückt. Sind nun

$$\left.\begin{array}{l} \{\; y = \beta z \;;\; x = \gamma z \;\} \\ \{\; y = \beta' z \;;\; x = \gamma' z \;\} \\ \{\; y = \beta'' z \;;\; x = \gamma'' z \;\} \end{array}\right\} (18)$$

die Gleichungen von drei Durchmessern, so sind

$$\left.\begin{array}{l} (a+b\beta+c\gamma)v+(a'+b'\beta+c'\gamma)u+(a''+b''\beta+c''\gamma)t = 0 \\ (a+b\beta'+c\gamma')v+(a'+b'\beta'+c'\gamma')u+(a''+b''\beta'+c''\gamma')t = 0 \\ (a+b\beta''+c\gamma'')v+(a'+b'\beta''+c'\gamma'')u+(a''+b''\beta''+c''\gamma'')t = 0 \end{array}\right\} (19)$$

die Gleichungen ihrer conjugirten Diametralebenen; sollen die Geraden (18) auf einander senkrecht stehen, so muß

$$\left.\begin{array}{l} 1+\beta\beta'+\gamma\gamma' = 0 \\ 1+\beta\beta''+\gamma\gamma'' = 0 \\ 1+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' = 0 \end{array}\right\} (20)$$

seyn; und sollen auch die Ebenen (19) sich rechtwinklig schneiden, so müssen noch folgende drei Gleichungen Statt haben

$$\left.\begin{array}{l} A+B\beta\beta'+C\gamma\gamma'+D(\beta+\beta')+E(\gamma+\gamma')+F(\beta\gamma'+\beta'\gamma)=0 \\ A+B\beta\beta''+C\gamma\gamma''+D(\beta+\beta'')+E(\gamma+\gamma'')+F(\beta\gamma''+\beta''\gamma)=0 \\ A+B\beta'\beta''+C\gamma'\gamma''+D(\beta'+\beta'')+E(\gamma'+\gamma'')+F(\beta'\gamma''+\beta''\gamma')=0 \end{array}\right\} (21)$$

wenn wir, zur Abkürzung,

$$\begin{array}{lcl} a^2+a'^2+a''^2 = A & ; & ab+a'b'+a''b'' = D \\ b^2+b'^2+b''^2 = B & ; & ac+a'c'+a''c'' = E \\ c^2+c'^2+c''^2 = C & ; & bc+b'c'+b''c'' = F \end{array}$$

setzen. Es kommt nun darauf an zu zeigen, daß die sechs Gleichungen (20) u. (21) immer durch reelle Werthe der sechs Größen β, γ, β', γ', β'' u. γ'' befriedigt werden können. Wir bemerken zunächst, daß diese sechs Gleichungen ungeändert bleiben, wenn wir β mit β', γ mit γ', und auch

wenn wir β mit β'', γ mit γ'' gegenseitig vertauschen. Eliminiren wir also β', γ', β'' u. γ'' zwischen den genannten Gleichungen, so erhalten wir zwei Gleichungen in β und γ, und vertauschen wir in diesen beiden Finalgleichungen β u. γ erstens mit β' u. γ' und zweitens mit β'' u. γ'', so haben wir auf der Stelle diejenigen Finalgleichungen, welche uns die Elimination von β, γ, β'' u. γ'' und von β, γ, β' u. γ' gegeben haben würde. Die zuerst genannte Elimination bewerkstelligen wir folgendermaßen. Wir multipliciren die erste und zweite Gleichung (21) respective mit γ'' und γ', und finden dann durch Subtraction §. 25.

$$(A + D\beta + E\gamma)(\gamma'' - \gamma') + (D + B\beta + F\gamma)(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') = 0 \quad ;$$

wir multipliciren dieselben Gleichungen respective mit β'' und β', und erhalten dann durch Subtraction

$$(A + D\beta + E\gamma)(\beta'' - \beta') + (E + F\beta + C\gamma)(\beta''\gamma' - \beta'\gamma'') = 0 \quad .$$

Aus den beiden ersten Gleichungen (20) finden wir auf dieselbe Weise durch Multiplication mit γ'' u. γ' und mit β'' u. β', und durch Subtraction

$$(\gamma'' - \gamma') + \beta(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') = 0 \quad ,$$
$$(\beta'' - \beta') + \gamma(\beta''\gamma' - \beta'\gamma'') = 0 \quad .$$

Eliminiren wir zwischen diesen eben gefundenen vier Gleichungen die beiden Ausdrücke

$$\frac{\gamma'' - \gamma'}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'} \quad \text{und} \quad \frac{\beta'' - \beta'}{\beta''\gamma' - \beta'\gamma''} \quad ,$$

so ergeben sich, als endliches Resultat der Elimination von β', γ', β'' und γ'', die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} E\gamma^2 + D\beta\gamma + (A - C)\gamma - F\beta - E &= 0 \quad , \\ D\beta^2 + E\beta\gamma + (A - B)\beta - F\gamma - D &= 0 \quad . \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Nach Demjenigen, was wir vorher bemerkt haben, brauchen wir β und γ in diesen Gleichungen nur mit einem oder mit zwei Accenten zu versehen, um die Finalgleichungen der Elimination von β, γ, β'' u. γ'' und von β, γ, β' u. γ' zu haben. — Aus der ersten Gleichung (22) ergiebt sich

$$\beta = \frac{E\gamma^2 + (A - C)\gamma - E}{F - D\gamma} \quad ; \qquad (23)$$

und setzen wir diesen Ausdruck in die zweite Gleichung (22), so erhalten wir eine Gleichung (Γ), welche nur γ enthält, und die, wie wir sehr leicht finden, nur vom dritten Grade ist. Da nun aber, zufolge der schon gemachten Bemerkung, in dieser Gleichung (Γ) das γ nur accentuirt zu werden braucht, damit diese Gleichung in diejenigen übergehet, welche respective

§. 25. γ' und γ'' bestimmen, so folgt, daß die drei Wurzeln der Gleichung (Γ) die gesuchten Werthe von γ, γ' und γ'' sind. Da die Gleichung (Γ) vom dritten Grade ist, so ist mindestens eine ihrer Wurzeln reell, und wenn wir diese für den Werth von γ nehmen, so ergiebt sich auch für β ein reeller Werth, da der Ausdruck (23) eine rationale Function von γ ist. — Es bleibt uns noch übrig zu zeigen, daß auch die Werthe γ' und γ'', und demnach auch diejenigen von β' und β'' reell sind. Da aber die Coefficienten der Gleichung (Γ) ziemlich complicirte Ausdrücke sind, so führen wir unsere Untersuchung auf folgende Weise fort. Wir nehmen ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem in x, y, z an, von einer solchen Lage, daß die neue Achse der z mit derjenigen Geraden coincidirt, deren Gleichungen in Beziehung auf das alte Coordinatensystem

$$\left\{ \quad y = \beta z \quad ; \quad x = \gamma z \quad \right\}$$

waren, was immer möglich ist, da wir für β und γ reelle Werthe gefunden haben. Durch diese Coordinatenverwandlung werden die Größen a, b, c, a' ꝛc., und demgemäß auch die durch A, B.... F bezeichneten Ausdrücke andere Werthe als vorher erhalten; und zwar werden dadurch D und E gleich Null werden. Denn da, wenn wir bei der neuen Lage der Coordinatenachsen die vorigen Rechnungen wiederholten, sich nothwendigerweise wieder zwei Gleichungen (22) ergeben würden, welche aber nun von den Werthen $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ befriedigt werden müßten, und dies nur der Fall ist, wenn

$$D = 0 \quad \text{und} \quad E = 0$$

ist, so sind diese beiden Gleichungen eine nothwendige Folge unserer Coordinatenverwandlung. Die drei auf einander senkrechten Durchmesser sind, bei der neuen Lage der Coordinatenachsen, nicht mehr durch die Gleichungen (18), sondern durch die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x = 0 & ; & y = 0 \\ z = 0 & ; & y = nx \\ z = 0 & ; & y = -\frac{1}{n}x \end{array} \right\}$$

auszudrücken, wo n eine noch unbekannte Größe bezeichnet, von der eben nachzuweisen ist, daß sie immer einen reellen Werth habe. Die diesen Durchmessern conjugirten Diametralebenen werden, wie wir sehr leicht finden, durch die Gleichungen

$$av + a'u + a''t = 0 \quad ,$$

$$(bn + c)v + (b'n + c')u + (b''n + c'')t = 0 \quad , \qquad \S.\ 25.$$
$$(b - cn)v + (b' - c'n)u + (b'' - c''n)t = 0$$

dargestellt, und wenn diese Ebenen auf einander senkrecht seyn sollen, so müssen folgende Bedingungsgleichungen erfüllt werden:

$$(ab + a'b' + a''b'')n + (ac + a'c' + a''c'') = 0 \quad ,$$
$$(ac + a'c' + a''c'')n - (ab + a'b' + a''b'') = 0 \quad ,$$
$$(bc + b'c' + b''c'')n^2 + [(c^2 + c'^2 + c''^2) - (b^2 + b'^2 + b''^2)]n - (bc + b'c' + b''c'') = 0.$$

Diese Gleichungen nehmen, wenn wir die vorher schon gebrauchten Verkürzungszeichen einführen, die Form

$$Dn + E = 0$$
$$En - D = 0$$
$$n^2 - \frac{B - C}{F}n - 1 = 0$$

an, und von ihnen werden die beiden ersten von selbst befriedigt, da $D = 0$ und $E = 0$ ist, die dritte Gleichung aber giebt für n nothwendigerweise zwei reelle Werthe n', n'', da ihr letztes Glied negativ, und es ist ferner $n'n'' = -1$, so daß, wenn wir $n = n'$ nehmen, $-\frac{1}{n} = n''$ ist.

Nachdem wir nun nachgewiesen haben, daß es in dem allgemeinen Falle, in welchem jedes der beiden reciproken Systeme einen Mittelpunkt hat, immer drei und im Allgemeinen nur diese drei auf einander senkrechte Durchmesser in einem der beiden reciproken Systeme giebt, deren conjugirte Diametralebenen sich rechtwinklig schneiden, folgt, daß sich beide Systeme immer in eine solche Lage bringen lassen, daß die drei auf einander senkrechten Durchmesser, d. i. die Achsen des einen Systems auf ihren conjugirten Diametralebenen des andern Systems senkrecht stehen, oder, mit anderen Worten, daß eine jede von den drei Achsen der Durchschnitt der conjugirten Diametralebenen der beiden anderen Achsen ist. Nehmen wir bei einer solchen gegenseitigen Lage der beiden Systeme die genannten Achsen des einen Systems zu Achsen der x u. t, der y u. u, der z u. v, so ist die conjugirte Diametralebene der Achse der z die Ebene der tu, die conjugirte Diametralebene der Achse der y die Ebene der tv, die conjugirte Diametralebene der Achse der x die Ebene der uv. Es muß daher bei einer solchen Lage der beiden Systeme ein jeder Punkt in der Achse der z eine der Ebene der tu parallele Polarebene, ein jeder Punkt in der Achse der y eine der Ebene der tv parallele Polarebene und ein jeder Punkt in der Achse der x eine der Ebene der uv parallele Polarebene haben. Werden nun in der

§. 25. Gleichung (15) die Coordinaten x, y, z und t, u, v wie angegeben, transformirt, so muß sie nothwendigerweise eine solche Form annehmen, daß wenn wir darin nach einander

$$\begin{array}{llll} \text{erstens} & x = 0 \;, & y = 0 \;, & z \text{ constant} = z' \;, \\ \text{zweitens} & x = 0 \;, & z = 0 \;, & y \text{ constant} = y' \;, \\ \text{drittens} & y = 0 \;, & z = 0 \;, & x \text{ constant} = x' \end{array}$$

setzen, die drei resultirenden Gleichungen, nämlich

$$\text{erstens} \quad av + a'u + a''t + \frac{1}{z'} = 0 \;,$$

$$\text{zweitens} \quad bv + b'u + b''t + \frac{1}{y'} = 0 \;,$$

$$\text{drittens} \quad cv + c'u + c''t + \frac{1}{x'} = 0 \;,$$

drei Ebenen darstellen, welche respective der Ebene der tu, der Ebene der tv und der Ebene der uv parallel sind, was augenscheinlich nur der Fall ist, wenn die Werthe von a', a'', b, b'', c und c' gleich Null werden. Daraus folgt, daß wenn wir die beiden Systeme in die angegebene Lage bringen, die Achsen der beiden Systeme coincidiren werden, und daß wenn wir diese Geraden zu Coordinatenachsen nehmen, die Gleichung (15) die Form

$$Mzv + Nyu + Pxt = 1 \qquad (24)$$

annehmen muß.

Da diese Gleichung (24) in Beziehung auf x u. t, auf y u. u und auf z u. v symmetrisch ist, so folgt, daß bei der angegebenen Lage jedem Punkte dieselbe Polarebene entspricht, man mag ihn als zu dem einen oder zu dem anderen der beiden Systeme gehörend betrachten, und daß diese Systeme somit jetzt reciprok-liegend sind. — Wiewohl es im Allgemeinen nur ein einziges System von drei, auf einander senkrechten Durchmessern giebt, deren conjugirte Diametralebenen sich rechtwinklig schneiden, so giebt es doch im Allgemeinen vier verschiedene Lagen, in welchen die beiden reciproken Systeme reciprok-liegend sind. Denn drehen wir das System xyz um die Achse der z bis der Drehungswinkel zwei rechte beträgt, so liegt die Achse der x von neuem auf der Achse der t, und die Achse der y auf der Achse der u, und die drei auf einander senkrechten Durchmesser sind wieder auf ihren conjugirten Diametralebenen senkrecht; eine dritte und vierte Lage erhalten wir, indem wir das System xyz um die Achse der y und indem wir es um die Achse der x drehen. Wenn es die Gleichung (24) ist, welche die Beziehung zweier reciproken und reciprok-liegenden Sy-

steme ausdrückt, so wird diese Beziehung, wenn wir die gegenseitige reciproke Lage der Systeme auf die angegebene Weise ändern, wie sich leicht findet, durch eine von den folgenden vier Gleichungen ausgedrückt:

$$\left.\begin{array}{r} +Mzv+Nyu+Pxt=1 \\ +Mzv-Nyu-Pxt=1 \\ -Mzv+Nyu-Pxt=1 \\ -Mzv-Nyu+Pxt=1 \end{array}\right\} (25)$$

welche, wie es auch seyn muß, ebenfalls in Beziehung auf x u. t, auf y u. u, auf z u. v symmetrisch sind.

Nachdem wir uns überzeugt haben, daß zwei reciproke Systeme, denen Mittelpunkte zukommen, immer und zwar auf vier verschiedene Weisen in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden können, daß sie reciprok liegen, wollen wir jetzt zeigen, daß es, wenn beiden Systemen Mittelpunkte zukommen, zwei wesentlich von einander verschiedene Arten der Reciprocität giebt.

Welche Werthe die Größen a, b, c, d, a′ ꝛc. in der Gleichung (1) des §. 23. auch haben mögen, so wird sich diese Gleichung immer, vorausgesetzt, daß jedem der beiden Systeme ein Mittelpunkt zukommt, wenn wir unter A, B, C positive Größen verstehen, durch Transformation auf eine von den folgenden acht Formen bringen lassen:

$$\left.\begin{array}{r} +Azv+Byu+Cxt=1 \\ +Azv-Byu-Cxt=1 \\ -Azv+Byu-Cxt=1 \\ -Azv-Byu+Cxt=1 \end{array}\right\} (26)$$

$$\left.\begin{array}{r} -Azv-Byu-Cxt=1 \\ -Azv+Byu+Cxt=1 \\ +Azv-Byu+Cxt=1 \\ +Azv+Byu-Cxt=1 \end{array}\right\} (27)$$

Die ersten vier Gleichungen (26) drücken eine und dieselbe Art der Reciprocität aus, denn nach Demjenigen, was wir bei den Gleichungen (25) gesehen, haben die beiden Systeme xyz und tuv nur immer eine andere gegenseitige Lage, wenn sie statt durch die erste Gleichung (26) durch eine der letzten drei Gleichungen (26) auf einander bezogen sind. Auf gleiche Weise drücken auch die zweiten vier Gleichungen (27) eine und dieselbe Art der Reciprocität aus, und die beiden reciproken Systeme befinden sich nur in einer anderen Lage, wenn sie statt vermittelst der ersten Gleichung (27)

§. 25. vermittelst einer der letzten drei Gleichungen (27) auf einander bezogen sind. Die erste Art der Reciprocität, diejenige nämlich, welche eine der Gleichungen (26) darstellt, wollen wir elliptische, und die andere Art, welche eine der Gleichungen (27) ausdrückt, wollen wir hyperbolische Reciprocität nennen *). Zwischen diesen beiden Arten der Reciprocität finden wir zunächst folgende bemerkenswerthe Unterschiede. Welche von den vier Lagen, bei welchen sie reciprok liegen, zwei elliptisch-reciproke Systeme auch haben mögen, so liegen immer unendlich viele Punkte in ihren Polarebenen; denn setzen wir in den vier Gleichungen (26) t, u, v respective gleich x, y, z, so erhalten wir vier Gleichungen, von welchen eine jede von unendlich vielen Werthen von x, y, z befriedigt werden kann. Wenn sich zwei hyperbolisch-reciproke Systeme in der ersten von den vier Lagen befinden, bei welchen sie reciprok liegen, so liegt kein Punkt in seiner Polarebene; denn setzen wir in der ersten Gleichung (27) t, u, v respective gleich x, y, z, so erhalten wir eine Gleichung, welche von keinen reellen Werthen von x, y und z befriedigt werden kann. — Ferner, bei zwei elliptisch-reciproken und reciprok-liegenden Systemen fällt keine Gerade mit ihrer reciproken Geraden zusammen; bei zwei hyperbolisch-reciproken und reciprok-liegenden Systemen, wenn sie eine der, durch die drei letzten Gleichungen (27) ausgedrückten Lagen haben, liegen unendlich viele Gerade mit ihren reciproken Geraden zusammen.

Der folgende Satz erscheint uns noch bemerkenswerth. „Es seyen P und Q zwei reciproke Systeme, von denen jedes einen Mittelpunkt hat, es sey ferner S ein dem Systeme Q vollkommen-ähnliches und T ein dem Systeme Q symmetrisch-ähnliches System; dann sind P und S elliptisch-reciprok oder hyperbolisch-reciprok, je nachdem P und Q respective elliptisch-reciprok oder hyperbolisch-reciprok sind; und es sind P und T elliptisch-reciprok oder hyperbolisch-reciprok, je nachdem P und Q respective hyperbolisch-reciprok oder elliptisch-reciprok sind."

Der Uebergang von der elliptischen zur hyperbolischen Reciprocität wird durch eine eigene Art der Reciprocität gebildet, die wir die conische nennen, und die, als ein specieller Fall, im §. 28. betrachtet werden soll.

Wir brechen diese allgemeinen Betrachtungen der Reciprocität hier ab, indem wir zum Schlusse dieses Paragraphen nur noch einige Worte von der Anwendung der Reciprocität sagen.

*) Bei der Reciprocität ebener Systeme kann eine solche Eintheilung in zwei verschiedene Arten nicht füglich gemacht werden, wie denn auch in der Ebene vollkommen-ähnliche und symmetrisch-ähnliche Systeme nicht wohl zu unterscheiden sind, wenn man sich nicht das Umwenden der einen Ebene versagen will.

§. 25. Vermittelst der in §. 23. dargelegten allgemeinen Eigenschaften zweier reciproken Systeme im Raume, lassen sich aus vielen Sätzen andere Sätze ableiten, die keines Beweises mehr bedürfen, auf ähnliche Weise, wie dies in I. §. 21. vermittelst der Reciprocität zweier Systeme in der Ebene geschehen ist. Um dies an einem Beispiele zu zeigen, wählen wir den in der Lösung der Aufgabe (29) in §. 12. enthaltenen Satz, dem wir, in einer zweiten Columne, seinen reciproken gegenüber stellen.

Drei feste in einem Punkte A zusammen treffende Gerade a, b, c und eine vierte Gerade d, welche die Geraden a, b, c nicht schneidet, sind gegeben. Um diese Gerade d drehen sich zwei Ebenen D, D′, und schneiden die Geraden a, b, c in zwei mal drei veränderlichen Punkten p_a, p_b, p_c und p'_a, p'_b, p'_c. Die Punkte p_a, p_b, p'_c bestimmen eine Ebene F, die Punkte p_a, p'_b, p_c eine Ebene G, die Punkte p'_a, p_b, p_c eine Ebene H. Alsdann schneiden sich die Ebenen F, G, H in einem Punkte, welcher auf einer durch den Punkt A gehenden Geraden δ fortrückt, und diese Gerade δ bleibt unverändert, wenn sich auch die Gerade d auf einer durch den Punkt A gehenden Ebene fortbewegt.

Drei feste in einer Ebene A liegende Gerade a, b, c und eine vierte Gerade d, welche die Geraden a, b, c nicht schneidet, sind gegeben. Auf dieser Geraden d bewegen sich zwei Punkte D, D′, und bestimmen mit den Geraden a, b, c zwei mal drei veränderliche Ebenen p_a, p_b, p_c und p'_a, p'_b, p'_c. Die Ebenen p_a, p_b, p'_c schneiden sich in einem Punkte F, die Ebenen p_a, p'_b, p_c in einem Punkte G, die Ebenen p'_a, p_b, p_c in einem Punkte H. Alsdann bestimmen die Punkte F, G, H eine Ebene, welche sich um eine in der Ebene A liegende Gerade δ drehet, und diese Gerade δ bleibt unverändert, wenn sich auch die Gerade d um einen in der Ebene A liegenden Punkt drehet.

Auf gleiche Weise erhalten wir aus dem Lehrsatze (6) in §. 18. den daneben stehenden:

Wenn die Verbindungslinie der beiden Scheitel zweier Pyramiden von den Verbindungslinien der Eckpunkte ihrer Grundflächen in einem Punkte getroffen wird, so liegen die Durchschnittslinien der (erweiterten) Seitenebenen mit der Durchschnittslinie der Grundflächen in einer Ebene.

Wenn die Durchschnittslinie der beiden Grundflächen zweier Pyramiden mit den Durchschnittslinien ihrer Seitenflächen in einer Ebene liegen, so treffen die verlängerten Verbindungslinien der Eckpunkte der Grundflächen die Verbindungslinie der Scheitel in einem Punkte.

welcher der umgekehrte Satz des zuerst genannten ist.

§. 26.

§. 26.

Von den speciellen Arten der Reciprocität, welche durch bestimmte Particularisationen der allgemeinen Gleichung (1) in §. 23. hervorgehen, verdienen hier vorzugsweise drei eine besondere Erwähnung.

Zu der ersten dieser speciellen Arten der Reciprocität können wir gelangen, wenn wir die Bedingung festsetzen, die beiden Systeme sollen so beschaffen seyn und eine solche Lage haben, daß je zwei reciproke Gerade auf einander senkrecht seyen.

Jede zwei reciproke Gerade sind durch die Gleichungssysteme (6) und (7) in §. 23. auszudrücken. Setzen wir in den Gleichungen (6) m und n constant, m' und n' aber veränderlich, so drückt das erste Gleichungssystem alle, einer bestimmten Richtung parallele Gerade aus; die Gleichungen (7) aber stellen, unter derselben Voraussetzung, zwei Ebenen dar, von welchen die erste unveränderlich und nur die zweite veränderlich ist. Daraus folgt, daß allen Geraden, welche sämmtlich einer bestimmten Richtung parallel sind, reciproke Gerade entsprechen, welche sämmtlich in einer bestimmten Ebene liegen. Soll nun eine Gerade (6) auf ihrer reciproken Geraden (7) senkrecht seyn, so muß offenbar die Richtung jener Geraden auf der genannten, durch die erste der beiden Gleichungen (7) ausgedrückten Ebene senkrecht stehen. Dies ist aber, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, nur der Fall, wenn (§. 9.)

$$\frac{a'+b'm+c'n}{a+bm+cn}=m \;;\; \frac{a''+b''m+c''n}{a+bm+cn}=n \;,$$

oder, was dasselbe ist, wenn

$$a'+(b'-a)m+c'n-bm^2-cmn=0 \;;\; a''+b''m+(c''-a)n-bmn-cn^2=0$$

ist. Und soll die gemachte Voraussetzung nicht bloß für eine bestimmte durch die Constanten m u. n dargestellte Richtung, sondern allgemein Statt finden, so müssen diese Gleichungen für alle Werthe von m und n gelten, woraus

$$a'=0 \;;\; a''=0 \;;\; b=0 \;;\; b'=a \;;\; b''=0 \;;\; c=0 \;;\; c'=0 \;;\; c''=a$$

folgt. Die Gleichung (1) reducirt sich daher im gegenwärtigen Falle auf

$$(az+d)v+(ay+d')u+(ax+d'')t+a'''z+b'''y+c'''x+f=0 \;. \quad (1)$$

Die Gleichungen (12) und (13) des §. 23. gehen nun respective in

$$az+d=0 \;;\; ay+d'=0 \;;\; ax+d''=0 \;;$$
$$av+a'''=0 \;;\; au+b'''=0 \;;\; at+c'''=0$$

über, welche die Lage der Mittelpunkte der beiden Systeme bestimmen. Ver-

schieben wir das eine System so, daß die Mittelpunkte in einen Punkt zusammen fallen, und nehmen wir diesen Punkt zum Anfangspunkte der x, y, z und der t, u, v, indem wir für x, y, z respective $x - \frac{d''}{a}$, $y - \frac{d'}{a}$, $z - \frac{d}{a}$, und für t, u, v respective $t - \frac{c'''}{a}$, $u - \frac{b'''}{a}$, $v - \frac{a'''}{a}$, sodann zur Abkürzung $\frac{a'''}{a^2} d + \frac{b'''}{a^2} d' + \frac{c'''}{a^2} d'' - \frac{f}{a} = r^2$ setzen, so erhalten wir aus (1) §. 26.

$$zv + yu + xt = r^2 \quad , \qquad (2)$$

als diejenige Gleichung, welche die erste specielle Art der Reciprocität ausdrückt.

Einem Punkte $x'y'z'$ entspricht, wenn er als ein Punkt im Systeme xyz angesehen wird, die Polarebene

$$z'v + y'u + x't = r^2 \quad ,$$

und wenn er als ein Punkt im Systeme tuv betrachtet wird, die Polarebene

$$z'z + y'y + x'x = r^2 \quad ,$$

und er hat also, da die Coordinatenachsen dieselben sind, in beiden Fällen dieselbe Polarebene.

Die Coordinaten x, y, z derjenigen Punkte, welche in ihren Polarebenen liegen, müssen die Gleichung (2) ihrer Polarebene befriedigen. Setzen wir also x, y, z respective für t, u, v in (2), so kommt

$$z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \quad . \qquad (3)$$

Da nun der erste Theil dieser Gleichung das Quadrat der Entfernung des Punktes xyz vom Anfangspunkte der Coordinaten ausdrückt (§. 2), so folgt, daß alle diejenigen Punkte, welche in ihren Polarebenen liegen, gleich weit vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte entfernt sind.

§. 27.

Zu der zweiten speciellen Art der Reciprocität gelangen wir, wenn wir die Bedingung festsetzen, die beiden Systeme xyz und tuv, die wir respective durch S und Σ bezeichnen wollen, sollen so beschaffen seyn und eine solche Lage haben, daß jeder Punkt P des Systems S in seiner dem Systeme Σ angehörenden Polarebene π selbst enthalten sey.

Dieser Bedingung zufolge, müssen die Coordinaten x, y, z des Punktes P die Gleichung (1, §. 23) seiner Polarebene π, unter der Voraussetzung, daß beide Systeme auf dieselben Coordinatenachsen bezogen sind, wenn wir sie für t, u, v substituiren, befriedigen, so daß wir haben

§. 27.

$$(az+by+cx+d)z+(a'z+b'y+c'x+d')y+(a''z+b''y+c''x+d'')x+a'''z+b'''y+c'''x+d'''=0,$$

wenn wir d''' statt 1 setzen, was eben so viel ist als ob wir die Gleichung (1, §.23) vor der Substitution mit einem constanten Factor multiplicirt hätten. Da aber P jeder beliebige Punkt seyn soll, so muß die so eben aufgestellte Gleichung, der wir die Form

$$az^2+b'y^2+c''x^2+(b+a')yz+(c+a'')xz+(c'+b'')xy+(d+a''')z+(d'+b''')y+(d''+c''')x+d'''=0,$$

geben, für alle Werthe von x, y, z Statt finden, was nur der Fall ist, wenn

$$a=0\ ;\ b'=0\ ;\ c''=0\ ;\ b=-a'\ ;\ a''=-c\ ;\ c'=-b''\ ;$$
$$a'''=-d\ ;\ b'''=-d'\ ;\ c'''=-d''\ ;\ d'''=0$$

ist. Unsere Gleichung (1, §. 23) reducirt sich also, bei der festgesetzten Bedingung, auf

$$(-a'y+cx+d)v+(a'z-b''x+d')u+(-cz+b''y+d'')t-dz-d'y-d''x=0,$$

oder, wenn wir statt b'', c, a', größerer Einfachheit wegen, respective a, b, c schreiben, auf

$$(bx-cy+d)v+(cz-ax+d')u+(ay-bz+d'')t-dz-d'y-d''x=0\ ,\ (1)$$

oder, nach x, y, z geordnet, auf

$$(bt-cu+d)z+(cv-at+d')y+(au-bv+d'')x-dv-d'u-d''t=0\ .\ (2)$$

Da diese Gleichung (2) mit der Gleichung (1) dieselbe Form hat, so folgt, daß nun, nicht bloß jeder Punkt P des Systems S in seiner Polarebene π, sondern daß auch, als eine nothwendige Folge davon, jeder Punkt Π des Systems Σ in seiner Polarebene p liegt; und daß ferner jedem Punkte dieselbe Polarebene, und jeder Ebene derselbe Pol entspricht, man mag diese Ebene und jenen Punkt als zu dem einen oder zu dem anderen Systeme gehörend betrachten.

Es ist klar, daß bei der in Rede stehenden Art der Reciprocität *) erstens die Polarebenen von drei oder mehreren, in einer Ebene liegenden Punkten sich in einem auf dieser Ebene liegenden Punkte, ihrem Pole, schneiden; zweitens daß die Pole mehrerer, sich in einem Punkte schneidenden Ebenen auf einer durch diesen Punkt gehenden Ebene, seiner Polarebene, sich befinden; drittens daß jeder Punkt einer Geraden diejenige Ebene zur Polarebene hat, welche ihn und die reciproke Gerade enthält; und viertens daß jede Ebene, welche eine von zwei reciproken Geraden enthält, denjenigen Punkt zum Pol hat, in welchem die zweite dieser Geraden von jener Ebene geschnitten wird.

*) Sie ist zuerst von H. Möbius im 10ten Bande des Journals f. d. reine u. angewandte Mathematik aufgestellt werden.

§. 27. Die beiden Systeme S und Σ haben keinen Mittelpunkt, sondern ihre Durchmesser sind sämmtlich einander parallel. Denn die Gleichungen (11) des §. 23. sind im gegenwärtigen Falle

$$cz-ax+d'+n(bx-cy+d)=0 \quad ; \quad ay-bz+d''+p(bx-cy+d)=0 \, ;$$

und diese drücken, wie man durch Elimination von y und von x leicht findet, eine Gerade aus, welche der, durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden, und durch die Gleichungen

$$\left\{ \quad ax = cz \quad ; \quad ay = bz \quad \right\} \qquad (3)$$

ausgedrückten Geraden parallel ist, welche Werthe n und p auch immer haben mögen. Nehmen wir daher irgend einen Durchmesser zur Achse der z und der v an, so werden alle anderen Durchmesser dieser Achse, deren Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ sind, parallel seyn, wodurch also nothwendigerweise $b = c = 0$ wird, und unsere Gleichung (1) demnach die Form

$$dv-(ax-d')u+(ay+d'')t-dz-d'y-d''x = 0 \qquad (4)$$

bekommt. Der, den Richtungen der Ebene tu oder xy conjugirte Durchmesser ist dann durch die Gleichungen

$$ax-d' = 0 \quad ; \quad ay+d'' = 0$$

ausgedrückt, und wenn wir eben diesen Durchmesser zur gemeinschaftlichen Achse der z und der v nehmen, also $x+\frac{d'}{a}$ u. $y-\frac{d''}{a}$ für x u. y und $t+\frac{d'}{a}$ u. $u-\frac{d''}{a}$ für t u. u setzen, so reducirt sich die Gleichung wiederum, und zwar auf

$$d(v-z) = a(xu-yt) \quad ,$$

oder, wenn wir a für $\frac{d}{a}$ schreiben, auf

$$av-az = xu-yt \quad . \qquad (5)$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir $v = z$, $u = y$, $t = x$, und wenn wir $v = z$, $u = 0$, $t = 0$ setzen. Daraus folgt erstens, daß die Polarebene eines Punktes xyz diesen Punkt enthält, was wir schon wissen, und zweitens, daß sie die Achse der v oder z in einem Punkte schneidet, welcher eben so weit als der Pol xyz von der Ebene der tu oder xy entfernt ist. Nehmen wir jetzt an, daß die Coordinaten rechtwinklig sind, was erlaubt ist, da die Gleichung (1) durch eine Transformation der Coordinaten ihre Form nicht ändern kann, daß also die Achse der z oder v, welche wir nun schlechthin die Achse des Systems nennen wollen, auf der

§. 27. Ebene der xy oder tu senkrecht ist, so ergiebt sich aus der zweiten so eben gemachten Bemerkung, daß die Polarebene eines Punktes den Perpendikel enthält, welcher von diesem Punkte auf die Achse des Systems gefällt wird. Für den Winkel ω_2, welchen dieselbe Polarebene mit der auf der Achse des Systems senkrechten Ebene der xy oder tu bildet, finden wir aus der Gleichung (5) zufolge (F. 6. §. 10)

$$\cos\omega_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2+y^2}} \quad \text{oder} \quad \tan\omega_2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} .$$

Die Tangente dieses Winkels ist also dem eben erwähnten Perpendikel proportional, und die Polarebenen aller, gleich weit von der Achse des Systems entfernten Punkte machen daher mit dieser Achse gleiche Winkel. Wenn die Lage der Achse und die Constante a gegeben sind, so läßt sich die Polarebene eines jeden Punktes leicht construiren; denn man darf nur von diesem Punkte eine Senkrechte auf die Achse fällen, und durch diese Linie eine Ebene legen, welche mit der Achse einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{a}{p}$ ist, wo p die Länge des genannten Perpendikels ist.

Bei der in Rede stehenden Art der Reciprocität giebt es unzählig viele Gerade, welche mit ihren reciproken zusammen fallen. Denn sind

$$y = mz + m' \quad ; \quad x = nz + n' \qquad (6)$$

die Gleichungen einer Geraden, so sind, wie sich aus den Gleichungen (7) im §. 23. ergiebt, wenn wir statt der Gleichung (1) des §. 23. die Gleichung (5) des gegenwärtigen §. zu Grunde legen,

$$nu - mt + a = 0 \quad ; \quad n'u - m't = av ,$$

oder, wenn wir t und u durch v ausdrücken,

$$u = \frac{a}{n'm - nm'}(mv + m') \quad ; \quad t = \frac{a}{n'm - nm'}(nv + n') \qquad (7)$$

die Gleichungen ihrer reciproken Geraden. Beide Gerade fallen aber, wie wir sehen, in eine einzige zusammen, wenn

$$n'm - nm' = a \qquad (8)$$

ist, und da diese Gleichung (8) auf unzählig viele Arten befriedigt werden kann, so giebt es unzählig viele Gerade, welche mit ihren reciproken coincidiren. Eine Gerade, welche mit ihrer reciproken zusammen fällt, heißt eine **Doppellinie**.

Aufgabe [42]. Es soll der Ort aller Doppellinien gefunden werden, welche sich in einem und demselben gegebenen Punkte schneiden.

§. 27. Es sey $x'y'z'$ irgend ein gegebener Punkt, so werden alle ihn enthaltenden Geraden durch die Gleichungen

$$u - y' = m(v - z') \quad ; \quad t - x' = n(v - z')$$

dargestellt, wenn wir m und n unbestimmt lassen. Sollen diese Geraden Doppellinien seyn, so giebt die Gleichung (8), wenn wir darin $m' = y' - mz'$ und $n' = x' - nz'$ setzen, die Bedingung

$$mx' - ny' = a \quad .$$

Eliminiren wir zwischen diesen drei Gleichungen m und n, so kommt

$$a(v - z') = x'u - y't$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher also eine Ebene und zwar die Polarebene des Punktes $x'y'z'$ ist.

Es liegen daher alle Doppellinien, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, in der Polarebene dieses Punktes. Umgekehrt gehen alle in einer Ebene liegenden Doppellinien durch den Pol dieser Ebene; und jede in einer beliebigen Ebene liegende, durch deren Pol gehende Gerade ist eine Doppellinie.

Lehrsatz [11]. *Jede Gerade, welche zwei reciproke Gerade zugleich schneidet, ist eine Doppellinie.*

Es seyen

$$y = \mu z + \mu' \quad ; \quad x = \nu z + \nu' \tag{9}$$

die Gleichungen einer Geraden, welche irgend eine Gerade (6) und zugleich ihre reciproke Gerade (7) schneidet. Dann liegt die Gerade (9) sowohl mit der Geraden (6) als mit der Geraden (7) in einer Ebene, und wir haben, zufolge §. 8. (G. 2).

$$(n'm - nm') + (\nu'\mu - \nu\mu') = (\nu'm - n\mu') + (n'\mu - \nu m') \quad ,$$

$$a^2 + (n'm - nm')(\nu'\mu - \nu\mu') = a[(\nu'm - n\mu') + (n'\mu - \nu m')] \, .$$

Subtrahiren wir die zweite Gleichung von der ersten, nachdem wir diese mit a multiplicirt haben, und dividiren den Rest durch $n'm - nm' - a$, so kommt

$$(\nu'\mu - \nu\mu') - a = 0 \quad ,$$

welches die Gleichung ist, die zufolge (8) ausdrückt, daß die Gerade (9) eine Doppellinie sey.

Es läßt sich auch leicht zeigen, daß jede Doppellinie, welche irgend eine Gerade schneidet, auch die reciproke Gerade dieser letzteren trifft.

Vermittelst der hier betrachteten Art der Reciprocität kann die Aufgabe gelöst werden:

§. 27. **Zu irgend einem gegebenen Polyeder ein anderes zu construiren, welches eben so viel Ecken und Flächen, als das erstere Flächen und Ecken hat, und dessen Ecken in den (erweiterten) Flächen des erstern liegen, dessen (erweiterte) Flächen aber die Ecken des erstern in sich enthalten.** Denn sieht man eine jede Ecke des gegebenen Körpers als einen Punkt des einen Systems an, und construirt dessen Polarebene, so wird sie diesen ihren Pol enthalten; es werden aber zugleich alle Polarebenen derjenigen Ecken, welche Eckpunkte einer Seitenfläche sind, sich in einem Punkte, dem Pol dieser Seitenebene, schneiden, und dieser Punkt wird sich auf dieser Seitenebene des gegebenen Polyeders befinden. Sämmtliche Polarebenen werden daher im Allgemeinen ein Polyeder begrenzen, dessen Seitenflächen durch die Ecken des gegebenen gehen und dessen Eckpunkte sich auf den Seitenflächen des gegebenen befinden.

Wir wollen noch eine Bemerkung, die in Rede stehende Art der Reciprocität betreffend, hinzufügen. Wir haben oben gesehen, daß einem Punkte immer dieselbe Polarebene entspricht, man mag ihn als zu dem einen oder zu dem anderen Systeme gehörend betrachten. Nun kann aber die gegenseitige Lage der beiden Systeme, und zwar auf verschiedene Weise, so geändert werden, daß diese Eigenschaft auch bei der neuen Lage Statt findet, wodurch denn aber allerdings die Haupteigenschaft wegfällt, zufolge welcher jeder Punkt in seiner Polarebene liegt. Errichten wir nämlich auf der gemeinschaftlichen Achse beider Systeme in irgend einem Punkte irgend eine Senkrechte, und drehen das eine der beiden Systeme S um diese Linie, bis die Drehung zwei rechte Winkel beträgt, so hat jeder Punkt immer dieselbe Polarebene, man mag ihn als einen Punkt des Systems S oder des Systems Σ ansehen. Denn sind

$$z = h \quad ; \quad y = tang\beta \cdot x$$

die Gleichungen der auf der Achse errichteten Senkrechten, und transformiren wir zunächst die Gleichung (5), indem wir sie auf ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, in welchem die neue Achse der z oder v mit der alten Achse, die Achse der x oder t aber mit der genannten Senkrechten zusammen fällt, so haben wir

$$z = z + h \quad ; \quad y = sin\beta \cdot x + cos\beta \cdot y \quad ; \quad x = cos\beta \cdot x - sin\beta \cdot y \; ;$$
$$v = v + h \quad ; \quad u = sin\beta \cdot t + cos\beta \cdot u \quad ; \quad t = cos\beta \cdot t - sin\beta \cdot u$$

zu

zu setzen, wodurch die Gleichung (1) die Form

$$a(v+h)-a(z+h) = (\cos\beta\cdot x - \sin\beta\cdot y)(\sin\beta\cdot t + \cos\beta\cdot u)$$
$$-(\sin\beta\cdot x + \cos\beta\cdot y)(\cos\beta\cdot t - \sin\beta\cdot u)$$

bekommt, die sich aber, nach dem Aufheben der Parenthesen, von selbst wieder auf

$$av - az = xu - yt \qquad (1)$$

zurückziehet. Drehen wir nun das System xyz um die jetzige Achse der x, welche auf der Achse der z und v senkrecht, sonst aber ganz beliebig ist, und zwar um zwei rechte Winkel, so haben wir $z = -z$; $y = -y$ und $x = x$ zu setzen, wodurch wir aus der letzten Gleichung (1)

$$av + az = xu + yt \qquad (10)$$

erhalten. Da nun diese Gleichung in Beziehung auf v u. z, y u. u, x u. t symmetrisch ist, so entspricht einem Punkte $x_1y_1z_1$ immer dieselbe Polarebene, man mag ihn als einen Punkt in dem unverrückt gebliebenen Systeme tuv, oder als einen Punkt in dem, in veränderter Lage befindlichen Systeme xyz ansehen. Es liegen aber nunmehr nur diejenigen Punkte in ihren Polarebenen, deren Coordinaten x, y, z, wenn man sie an die Stelle von t, u, v in die Gleichung (10) setzt, diese Gleichung befriedigen, also nur diejenigen Punkte, zwischen deren Coordinaten die Gleichung

$$az = xy \qquad (11)$$

Statt findet.

§. 28.

Zu der dritten speciellen Art der Reciprocität, welche wir conische Reciprocität nennen wollen, können wir gelangen, wenn wir die Bedingung festsetzen, daß die Coordinaten des Mittelpunktes im Systeme xyz, welche, wie wir gesehen haben, die Gleichungen (12) in §. 23. befriedigen, auch der Gleichung

$$a'''z + b'''y + c'''x + 1 = 0$$

Genüge leisten, so daß diese Mittelpunkts-Coordinaten, die wir durch x_1, y_1, z_1 bezeichnen, für x, y, z gesetzt, den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} az + by + cx + d = 0 \;\; ; \;\; a''z + b''y + c''x + d'' = 0 \\ a'z + b'y + c'x + d' = 0 \;\; ; \;\; a'''z + b'''y + c'''x + d''' = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

gleichzeitig genügen. Die Relation, welche zwischen den Constanten a, b, c, d, a' rc. Statt haben muß, wenn die hier gemachte Bedingung erfüllt werden soll, könnten wir finden, wenn wir die drei Größen x, y, z zwischen den vier Gleichungen (1) eliminiren. Wir führen diese Elimination nicht aus, da wir dieser Bedingungsgleichung nicht bedürfen.

§. 28. Multipliciren wir eine jede der drei ersten Gleichungen (1) mit einem noch unbestimmten Factor v, u, t, und addiren die Producte zu der vierten Gleichung, so erhalten wir

$$v(az+by+cx+d)+u(a'z+b'y+c'x+d')+t(a''z+b''y+c''x+d'')$$
$$+a'''z+b'''y+c'''x+1=0\ ,$$

eine Gleichung, der wir auch die Form

$$(av+a'u+a''t+a''')z+(bv+b'u+b''t+b''')y+(cv+c'u+c''t+c''')x$$
$$+dv+d'u+d''t+1=0$$

geben können, und welche, in Folge der Gleichungen (1) von den bestimmten Werthen x_1, y_1, z_1 befriedigt wird, was auch immer t, u und v seyn mögen, so daß wir die identische Gleichung

$$(av+a'u+a''t+a''')z_1+(bv+b'u+b''t+b''')y_1+(cv+c'u+c''t+c''')x_1$$
$$+dv+d'u+d''t+1\equiv 0$$

haben. Legen wir daher den noch unbestimmten Größen t, u, v diejenigen Werthe t_1, u_1, v_1 bei, welche die Gleichungen

$$av+a'u+a''t+a'''=0\ ;\ bv+b'u+b''t+b'''=0\ ;\ cv+c'u+c''t+c'''=0\ (2)$$

gleichzeitig befriedigen, so wird durch dieselben Werthe auch der Gleichung

$$dv+d'u+d''t+1=0$$

genügt werden. Nun sind aber die Gleichungen (2) mit den Gleichungen (13) des §. 23. identisch; daher können wir t_1, u_1, v_1 als die Mittelpunkts-coordinaten des Systems tuv betrachten, und es folgt demnach: Wenn die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Mittelpunktes im Systeme xyz die Gleichung

$$a'''z+b'''y+c'''x+1=0$$

befriedigen, so befriedigen auch die Coordinaten t_1, u_1, v_1 des Mittelpunktes im Systeme tuv die Gleichung

$$dv+d'u+d''t+1=0\ ,\qquad (3)$$

und umgekehrt.

Nehmen wir nun den Mittelpunkt des Systems xyz zum Anfangspunkte der x, y, z und den Mittelpunkt des Systems tuv zum Anfangspunkte der t, u, v, so verschwinden, bei der conischen Reciprocität, in Folge der Gleichungen (1,2,3), alle constanten Glieder in den Gleichungen (1,2) des §. 23., und wir haben statt derselben

$$(az+by+cx)v+(a'z+b'y+c'x)u+(a''z+b''y+c''x)t=0\ ;\qquad (4)$$
$$(av+a'u+a''t)z+(bv+b'u+b''t)y+(cv+c'u+c''t)x=0\ .\qquad (5)$$

Einem Punkte xyz entspricht nun die Polarebene (4), welche, wie wir

sehen, durch den Anfangspunkt der t, u, v, d. i. durch den Mittelpunkt des Systems tuv gehet. Aber nicht bloß einem Punkte entspricht diese Polarebene (4), sondern sie entspricht auch allen anderen Punkten, welche mit jenem Punkte und dem Mittelpunkte des Systems xyz auf einer Geraden liegen, weil die Gleichung (4) unverändert bleibt, wenn wir die Werthe von x, y, z so ändern, daß die Quotienten $\frac{y}{z}$ und $\frac{x}{z}$ constant bleiben. Einer durch den Mittelpunkt des Systems tuv gehenden Ebene, deren Gleichung

$$v = mu + nt \qquad (6)$$

seyn mag, entspricht derjenige Punkt, dessen Coordinaten die Gleichungen

$$\frac{a'z + b'y + c'x}{az + by + cx} = -m \quad ; \quad \frac{a''z + b''y + c''x}{az + by + cx} = -n \quad ,$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichungen

$$a'z + b'y + c'x + m(az + by + cx) = 0 \quad ; \quad a''z + b''y + c''x + n(az + by + cx) = 0 \qquad (7)$$

befriedigen. Diese Gleichungen bestimmen aber x, y, z nicht vollständig, sondern nur die Quotienten $\frac{y}{z}$ und $\frac{x}{z}$. Es entspricht daher einer, durch den Mittelpunkt des Systems tuv gehenden Ebene (6) nicht ein einziger bestimmter Pol, sondern es entsprechen ihr alle Punkte einer bestimmten, durch die Gleichungen (7) dargestellten, den Mittelpunkt des Systems xyz enthaltenden Geraden. Auf ähnliche Weise verhält es sich mit den Punkten im Systeme tuv und den Ebenen im Systeme xyz. — Einer nicht durch den Mittelpunkt gehenden Ebene, $v = mu + nt + p$, entspricht kein Punkt, da diese Gleichung nicht mit der Gleichung (4) identificirt werden kann.

Bei der conischen Reciprocität entspricht also einer, durch den Mittelpunkt des einen Systems gehenden Ebene eine durch den Mittelpunkt des anderen Systems gehende Gerade, und umgekehrt. Diese Gerade und jene Ebene nennen wir in Beziehung auf einander Polarlinie und Polarebene.

Wenn die Gleichungen einer Polarlinie

$$\gamma y = \beta z \quad ; \quad \gamma x = \alpha z \qquad (8)$$

gegeben sind, finden wir die Gleichung ihrer Polarebene dadurch, daß wir für y und x ihre Werthe aus den Gleichungen (8) in die Gleichung (4) setzen, wodurch sich, nach der Division durch z,

$$(a\gamma + b\beta + c\alpha)v + (a'\gamma + b'\beta + c'\alpha)u + (a''\gamma + b''\beta + c''\alpha)t = 0 \qquad (9)$$

als die Gleichung der Polarebene ergiebt.

§. 28. Wie wir aus der Gleichung (6) einer gegebenen, durch den Mittelpunkt gehenden Ebene, die Gleichungen (7) ihrer Polarlinie finden können, haben wir schon oben gesehen. Wenn aber nur ein Punkt t'u'v' jener Ebene oder, was dasselbe, die diesen Punkt mit dem Mittelpunkte verbindende Gerade in der Ebene gegeben ist, so ist die Ebene nicht gänzlich bestimmt, und deshalb ist auch die Polarlinie der Ebene nicht völlig bestimmt, sondern nur die Relation

$$(az+by+cx)v'+(a'z+b'y+c'x)u'+(a''z+b''y+c''x)t' = 0\ , \quad (10)$$

welche aus der Gleichung (4) durch Substitution von t', u', v' für t, u, v hervorgehet, und welcher wir die Form

$$(av'+a'u'+a''t')z+(bv'+b'u'+b''t')y+(cv'+c'u'+c''t')x = 0 \quad (11)$$

geben können. Der Ort der Polarlinien aller Ebenen, welche durch einen Punkt t'u'v' gehen, ist folglich die durch die Gleichung (11) ausgedrückte Ebene; und da durch dieselbe Gleichung (11) die Polarebene des Punktes t'u'v' dargestellt wird, so folgt, daß der Ort der Polarlinien aller Ebenen, welche durch den Mittelpunkt O und durch einen Punkt P gehen, die Polarebene dieses Punktes P ist. Da nun die Polarlinie OP an die Stelle des Punktes P gesetzt werden kann, so haben wir folgende allgemeine Eigenschaft der conischen Reciprocität: Die Polarlinien von drei oder mehreren Ebenen, welche sich in einer Polarlinie OP schneiden, liegen in einer Ebene, der Polarebene der Linie OP; und umgekehrt, die Polarebenen von drei oder mehreren Polarlinien, welche in einer Ebene liegen, schneiden sich in einer Linie, der Polarlinie dieser Ebene.

Transformiren wir die Gleichung (4) in Polarcoordinaten der vierten Art, indem wir die Polarcoordinaten des Systems xyz durch u', τ', t', und diejenigen des Systems tuv durch u'', τ'', t'' bezeichnen, so erhalten wir, vermittelst der (F. 10 §. 1)

$$(a\,tg\tau'+b\,tgt'+c)tg\tau''+(a'tg\tau'+b'tgt'+c')tgt''+a''tg\tau'+b''tgt'+c''=0, \quad (12)$$

eine Gleichung, welche mit derjenigen, durch welche die Reciprocität ebener Systeme ausgedrückt wird (I. §. 19. G. 1), dieselbe Form hat.

Wir können die beiden Systeme in eine solche gegenseitige Lage bringen, daß einer jeden Geraden dieselbe Polarebene, und umgekehrt jeder Ebene dieselbe Polarlinie entspricht, man mag jene Gerade und diese Ebene als zu dem einen oder zu dem anderen Systeme gehörend betrachten, eine

Lage, die wir die **reciproke** nennen. Denn eben so, wie wir die Gleichung (15) des §. 25. auf die Form (24) des §. 25. gebracht haben, können wir auch die obige Gleichung (4) auf die Form

§. 28.

$$Mzv + Nyu + Pxt = 0 \qquad (13)$$

bringen, wo wir unter x, y, z und t, u, v rechtwinklige, auf dieselben Achsen bezogene Coordinaten verstehen.

Eine besondere Erwähnung verdient der specielle Fall der conischen Reciprocität, in welchem in der Gleichung (13) $M = N = P$ ist, und diese Gleichung sich also auf

$$zv + yu + xt = 0 \qquad (14)$$

reducirt. Bei dieser besondern Art der Reciprocität entspricht einer Geraden, deren Gleichungen

$$\left\{ \cos\gamma \cdot y = \cos\beta \cdot z \quad ; \quad \cos\gamma \cdot x = \cos\alpha \cdot z \right\},$$

eine Polarebene, deren Gleichung

$$\cos\gamma \cdot v + \cos\beta \cdot u + \cos\alpha \cdot x = 0$$

ist, woraus wir sehen, daß jede Polarlinie auf ihrer Polarebene senkrecht steht. Jede zwei Geraden schließen daher denselben Winkel ein als ihre Polarebenen. Stehen demnach zwei körperliche Ecken in der durch die Gleichung (14) ausgedrückten Reciprocität, so sind die Neigungswinkel in der einen den ebenen Winkeln in der anderen, und die ebenen Winkel in der ersten den Neigungswinkeln in der zweiten gleich.

Von den Cylinderflächen.

§. 29.

Wenn eine Gerade sich im Raume bewegt, so erzeugt sie eine Fläche, welche im Allgemeinen keine Ebene, sondern eine krumme Fläche ist. Jede Fläche, welche von einer geraden Linie erzeugt ist, oder von einer geraden Linie erzeugt werden kann, heißt eine geradlinige Fläche (surface reglée).

Bewegt sich die erzeugende Gerade einer unveränderlichen Richtung parallel, so heißt die erzeugte geradlinige Fläche Cylinderfläche. Ist die Richtung der erzeugenden Geraden und außerdem eine Curve gegeben, welche von dieser Geraden während ihrer Bewegung beständig geschnitten wird, so ist die Cylinderfläche bestimmt, individualisirt. Diese Curve, welche offenbar auf der Cylinderfläche liegen wird, und welcher jede andere auf dieser Fläche liegende Curve substituirt werden kann, heißt die Directrix der Cylinderfläche.

Aufgabe [43]. *Die Richtung der erzeugenden Geraden, und die Gleichung einer, in einer der Coordinatenebenen liegenden, zur Directrix genommenen Curve sind gegeben. Es soll die Gleichung der Cylinderfläche gefunden werden.*

Es seyen x, y, z rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten;

$$f(x,y) = 0 \qquad (1)$$

sey die gegebene Gleichung der in der Ebene der xy befindlichen Directrix, und

$$az + by + cx + d = 0 \quad ; \quad a'z + b'y + c'x + d' = 0 \qquad (2)$$

seyen die gegebenen Gleichungen zweier Ebenen, deren Durchschnittslinie der gegebenen Richtung parallel ist.

Jede der gegebenen Richtung parallele Gerade läßt sich durch die Gleichungen

$$az + by + cx + d = \alpha \quad ; \quad a'z + b'y + c'x + d' = \alpha' \qquad (3)$$ §. 29.

ausdrücken. Da nun die erzeugende Gerade nicht nur jener Richtung parallel seyn, sondern auch die Curve (1) schneiden soll, und da für jeden Punkt dieser Curve

$$z = 0 \qquad (4)$$

ist; so müssen wir, wenn die Gleichungen (3) die erzeugende Gerade darstellen sollen, den Größen α und α' nur solche Werthe beilegen, daß die vier Gleichungen (1), (4) und (3) zugleich bestehen können. Wir eliminiren daher zwischen den vier Gleichungen (1), (4) u. (3) die drei Größen x, y, z, und erhalten dadurch eine Gleichung zwischen den Größen α und α', die wir durch

$$\varphi(\alpha, \alpha') = 0 \qquad (5)$$

bezeichnen. Setzen wir jetzt in diese Gleichung (5) für α und α' die ihnen gleichen Ausdrücke (3), so kommt

$$\varphi\Big\{(az + by + cx + d)\ ,\ (a'z + b'y + c'x + d')\Big\} = 0 \quad ; \qquad (6)$$

welches die verlangte Gleichung der Cylinderfläche ist.

Wir sehen hieraus, daß sich die Gleichung einer jeden Cylinderfläche unter der Form (6) darstellen läßt. Diese Gleichung (6) ist, wenn φ eine willkürliche Function bedeutet, die allgemeine Gleichung der Cylinderflächen.

Da wir die erzeugende Gerade auch immer durch die Gleichungen

$$x - az = \alpha \quad ; \quad y - bz = \alpha' \qquad (7)$$

darstellen können, worin a und b constante, α und α' aber veränderliche Größen bedeuten, so können wir auch x, y, z zwischen den Gleichungen (1), (4) u. (7) eliminiren, wodurch wir wieder die Gleichung

$$f(\alpha, \alpha') = 0 \qquad (8)$$

bekommen, in welcher wir für α und α' die Ausdrücke (7) zu setzen haben, und dadurch zu der Gleichung

$$f\Big\{(x - az)\ ,\ (y - bz)\Big\} = 0 \qquad (9)$$

gelangen, welche, wenn f eine willkürliche Function bedeutet, ebenfalls als die allgemeine Gleichung der Cylinderflächen genommen werden kann.

Hierbei ist besonders noch Folgendes zu bemerken.

Wenn die gegebene Richtung diejenige der Achse der z ist, so ist in den Gleichungen (7) $a = b = 0$, und dadurch gehet die Gleichung (9) der Cylinderfläche in

§. 29.

$$f(x, y) = 0 \qquad (10)$$

über, welches wieder die Gleichung (1) ist. Diese Gleichung (1), welche, in Verbindung mit der Gleichung $z = 0$ (4), eine Curve in der Ebene der xy ausdrückt, stellt daher, für sich allein betrachtet, eine Cylinderfläche dar, und zwar diejenige, deren Directrix jene Curve ist, und deren erzeugende Gerade der Achse der z parallel läuft. Es ist auch von vorn herein klar, daß die Gleichung einer Cylinderfläche, deren erzeugende Gerade der Achse der z parallel ist, die Größe z nicht enthalten kann; denn errichtet man in einem Punkte der, in der Ebene der xy liegenden Directrix eine der Achse der z parallele Ordinate, so fällt diese mit der erzeugenden Geraden zusammen, und trifft somit die Cylinderfläche nicht in einem oder mehreren bestimmten Punkten, sondern sie hat mit dieser Fläche unendlich viele, continuirlich auf einander folgende Punkte gemein; demnach bleibt z unbestimmt, und nur die Coordinaten x und y stehen zu einander in einer bestimmten Relation, und zwar in derselben, welche zwischen den Coordinaten der Directrix Statt findet.

Jede Gleichung zwischen zwei Coordinaten x, y, welche in der Ebene der xy eine Curve darstellt, drückt demnach eine Cylinderfläche aus, und zwar diejenige, welche von einer Geraden erzeugt wird, die sich, indem sie fortwährend die genannte Curve schneidet, der Achse der z parallel bewegt. Soll daher nur eine Curve in der Ebene der xy ausgedrückt werden, so ist ihrer Gleichung zwischen den Coordinaten x, y noch die Gleichung $z = 0$ hinzu zu fügen.

Die folgende Aufgabe enthält einen speciellen Fall der vorigen.

Aufgabe [44]. Die Richtung der erzeugenden Geraden ist durch die Gleichungen

$$\left\{ x = mz \; ; \; y = nz \right\}, \qquad (11)$$

und die Directrix durch die Gleichungen

$$\left\{ ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 \; ; \; z = 0 \right\} \qquad (12)$$

gegeben. Es soll die Gleichung der Cylinderfläche gefunden werden.

Zufolge der Gleichung (9) haben wir unmittelbar

$$a(y-nz)^2+2b(x-mz)(y-nz)+c(x-mz)^2+2d(y-nz)+2e(x-mz)+1=0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\begin{aligned}(an^2+2bmn+cm^2)z^2+ay^2+cx^2+2bxy-2(bn+cm)xz-2(an+bm)yz \\ -2(dn+em)z+2dy+2ex+1=0 \qquad (13)\end{aligned}$$

als die verlangte Gleichung der Cylinderfläche.

Diese Fläche heißt Cylinderfläche des zweiten Grades, und zwar ist die Gleichung (13) die allgemeinste Gleichung derselben, welche, wie man sieht, sieben Constanten enthält. §. 29.

Sind

$$\{ a^2y^2 \pm b^2x^2 = a^2b^2 \quad ; \quad z = 0 \}$$

oder

$$\{ y^2 = px \quad ; \quad z = 0 \}$$

die Gleichungen der Directrix, so erhalten wir, statt der Gleichung (13),

$$(a^2n^2 \pm b^2m^2)z^2 + a^2y^2 \pm b^2x^2 \mp 2b^2mxz - 2a^2nyz = a^2b^2$$

oder

$$n^2z^2 + y^2 - 2nyz + mpz - px = 0 \quad .$$

Drückt die erste Gleichung (12), als Gleichung einer Curve in der Ebene der xy betrachtet, das System zweier Geraden aus, so wird die Gleichung (13) das System zweier Ebenen darstellen, welche jene Geraden enthalten und der Richtung (11) parallel sind; denn wenn sich die erste Gleichung (12) in zwei reelle Factoren vom ersten Grade zerlegen läßt, so wird sich offenbar auch die Gleichung (13) in zwei reelle Factoren vom ersten Grade zerlegen lassen, von welchen ein jeder eine Ebene ausdrückt. Drückt die erste Gleichung (12) nur einen reellen Punkt oder drückt sie eine imaginaire Curve aus, so wird auch die Gleichung (13) nur eine, der Richtung (11) parallele Gerade oder eine imaginaire Cylinderfläche darstellen.

Eben so wird die Gleichung (6) oder (9) das System mehrerer Ebenen oder das System mehrerer Geraden, oder endlich eine imaginaire Cylinderfläche ausdrücken, wenn die Gleichung (1) das System mehrerer Geraden, oder das System mehrerer Punkte, oder endlich eine imaginaire Curve darstellt.

Aufgabe [45]. Eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z eines Punktes ist gegeben; es soll untersucht werden, ob diese Gleichung eine Cylinderfläche ausdrückt.

Enthält die gegebene Gleichung nur zwei von den drei Coordinaten, z. B. nur x und y, so drückt sie, nach dem vorher Gezeigten, immer eine Cylinderfläche aus, unter welcher aber auch das System mehrerer Ebenen, oder mehrerer Geraden begriffen ist, und welche auch imaginair seyn kann.

Enthält aber die gegebene Gleichung alle drei Coordinaten x, y, z, so muß sie sich auf die Form $f[(x-az), (y-bz)]$ bringen lassen, wenn sie eine Cylinderfläche ausdrücken soll. Um zu entscheiden, ob dies der Fall sey, setzen wir $x - az = t$, $y - bz = u$, woraus $x = az + t$,

§. 29. $y = bz + u$ folgt; diese letzten Ausdrücke substituiren wir in die gegebene Gleichung für x und y, und ordnen sie nun nach z, wodurch wir eine Gleichung von der Form

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots = 0$$

erhalten. In dieser Gleichung enthält A_0 von den neu eingeführten Größen weder a noch b, sondern nur t und u; A_1, A_2 ꝛc. enthalten aber im Allgemeinen a, b, t und u. Läßt sich nun für a und b ein Paar constanter, reeller Werthe finden, welche sämmtliche Coefficienten von z verschwinden machen, d. i. für welche zu gleicher Zeit

$$A_1 = 0 \quad ; \quad A_2 = 0 \quad ; \quad A_3 = 0 \quad ; \quad \text{ꝛc.}$$

ohne daß für t und u bestimmte Werthe, oder zwischen t und u eine andere Relation, als die durch die Gleichung

$$A_0 = 0$$

ausgedrückte, gesetzt wird; so stellt die gegegebene Gleichung eine Cylinderfläche dar, und diese Cylinderfläche degenerirt in ein System von Ebenen oder Geraden, oder in eine imaginaire Fläche, je nachdem jene Gleichung, $A_0 = 0$, wenn darin t und u als Coordinaten in der Ebene angesehen werden, ein System mehrerer Geraden oder mehrerer Punkte, oder eine imaginaire Curve darstellt.

§. 30.

Legen wir durch eine Cylinderfläche eine Ebene, welche der Richtung der erzeugenden Geraden parallel ist, so wird diese Ebene die Cylinderfläche im Allgemeinen in einer oder mehreren Geraden schneiden; ist diese Ebene aber jener Richtung nicht parallel, so wird ihr Durchschnitt auf der Cylinderfläche eine ebene Curve bilden. Offenbar können wir auch diese Curve zur Directrix nehmen, und wir werden dieselbe Cylinderfläche erhalten, wenn wir nur die Richtung der erzeugenden Geraden unverändert lassen.

Ist demnach

$$\varphi\{(x - az) \;,\; (y - bz)\} = 0$$

die Gleichung einer gegebenen Cylinderfläche, und nehmen wir irgend eine, diese Fläche in einer Curve schneidende Ebene zur Ebene der xy, eine, der Richtung der erzeugenden Geraden parallele Linie aber zur Achse der z; so wird die gegebene Gleichung dadurch in

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

transformirt werden; und insbesondere wird diese Gleichung (1) auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem sich beziehen, wenn die genannte Ebene

senkrecht auf der Richtung der erzeugenden Geraden, und die Achsen der x und der y senkrecht auf einander angenommen sind. Wir können also jede Cylinderfläche durch eine Gleichung von der Form (1) sowohl in schiefwinkligen als in rechtwinkligen Coordinaten ausdrücken. §. 30.

Es folgt zunächst hieraus, daß alle Schnitte, welche parallele Ebenen auf einer Cylinderfläche bilden, vollkommen gleiche Curven sind. Denn die Gleichung (1) drückt sowohl die Cylinderfläche als ihre Directrix in der Ebene der xy aus, und wenn wir die Ebene der xy mit sich selbst parallel verlegen, so haben wir, um die Gleichung (1) zu transformiren, $x = x$, $y = y$ und $z = z + h$ zu setzen, wodurch diese Gleichung (1) nicht geändert wird. Da nun aber diese selbige Gleichung (1) auch die Curve ausdrückt, in welcher die neue Ebene der xy die Cylinderfläche schneidet, so folgt, daß beide Curven einander gleich sind.

Lehrsatz [12]. **Werden durch eine gerade Linie, welche auf der Richtung der erzeugenden Geraden einer Cylinderfläche senkrecht ist, zwei Ebenen gelegt, welche gegen jene Richtung gleich geneigt sind; so schneiden sie die Cylinderfläche in gleichen Curven.**

Wir nehmen die gerade Linie, durch welche die beiden Ebenen gelegt werden, zur Achse der x, eine, der erzeugenden Geraden parallele Linie zur Achse der z, und die Achse der y senkrecht auf den beiden andern Achsen. Die Gleichung der Cylinderfläche ist dann, nach dem vorher Gezeigten, in diesen rechtwinkligen Coordinaten,

$$f(x, y) = 0 \quad . \qquad (1)$$

Bildet nun die eine, durch die Achse der x zu legende Ebene mit der Ebene der xy den Neigungswinkel ϑ, so bildet offenbar die andere mit der Ebene der xy den Neigungswinkel $-\vartheta$. Wir haben also, um die erste Durchschnittscurve zu finden, zufolge §. 13. (F. 26),

$$x = x' \quad ; \quad y = y' \cos\vartheta \quad ; \quad z = y' \sin\vartheta \quad .$$

in die Gleichung (1) zu setzen; und da $\cos\vartheta = \cos(-\vartheta)$, zur Auffindung der zweiten Durchschnittscurve,

$$x = x' \quad ; \quad y = y' \cos\vartheta \quad ; \quad z = -y' \sin\vartheta \quad .$$

in die Gleichung (1) zu substituiren. Da aber z in der Gleichung (1) nicht vorkommt, so erhalten wir für beide Curven augenscheinlich dieselbe, auf rechtwinklige Achsen bezogene, Gleichung, und diese Curven sind daher einander gleich.

§. 30. **Lehrsatz [13].** *Irgend zwei Ebenen schneiden eine Cylinderfläche in affinen Curven, welche als solche von demselben Grade sind.*

Nehmen wir, um unseren Satz auf eine einfache Art zu erweisen, die eine der beiden schneidenden Ebenen zur Ebene der xz, die andere zur Ebene der yz, und ist, in Beziehung auf ein solches Coordinatensystem,

$$\varphi\left\{(x-az)\ ,\ (y-bz)\right\}=0$$

die Gleichung irgend einer Cylinderfläche (§. 29, S. 9); so ist für alle in der Ebene der xz liegenden Punkte $y=0$, und für alle in der Ebene der yz liegenden Punkte ist $x=0$. Die Gleichungen der beiden, in den genannten Ebenen liegenden Durchschnittscurven sind daher respective:

$$\varphi\left\{(x-az)\ ,\ -bz\right\}=0\ ;\ \varphi\left\{-az\ ,\ (y-bz)\right\}=0\ ;$$

oder, wenn wir, zur besseren Unterscheidung, die Coordinaten der ersten Curve z und x durch y' und x', die der zweiten Curve z und y durch y'' und x'' bezeichnen,

$$\varphi\left\{(x'-ay')\ ,\ -by'\right\}=0\ ;\ \varphi\left\{-ay''\ ,\ (x''-by'')\right\}=0\ .$$

Von diesen letzten beiden Gleichungen gehet aber die erste in die zweite über, wenn wir

$$y'=y''-\frac{1}{b}x''\ ;\ x'=-\frac{a}{b}x''$$

setzen, zwei Gleichungen, durch welche die Beziehung der Affinität ausgedrückt wird (I. §. 16).

Eine Cylinderfläche heißt **elliptisch**, **hyperbolisch** oder **parabolisch**, je nachdem die Directrix eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel zweiten Grades ist. Aus dem vorigen Lehrsatze (13) folgt, daß ein elliptischer Cylinder nur in Ellipsen, ein hyperbolischer nur in Hyperbeln und ein parabolischer nur in Parabeln von Ebenen geschnitten werden kann, da eine Ellipse nur mit Ellipsen, eine Hyperbel nur mit Hyperbeln, und eine Parabel nur mit Parabeln in der Verwandtschaft der Affinität stehet (I. §. 46).

Ein elliptischer Cylinder kann immer, und zwar im Allgemeinen auf zwiefache Weise, in Kreisen geschnitten werden; deshalb wird er auch Kreiscylinder genannt. Der Kreiscylinder heißt ein gerader, wenn die Richtung der erzeugenden Geraden senkrecht auf der Kreisebene ist, und ein schiefer, wenn dies nicht Statt findet. Um uns zu überzeugen, daß ein jeder elliptische Cylinder in Kreisen geschnitten werden kann, führen wir einen Schnitt

senkrecht auf der Richtung der erzeugenden Geraden. Dieser Durchschnitt ist im Allgemeinen kein Kreis, sondern eine Ellipse, und wenn wir deren Ebene zur Ebene der xy, die Coordinaten aber rechtwinklig annehmen, so wird die Gleichung dieser Ellipse, und also auch die Gleichung des Cylinders durch

§. 30.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

dargestellt werden können. Führen wir einen Schnitt durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so haben wir, um die Gleichung der dadurch entstehenden Curve zu finden, nur die Formeln (24) des §. 13. in Anwendung zu bringen, wodurch wir

$$(a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi)\cos^2\vartheta\, y'^2 + (a^2 - b^2)\cos\psi\sin\psi\cos\vartheta\, x'y'$$
$$+ (a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi)x'^2 = a^2b^2$$

erhalten. Soll diese Gleichung einen Kreis ausdrücken, so muß, da die Coordinaten rechtwinklig sind,

$$\cos\psi\sin\psi\cos\vartheta = 0 \quad ,$$
$$(a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi)\cos^2\vartheta = a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi$$

seyn, woraus

entweder $\quad \cos\psi = 0$ und $\cos^2\vartheta = \dfrac{a^2}{b^2}$

oder $\quad \sin\psi = 0$ und $\cos^2\vartheta = \dfrac{b^2}{a^2}$

folgt. Nun müssen wir drei Fälle unterscheiden, nämlich entweder ist $a > b$ oder $a < b$ oder $a = b$. In dem ersten Falle kann $\cos^2\vartheta$ nicht gleich $a^2 : b^2$ seyn, und wir haben dann nur $\sin\psi = 0$, d. i. $\psi = 0$ und $\cos\vartheta = \pm\dfrac{b}{a}$; in dem zweiten Falle kann $\cos^2\vartheta$ nicht gleich $b^2 : a^2$ seyn, und wir haben dann nur $\cos\psi = 0$, d. i. $\psi = \frac{1}{2}\pi$ und $\cos\vartheta = \pm\dfrac{a}{b}$; in dem dritten Falle ist $\cos\vartheta = \pm 1$, d. i. $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$. Da nun ψ derjenige Winkel ist, welchen die Durchschnittslinie der gesuchten Kreisebene und der Ebene der xy mit der Achse der x bildet, und ϑ den Neigungswinkel der eben genannten Ebenen bezeichnet, so sehen wir, daß die Kreisebene durch die größere Achse der Ellipse und so geführt werden muß, daß sie mit der Ebene der Ellipse einen Winkel bildet, welcher demjenigen gleich ist, den ein, von einem Brennpunkte der Ellipse nach dem Scheitel der kleineren Achse gezogener, Leitstrahl mit dieser kleineren Achse bildet; und daß es, weil $\cos\vartheta$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe hat,

§. 30. im Allgemeinen zwei verschiedene Lagen giebt, in welchen ein elliptischer Cylinder in Kreisen geschnitten werden kann, daß aber ferner für einen Kreiscylinder nur eine einzige solche Lage existirt.

Die Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Ellipse oder des Kreises parallel mit der erzeugenden Geraden geht, heißt die Achse der Cylinderfläche.

§. 31.

Legen wir eine Ebene A, welche mit einer gegebenen Cylinderfläche irgend eine erzeugende Gerade d gemein hat, so wird sie diese Cylinderfläche im Allgemeinen offenbar noch in einer oder mehreren erzeugenden Geraden e, f, g 2c. schneiden. Die Durchschnittslinie A′ dieser Ebene A und derjenigen Ebene, in welcher sich die zur Directrix genommene Curve C befindet, wird augenscheinlich mit der Directrix C denjenigen Punkt d′ gemein haben, welcher zugleich dieser Curve C und der Geraden d angehört; und dieselbe Gerade A′ wird die Curve C in noch einem oder mehreren Punkten e′, f′, g′ 2c. schneiden. Drehen wir die Ebene A um die Gerade d, so dreht sich die Gerade A′ um den Punkt d′; bei fortgesetzter Drehung wird endlich eine der Durchschnittslinien e mit der Geraden d, und zugleich der Punkt e′ mit dem Punkte d′ zusammenfallen. Die Ebene A heißt in dieser Lage, bei welcher zwei Durchschnittslinien d und e zusammen gefallen sind, die Berührungsebene oder Tangentialebene in der Geraden d an der Cylinderfläche. Wir sehen, daß die Durchschnittslinie A′ der Tangentialebene mit der Ebene der Curve C eine Tangente dieser Curve C ist. Hätten wir durch den Punkt d′ andere Ebenen gelegt, welche die Cylinderfläche in anderen Curven C_1, C_2, 2c. schneiden, so würden auch diese als Directricen haben genommen werden können, und die Durchschnittslinien A'_1, A'_2 2c. der Ebene A mit den Ebenen der Curven C_1, C_2, 2c. werden daher Tangenten dieser Curven seyn. Wir sehen also, daß eine Tangentialebene einer Cylinderfläche die Tangenten aller ebenen Curven auf der Cylinderfläche enthält, welche durch einen der Berührungspunkte gehen.

Soll daher an eine Cylinderfläche eine Tangentialebene gelegt werden, welche einen gegebenen Punkt enthält, so ist weiter nichts nöthig, als durch diesen Punkt eine Ebene zu legen, welche die Cylinderfläche in einer ebenen Curve schneidet; in dieser Ebene an die Durchschnittscurve diejenige Tangente zu ziehen, welche den gegebenen Punkt enthält; sodann durch den nun gefundenen Berührungspunkt die erzeugende Gerade der Cylinderfläche zu ziehen; endlich durch diese Gerade und durch die gezogene Tangente eine Ebene zu legen, welche die Tangentialebene seyn wird.

Man übersieht nun leicht, daß sich eine Menge Sätze von ebenen Curven unmittelbar in Sätze von Cylinderflächen verwandeln lassen; und um nur ein Beispiel hiervon anzuführen, erwähnen wir den folgenden aus der bekannten Eigenschaft der Ellipse herfließenden Satz: „Bei jeder elliptischen Cylinderfläche, oder, was dasselbe ist, bei jedem schiefen Kreiscylinder giebt es zwei Gerade F, F′, welche der Achse parallel laufen und eine solche Lage haben, daß wenn man durch irgend eine erzeugende Gerade d und eine jede dieser Geraden F, F′ eine Ebene B, B′, und in d eine Tangentialebene A an der Cylinderfläche legt, diese Ebenen B u. B′ mit der Ebene A zwei gleiche Winkel bilden." §. 31.

§. 32.

Zwei Cylinderflächen, deren erzeugende Geraden einer und derselben Richtung parallel sind, können sich nur in geraden Linien schneiden. Dies ist von vorn herein klar; es folgt aber auch unmittelbar aus den Gleichungen solcher Flächen, denn nehmen wir eine, der gemeinschaftlichen Richtung der erzeugenden Geraden parallele, Linie zur Achse der z, so sind die beiden in Rede stehenden Flächen durch zwei Gleichungen von der Form

$$f_1(x,y) = 0 \quad ; \quad f_2(x,y) = 0 \qquad (1)$$

auszudrücken, und die Coordinaten aller Punkte, welche beiden Cylinderflächen gemein sind, müssen diese Gleichungen (1) befriedigen. Aus diesen Gleichungen erhalten aber x u. y bestimmte, reelle oder imaginaire, Werthe, während z unbestimmt bleibt, und ein jedes Paar zusammengehörender reeller Werthe, wie x = a und y = b, drückt eine der Achse der z, d. i. der Richtung der erzeugenden Geraden, parallele gerade Linie aus; die genannten Cylinderflächen können sich also in keinen anderen als in geraden Linien schneiden. Ist ein Paar zusammen gehörender, reeller Werthe von x und y einem anderen Paar solcher Werthe gleich, so berühren sich die Cylinderflächen in der, durch diese Werthe ausgedrückten Geraden.

Zwei Cylinderflächen, deren erzeugende Geraden nicht einer und derselben Richtung parallel sind, schneiden sich, im Allgemeinen, in einer Linie, von der kein Theil, wie klein er auch genommen werden mag, in einer Ebene liegt, und welche daher eine Curve von doppelter Krümmung (courbe à double courbure) genannt wird *). Nur in besonderen Fällen

*) Einige der neueren französischen Geometer verwerfen die Benennung courbe à double courbure, aus Gründen, die aufzuführen hier nicht der Ort ist, und setzen dafür courbe gauche.

§. 32. bestehet die Durchschnittslinie solcher zwei Cylinderflächen, gänzlich oder zum Theil, in einer oder mehreren ebenen Curven.

Um ein einfaches Beispiel einer Curve von doppelter Krümmung zu haben, nehme man zwei gerade Kreiscylinder, deren Achsen sich rechtwinklig schneiden. Sind die Radien dieser Cylinder nicht einander gleich, so geht der Cylinder mit dem kleineren Radius durch den mit dem größeren Radius hindurch, und die Durchschnittslinie, die aus zwei gesonderten Theilen besteht, ist offenbar von doppelter Krümmung. Nur in dem besonderen Falle, in welchem die Radien der beiden Cylinder einander gleich sind, besteht die Durchschnittslinie in zwei ebenen Curven. Nehmen wir die Achsen der genannten Cylinder zu Achsen der x und der y, die Achse der z aber senkrecht auf jenen, so haben wir als Gleichungen der beiden Cylinderflächen in rechtwinkligen Coordinaten:

$$y^2 + z^2 = r_1^2 \quad ; \quad x^2 + z^2 = r_2^2 \quad . \qquad (2)$$

Sind die Radien r_1 u. r_2 einander gleich, so erhalten wir durch Subtraction

$$y^2 - x^2 \equiv (y+x)(y-x) = 0 \quad . \qquad (3)$$

Die Coordinaten aller Punkte, welche den beiden Cylinderflächen gemein sind und deshalb beide Gleichungen (2) zugleich befriedigen, müssen nothwendigerweise auch die Differenz dieser Gleichungen, d. i., im Falle der Gleichheit beider Radien, die Gleichung (3) befriedigen; diese Punkte werden also in dem eben genannten Falle auf der, durch die Gleichung (3) ausgedrückten Fläche liegen, welche, wie wir sehen, das System zweier Ebenen ist, die auf einander und auf der Ebene der xy senkrecht stehen. Demnach besteht die Durchschnittslinie der genannten Kreiscylinder, im Falle die Radien gleich sind, aus zwei Curven von einfacher Krümmung, deren Ebenen auf einander senkrecht sind, wie wir vorher schon gesagt haben.

Jede Curve im Raume ist durch ein System von zwei Gleichungen auszudrücken, wenn sie auf rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinatenachsen bezogen wird. Um uns hiervon zu überzeugen, nehmen wir auf der Achse der x einen beliebigen Punkt a_x an, und legen durch ihn eine Ebene mit der Ebene der yz parallel; diese Ebene wird die Curve im Raume in einem oder in mehreren bestimmten Punkten P (die auch imaginair seyn können) schneiden, welchen Punkten P die drei bestimmten Coordinaten Oa_x, $a_x p_z$, Pp_z, zugehören (man sehe wegen der Bezeichnung §. 1. S. 1 u. 2). Von diesen drei Coordinaten ist aber nur die eine, nämlich $Oa_x = x$, beliebig angenommen worden; die Größe der beiden anderen

$a_x p_z$

$a_2p_2 = y$ und $Pp_2 = z$ hängt von der Größe der ersten ab, und es ist somit sowohl y als z eine Function von x. Bei jeder Curve im Raume sind also je zwei Coordinaten Functionen der dritten. Es sind aber von drei Größen nur dann je zwei Functionen der dritten, wenn zwischen diesen drei Größen zwei Gleichungen existiren. Jede Curve im Raume ist daher durch das Gleichungssystem

$$\left\{ F_1(x,y,z) = 0 \quad ; \quad F_2(x,y,z) = 0 \right\} \qquad (4)$$

auszudrücken.

Ist eine Curve durch zwei Gleichungen ausgedrückt, so läßt sie sich leicht auch durch ein anderes Gleichungssystem darstellen; denn jede Gleichung, welche durch Combination der beiden genannten entsteht, kann an die Stelle von einer derselben gesetzt werden. Wir können daher die Curve, welche durch die Gleichungen (4) ausgedrückt wird, auch durch die Gleichungen

$$\left\{ f_1(x,z) = 0 \quad ; \quad f_2(y,z) = 0 \right\}, \qquad (5)$$

welche durch Elimination von y und von x aus jenen hervorgehen, darstellen, worüber indessen noch Einiges zu bemerken ist, was wir, des bessern Verständnisses wegen, erst später, in §. 78, anführen werden. Diese Gleichungen (5) drücken, einzeln genommen, zwei Cylinderflächen aus, deren erzeugende Geraden respective der Achse der y und der Achse der x parallel sind. Diese beiden Cylinderflächen, deren Durchschnittslinie eben die, durch das System der Gleichungen (5) dargestellte Curve ist, heißen die projicirenden Cylinder dieser Curve. Jede Curve hat in Beziehung auf drei bestimmte Coordinatenebenen drei projicirende Cylinder; die Gleichungen von irgend zwei derselben bilden ein Gleichungssystem der Curve, und aus solchen zwei Gleichungen kann die Gleichung des dritten projicirenden Cylinders durch bloße Elimination derjenigen Coordinate, welche in diesen beiden Gleichungen zugleich enthalten ist, hergeleitet werden; so erhalten wir z. B. aus den Gleichungen (5) durch Elimination von z eine Gleichung

$$f_3(x,y) = 0 \quad , \qquad (6)$$

welche den dritten projicirenden Cylinder der, durch die Gleichungen (5) dargestellten Curve ausdrückt. Eine jede der Gleichungen (5) und (6) kann auch, da sie nur zwei Coordinaten enthält, als die Gleichung einer Curve in der Ebene dieser Coordinaten angesehen werden; sie stellt dann diejenige Curve dar, in welcher ein projicirender Cylinder der Curve im Raume die genannte Coordinatenebene schneidet. Die drei auf diese Art gebildeten Curven heißen die Projectionen der Curve im Raume.

§. 32. Es ist klar, daß die Projectionen einer reellen Curve selbst reelle Curven seyn werden. Aber nicht jede Curve im Raume, von welcher zwei Projectionen reell sind, ist reell; damit sie reell sey, müssen die zu diesen Projectionen gehörenden projicirenden Cylinder sich schneiden. Wenn nämlich eine Curve C im Raume zwei reelle Projectionen C_1, C_2 hat, deren Gleichungen respective

$$\left\{ f_1(x,z) = 0 \quad , \quad f_2(y,z) = 0 \right\} \qquad (5)$$

sind, so wird diese Curve C doch nur dann reell seyn, wenn die beiden Gleichungen (5) von reellen Werthen von x, y und z zugleich befriedigt werden können; und hier treten uns sogleich zwei Fälle entgegen. Entweder nämlich giebt die eine der beiden Gleichungen $f_1(x,z) = 0$ für jeden reellen Werth von z einen reellen Werth für x, oder sie giebt nur für diejenigen reellen Werthe von z reelle Werthe für x, welche zwischen bestimmten Grenzen h und h' liegen. In dem ersten Falle giebt es offenbar immer reelle, stetig auf einander folgende Werthe von x, y, z, welche beide Gleichungen (5) zugleich befriedigen. In dem zweiten Falle kommt es darauf an, ob die reellen Werthe von z, für welche die Gleichung $f_2(y,z) = 0$ reelle Werthe für y giebt, wenigstens zum Theil innerhalb, oder ob sie gänzlich außerhalb der Grenzen h u. h' liegen; findet das Erstere Statt, so giebt es wieder reelle Werthe von x, y, z, welche die Gleichungen (5) zugleich befriedigen, findet das Zweite Statt, so giebt es offenbar keine solchen Werthe von x, y, z, und alsdann haben die projicirenden Cylinder, welche durch die Gleichungen (5) dargestellt werden, keinen reellen Punkt mit einander gemein, und dieses Gleichungssystem drückt keine reelle, sondern eine imaginaire Curve im Raume aus.

Aufgabe [46]. Die Gleichungen einer Curve im Raume sind gegeben. Man soll finden, ob diese Curve von doppelter Krümmung oder von einfacher Krümmung, und welches, im letzteren Falle, die Gleichung ihrer Ebene ist.

Es seyen die Gleichungen (5), oder die Gleichungen

$$\left\{ F_1(x,y,z) = 0 \quad ; \quad F_2(x,y,z) = 0 \right\} \qquad (4)$$

diejenigen der gegebenen Curve im Raume. Eine Ebene, deren Gleichung

$$az + by + cx + 1 = 0 \qquad (6)$$

seyn mag, schneidet die Curve (4) in denjenigen Punkten, deren Coordinaten zu gleicher Zeit die drei Gleichungen (4) und (6) befriedigen. Elimi-

niren wir demnach zwei Coordinaten x, y zwischen diesen drei Gleichungen, §. 32.
so erhalten wir eine Finalgleichung in z, welche alle diejenigen Werthe dieser Größe zu Wurzeln hat, die mit den noch zu bestimmenden Werthen von x und y die genannten drei Gleichungen befriedigen. Liegt aber die Curve (4) in der Ebene (6), so sind es nicht mehrere einzelne Punkte, deren Coordinaten den drei Gleichungen (4) u. (6) zugleich genügen, sondern es ist eine Continuität von Punkten, deren Coordinaten diese Gleichungen befriedigen; deshalb muß die vorher genannte Finalgleichung der Elimination z unbestimmt lassen, was nur der Fall ist, wenn alle Coefficienten dieser Finalgleichung verschwinden.

Um also zu entscheiden, ob die Curve (4) von doppelter oder von einfacher Krümmung sey, werden wir x und y zwischen den Gleichungen (4) und (6) eliminiren, und drei Coefficienten aus der Finalgleichung in z gleich Null setzen, wodurch wir drei Gleichungen erhalten, aus welchen wir a, b und c bestimmen. Werden nun alle übrigen Coefficienten der genannten Finalgleichung in z durch diese, für a, b und c gefundenen Werthe ebenfalls annullirt, so ist die Curve (4) von einfacher Krümmung und die Gleichung ihrer Ebene ergiebt sich, wenn wir in (6) die für a, b und c gefundenen Werthe einsetzen. Werden aber die übrigen Coefficienten der genannten Finalgleichung durch jene Werthe von a, b und c nicht sämmtlich annullirt, so ist die Curve (4) von doppelter Krümmung.

Da zwei Curven im Raume durch zwei Gleichungssysteme, von welchen ein jedes aus zwei Gleichungen besteht, ausgedrückt werden, so können in Rücksicht auf die Durchschnittspunkte solcher zwei Curven drei verschiedene Fälle Statt finden. Es können nämlich die Curven erstens sich in reellen Punkten schneiden, zweitens sich in imaginairen Punkten schneiden oder drittens sich nicht schneiden. Das Erste findet Statt, wenn Werthe von x, y und z, welche irgend drei von den vier Gleichungen der beiden Curven befriedigen, reell sind und zugleich der vierten Gleichung genügen; das Zweite, wenn solche Werthe imaginair sind und der vierten Gleichung genug thun; das Dritte, wenn die reellen oder imaginairen Werthe, welche irgend drei von den vier Gleichungen der beiden Curven befriedigen, die vierte Gleichung nicht erfüllen.

Von den Kegelflächen.

§. 33.

Wenn eine gerade Linie sich so bewegt, daß sie fortwährend durch einen festen Punkt geht, und eine feste Curve schneidet, so heißt die, von der geraden Linie erzeugte Fläche eine **Kegelfläche**. Der feste Punkt heißt der **Mittelpunkt** (auch wohl der Scheitel) des Kegels. Die genannte Curve, welche offenbar auf der Kegelfläche liegen wird, und welcher jede andere, auf dieser Fläche liegende Curve substituirt werden kann, werden wir, der Kürze wegen, die **Directrix** nennen.

Aufgabe [47]. Der Mittelpunkt und die Directrix sind gegeben; es soll die Gleichung der Kegelfläche gefunden werden.

Wir wollen, der Allgemeinheit wegen, zuerst annehmen, daß der Mittelpunkt als der Durchschnittspunkt dreier Ebenen

$$\begin{aligned} mz + ny + px + q = 0 \quad ; \quad m'z + n'y + p'x + q' = 0 \quad ; \\ m''z + n''y + p''x + q'' = 0 \quad , \end{aligned} \tag{1}$$

und die Directrix, die wir, aus demselben Grunde, von doppelter Krümmung annehmen, durch das Gleichungssystem

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad ; \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

gegeben sey. Eine jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt, d. i. durch den Durchschnitt der drei Ebenen (1) geht, kann durch das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{aligned} m'z + n'y + p'x + q' - \lambda'(mz + ny + px + q) = 0 \\ m''z + n''y + p''x + q'' - \lambda''(mz + ny + px + q) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

wo λ' und λ'' zwei unbestimmte Factoren bedeuten, dargestellt werden (§. 7, S. 9). Soll diese Gerade (3) aber die Curve (2) schneiden, so müssen, für den Durchschnittspunkt, die vier Gleichungen (2) und (3) zugleich bestehen, und eliminiren wir zwischen ihnen x, y und z, so erhalten wir eine Gleichung zwischen λ', λ'' und den, in den gegebenen Gleichungen (2) und (3) vorkommenden Constanten, die wir durch

$$\varphi(\lambda', \lambda'') = 0 \tag{4}$$

bezeichnen. Da nun aber, in Folge der Gleichungen (3),

$$\lambda' = \frac{m'z + n'y + p'x + q'}{mz + ny + px + q} \quad ; \quad \lambda'' = \frac{m''z + n''y + p''x + q''}{mz + ny + px + q}$$

ist, so haben wir auch

$$\varphi\left\{\frac{m'z+n'y+p'x+q'}{mz+ny+px+q}\,,\;\frac{m''z+n''y+p''x+q''}{mz+ny+px+q}\right\}=0\quad,\qquad(5)$$ §. 33.

und dies ist die gesuchte Gleichung der Kegelfläche.

Wir sehen hieraus, daß sich die Gleichung einer jeden Kegelfläche unter der Form (5) darstellen läßt. Diese Gleichung (5) ist, wenn φ eine willkürliche Function bedeutet, die **allgemeine Gleichung der Kegelflächen**.

Sind a, b, c die Coordinaten des Mittelpunktes der Kegelfläche, so können wir die erzeugende Gerade auch durch das Gleichungssystem

$$\left|\quad x-a=\lambda'(z-c)\quad;\quad y-b=\lambda''(z-c)\quad\right|\qquad(6)$$

darstellen, und alsdann erhalten wir, statt der Gleichung (5), die Gleichung

$$\varphi\left\{\frac{x-a}{z-c}\,,\;\frac{y-b}{z-c}\right\}=0\quad,\qquad(7)$$

welche, wenn φ eine willkürliche Function bedeutet, ebenfalls als die **allgemeine Gleichung der Kegelflächen** genommen werden kann.

Liegt der Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten, so ist die allgemeine Gleichung aller Kegelflächen, welche diesen Mittelpunkt haben,

$$\varphi\left(\frac{x}{z}\,,\;\frac{y}{z}\right)=0\quad.\qquad(8)$$

Hieraus sehen wir, daß eine Gleichung zwischen den rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten x, y, z nur dann eine Kegelfläche, deren Mittelpunkt im Anfangspunkt dieser Coordinaten liegt, ausdrücken kann, wenn sie in Beziehung auf x, y und z **homogen** ist.

Der Gleichung (8) können wir auch die Form

$$\varphi\left(\frac{z}{x}\,,\;\frac{y}{x}\right)=0\qquad(9)$$

geben; nehmen wir nun an, daß diese Gleichung (9) sich auf rechtwinklige Coordinaten bezieht, und setzen darin, um sie in Polarcoordinaten zu transformiren, die Ausdrücke (11) des §. 1., so kommt

$$\varphi\,(tang\,\tau\;,\;tang\,t)=0\qquad(10)$$

als die allgemeine Polargleichung aller Kegelflächen, deren Mittelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten liegt, eine Gleichung, die, wie wir sehen, nur **zwei** veränderliche Größen τ und t enthält.

Die folgende Aufgabe enthält einen speciellen Fall der gegenwärtigen.

Aufgabe [48]. Es soll die Gleichung der Kegelfläche gefunden

§. 33. werden, deren Mittelpunkt in einem gegebenen Punkte liegt, und welche eine gegebene Ebene in einer gegebenen Linie zweiten Grades schneidet.

Wir nehmen die gegebene Ebene zur Ebene der xy, und es sey die in dieser Ebene befindliche Linie des zweiten Grades durch die Gleichung

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 \quad , \qquad (11)$$

der gegebene Mittelpunkt der Kegelfläche aber durch die Coordinaten α, β, γ ausgedrückt. Da für die gegebene Curve

$$z = 0 \quad , \qquad (12)$$

und die erzeugende Gerade durch die Gleichungen

$$x - \alpha = \lambda'(z - \gamma) \quad ; \quad y - \beta = \lambda''(z - \gamma) \qquad (13)$$

darzustellen ist, so haben wir x, y, z zwischen den vier Gleichungen (11), (12) und (13) zu eliminiren, woraus wir

$$a(\beta - \gamma\lambda'')^2 + 2b(\beta - \gamma\lambda'')(\alpha - \gamma\lambda') + c(\alpha - \gamma\lambda')^2 + 2d(\beta - \gamma\lambda'')$$
$$+ 2e(\alpha - \gamma\lambda') + 1 = 0$$

erhalten. Setzen wir hierin für λ' und λ'' ihre Werthe aus (13), so kommt

$$\left.\begin{array}{l} a(\beta z - \gamma y)^2 + 2b(\beta z - \gamma y)(\alpha z - \gamma x) + c(\alpha z - \gamma x)^2 \\ + 2d(\beta z - \gamma y)(z - \gamma) + 2e(\alpha z - \gamma x)(z - \gamma) + (z - \gamma)^2 \end{array}\right\} = 0 \quad , \qquad (14)$$

welches die verlangte Gleichung ist, die, wie wir sehen, acht Constanten enthält.

Legen wir aber die Ebene der xy durch den gegebenen Mittelpunkt der gegebenen Ebene der Curve parallel, und nehmen diesen Mittelpunkt der Kegelfläche zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die Linie des zweiten Grades durch die beiden Gleichungen

$$z = \gamma \quad ; \quad ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 \quad ,$$

und die erzeugende Gerade durch

$$x = \lambda' z \quad ; \quad y = \lambda'' z$$

auszudrücken, woraus wir, durch Elimination von x, y, z,

$$(a\lambda''^2 + 2b\lambda'\lambda'' + c\lambda'^2)\gamma^2 + 2(d\lambda'' + e\lambda')\gamma + 1 = 0 \quad ,$$

und, wenn wir wieder für λ'' und λ' respective $\frac{y}{z}$ und $\frac{x}{z}$ setzen,

$$z^2 + 2\gamma(dy + ex)z + \gamma^2(ay^2 + 2bxy + cx^2) = 0 \qquad (15)$$

als die Gleichung der Kegelfläche erhalten.

Hat die Gleichung der Linie zweiten Grades, in Beziehung auf das jetzt angenommene Coordinatensystem, die Form

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{oder} \quad y^2 = px \quad ,$$

so geht die Gleichung (15) der Kegelfläche in §. 33.

$$a^2b^2z^2 = a^2\gamma^2y^2 \pm b^2\gamma^2x^2 \quad \text{oder} \quad \gamma y^2 - pxz = 0 \qquad (16)$$

über.

Drückt die Gleichung (11) keine reelle sondern eine imaginaire Curve aus, so stellt auch die Gleichung (14) keinen reellen Kegel, sondern nur den Punkt, dessen Coordinaten α, β, γ sind, dar. Wenn aber die Gleichung (11) nur einen reellen Punkt ausdrückt, stellt die Gleichung (14) eine, durch diesen Punkt und den Punkt $\alpha\beta\gamma$ gehende Gerade dar. Wenn ferner die Gleichung (11) sich in zwei reelle Factoren ersten Grades zerlegen läßt und somit zwei gerade Linien darstellt, so läßt sich die Gleichung (14) ebenfalls in zwei reelle Factoren ersten Grades zerlegen und drückt somit zwei Ebenen aus, welche respective durch jene Geraden gehen und welche den Punkt $\alpha\beta\gamma$ enthalten.

Aufgabe [49]. *Eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z eines Punktes ist gegeben; es soll untersucht werden, ob diese Gleichung eine Kegelfläche ausdrückt.*

In der Aufgabe (47) haben wir gesehen, daß eine Gleichung zwischen x, y, z nur dann eine Kegelfläche ausdrücken kann, wenn sie, nachdem der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Fläche gelegt worden, in Beziehung auf x, y u. z homogen ist. Wir setzen daher in die gegebene Gleichung $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ respective für x, y, z; dadurch erhalten wir eine neue Gleichung, deren Coefficienten, mit Ausnahme der Coefficienten der Glieder höchster Dimension, im Allgemeinen sämmtlich x', y' und z' enthalten, und zwar werden diese Größen x', y', z' in den Coefficienten derjenigen Glieder, deren Dimension um Eins geringer ist als die höchste Dimension, nur in erster Potenz vorkommen. Drei von diesen eben genannten Coefficienten setzen wir gleich Null, und bestimmen daraus die drei Größen x', y' und z'. Die Werthe dieser Größen werden nothwendigerweise reell seyn; sind sie aber auch bestimmt und endlich, und annulliren sie zugleich alle Coefficienten der Gleichung, so daß nur die Glieder höchster Dimension, deren Coefficienten, wie schon gesagt, die genannten Größen nicht enthalten, bestehen bleiben; so drückt die Gleichung eine Kegelfläche aus. Diese Kegelfläche kann aber auch aus einem Systeme mehrerer, sich in einem Punkte schneidenden Ebenen oder geraden Linien bestehen; und sie kann auch imaginair seyn, d. i. in einen Punkt, den Anfangspunkt der neuen Coordinaten degeneriren.

§. 34.

§. 34.

Wenn sich eine gerade Linie um einen festen Punkt so dreht, daß sie mit einer festen Richtung fortwährend denselben Winkel bildet, so heißt die erzeugte Kegelfläche ein **Rotationskegel**. Diejenige Gerade, welche durch den festen Punkt, den Mittelpunkt des Kegels, geht, und der genannten Richtung parallel ist, heißt die Achse des Rotationskegels.

Aufgabe [50]. *Die Gleichungen der Achse eines Rotationskegels in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, der in ihr liegende Mittelpunkt, und der constante Winkel, welchen die erzeugende Gerade mit der gegebenen Achse bildet, sind gegeben. Es soll die Gleichung des Rotationskegels gefunden werden.*

Es seyen x', y', z' die Coordinaten des Mittelpunktes, und

$$\cos\gamma(x-x') = \cos\alpha(z-z') \quad ; \quad \cos\gamma(y-y') = \cos\beta(z-z')$$

die Gleichungen der Achse des Kegels, ferner sey δ der genannte constante Winkel.

Da die erzeugende Gerade durch den Mittelpunkt geht, so werden ihre Gleichungen die Form

$$\cos\gamma'(x-x') = \cos\alpha'(z-z') \quad ; \quad \cos\gamma'(y-y') = \cos\beta'(z-z')$$

haben, und da sie mit der Achse den Winkel δ bilden soll, so muß (§. 9, S. 8)

$$\cos\gamma\cos\gamma' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\alpha\cos\alpha' = \cos\delta$$

seyn. Setzen wir die Ausdrücke von $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, welche sich aus den letzten drei Gleichungen ergeben, in die Bedingungsgleichung

$$\cos^2\gamma' + \cos^2\beta' + \cos^2\alpha' = 1 \quad ,$$

so kommt

$$\left\{\cos\gamma(z-z')+\cos\beta(y-y')+\cos\alpha(x-x')\right\}^2 = \cos^2\delta\left\{(z-z')^2+(y-y')^2+(x-x')^2\right\} \quad (1)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\begin{aligned}(\cos^2\gamma - \cos^2\delta)(z-z')^2 + (\cos^2\beta-\cos^2\delta)(y-y')^2 + (\cos^2\alpha-\cos^2\delta)(x-x')^2 \\ + 2\cos\gamma\cos\beta(z-z')(y-y') + 2\cos\gamma\cos\alpha(z-z')(x-x') \\ + 2\cos\beta\cos\alpha(y-y')(x-x') = 0 \quad (2)\end{aligned}$$

als Gleichung des Rotationskegels.

Ist die Achse des Kegels mit der Achse der z parallel, so ist $\cos\gamma = 1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\alpha = 0$, und dann reducirt sich die gefundene Gleichung auf

$$\tan g^2\delta(z-z')^2 = (y-y')^2 + (x-x')^2 \quad . \quad (3)$$

Aufgabe [51]. *Die Lage zweier Kanten einer körperlichen drei-*

seitigen Ecke, und die Summe der drei Neigungswinkel der Seitenebenen ist gegeben. Es soll der Ort der dritten Kante gefunden werden. §. 34.

Wir nehmen die Ebene der Kanten, deren Lage gegeben ist, zur Ebene der xz, die Halbirungslinie des von ihnen eingeschlossenen Winkels zur Achse der z, und die beiden anderen Achsen auf dieser senkrecht. Bezeichnen wir den eben genannten Winkel durch 2ε und die constante Summe der drei Neigungswinkel durch $2s$, so sind die Gleichungen der in der Ebene der xz liegenden Kanten

$$\cos\varepsilon\cdot x + \sin\varepsilon\cdot z = 0 \quad ; \quad \cos\varepsilon\cdot x - \sin\varepsilon\cdot z = 0 \quad ;$$

die Gleichungen der Seitenebenen aber sind

$$y = 0 \;;\; \cos\varepsilon\cdot x + by + \sin\varepsilon\cdot z = 0 \;;\; \cos\varepsilon\cdot x + b'y - \sin\varepsilon\cdot z = 0 \;, \quad (4)$$

wo b u. b′ zwei veränderliche Größen bedeuten. Die beiden letzten Seitenebenen bilden mit der ersten, d. i. mit der Ebene der xz zwei Winkel m und $\pi - n$ für welche wir, zufolge §. 10.,

$$\cos m = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \;;\; \cos(\pi - n) = \frac{b'}{\sqrt{1+b'^2}} \;,\; \text{also } \cos n = -\frac{b'}{\sqrt{1+b'^2}}$$

$$\sin m = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \;;\; \sin(\pi - n) = \frac{1}{\sqrt{1+b'^2}} \;,\; \text{also } \sin n = \frac{1}{\sqrt{1+b'^2}}$$

haben; und aus diesen Gleichungen finden wir

$$\cos(m+n) = \frac{1+bb'}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+b'^2}} \;;\; \sin(m+n) = \frac{b-b'}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+b'^2}} \;.$$

Die beiden letzten Seitenebenen bilden aber mit einander einen Neigungswinkel p, für welchen (§. 10)

$$\cos p = \frac{\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon + bb'}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+b'^2}} = \frac{\cos 2\varepsilon + bb'}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+b'^2}} \;.$$

Nun ist aber $m + n + p = 2s$ oder $2s - (m+n) = p$; folglich $\cos[2s - (m+n)] = \cos p$, also

$$\cos 2s\cdot\cos(m+n) + \sin 2s\cdot\sin(m+n) = \cos p$$

und, wenn wir für $\cos(m+n)$, $\sin(m+n)$ und $\cos p$ die gefundenen Ausdrücke setzen,

$$\cos 2s\cdot(1+bb') + \sin 2s\cdot(b-b') = \cos 2\varepsilon + bb' \;,$$

oder auch, da, in Folge der Gleichungen (4),

$$b = \frac{-\cos\varepsilon\cdot x - \sin\varepsilon\cdot z}{y} \;;\; b' = \frac{-\cos\varepsilon\cdot x + \sin\varepsilon\cdot z}{y}$$

ist,

§. 34.

$$(\cos 2s - \cos 2\varepsilon)y^2 + (1 - \cos 2s)(\sin^2\varepsilon \cdot z^2 - \cos^2\varepsilon \cdot x^2)$$
$$- 2\sin 2s \cdot \sin\varepsilon \cdot yz = 0 \quad , \qquad (5)$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist. Da diese Gleichung homogen, und vom zweiten Grade ist, so ist der gesuchte Ort eine Kegelfläche und zwar zweiten Grades. Wir können diese Gleichung auf mancherlei Weise umformen; zunächst verwandeln wir sie in

$$\sin^2 s \cdot \sin^2\varepsilon \cdot z^2 + (\cos^2 s - \cos^2\varepsilon)y^2 - \sin^2 s \cdot \cos^2\varepsilon \cdot x^2$$
$$- 2\sin s \cdot \cos s \cdot \sin\varepsilon \cdot yz = 0 \quad ;$$

sodann in

$$(\sin s \cdot z - \cos s \cdot \sin\varepsilon \cdot y)^2 = \cos^2\varepsilon \cdot \sin^2 s(z^2 + y^2 + x^2) \quad . \qquad (6)$$

Wenn wir diese Gleichung (6) mit der allgemeinen Gleichung (1) vergleichen, so finden wir, daß der in Rede stehende Ort ein Rotationskegel ist, dessen Achse in der Ebene der yz liegt und mit der Achse der z einen Winkel γ bildet, dessen

$$\tan\gamma = \sin\varepsilon \cdot \cot s \quad ;$$

daß ferner die erzeugende Gerade dieses Kegels mit seiner Achse den constanten Winkel δ macht, für welchen

$$\operatorname{cosec}^2\delta = \operatorname{cosec}^2\varepsilon - \cos^2 s \cdot \cot^2\varepsilon \quad ,$$

woraus wir auch $\cos\delta = \cos\varepsilon \cdot \cos\gamma$ erhalten. Setzen wir in der Gleichung (6) $y = 0$, so kommt

$$\sin^2\varepsilon \cdot z^2 = \cos^2\varepsilon \cdot x^2 \quad ,$$

woraus wir sehen, daß die gefundene Kegelfläche die beiden festen Kanten der körperlichen Ecke enthält.

Aufgabe [52]. Eine gerade Linie L dreht sich um einen gegebenen Punkt so, daß die Summe oder die Differenz der Winkel, welche sie mit zwei gegebenen festen Geraden l_1, l_2 bildet, constant bleibt. Es soll die Gleichung der erzeugten Kegelfläche gefunden werden.

Wir ziehen durch den gegebenen Punkt zwei, den gegebenen Geraden l_1, l_2 parallele Gerade F_1, F_2, und halbiren den Winkel dieser letztern durch eine Gerade m. Die Ebene der Geraden F_1, F_2 nehmen wir zur Ebene der xz, die Gerade m zur Achse der z, und den gegebenen festen Punkt zum Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten. Sind nun

$$\cos\varepsilon \cdot x = \sin\varepsilon \cdot z \quad ; \quad \cos\varepsilon \cdot x = -\sin\varepsilon \cdot z \qquad (7)$$

die Gleichungen der Geraden F_1, F_2 in der Ebene der xz, so ist, wenn wir die Gleichungen der erzeugenden Geraden L durch

$$\left\{ \cos\gamma\cdot x = \cos\alpha\cdot z \quad ; \quad \cos\gamma\cdot y = \cos\beta\cdot z \right\} , \quad (8)$$ §. 34.

die Winkel zwischen den Geraden L u. F_1, L u. F_2 aber respective durch ω_1, ω_2 bezeichnen, zufolge §. 9. (S. 8),

$$\cos\omega_1 = \sin\varepsilon\cos\alpha + \cos\varepsilon\cos\gamma \quad ; \quad \cos\omega_2 = -\sin\varepsilon\cos\alpha + \cos\varepsilon\cos\gamma ,$$

woraus

$$\sin\omega_1 = \sqrt{\left\{1 - \sin^2\varepsilon\cos^2\alpha - \cos^2\varepsilon\cos^2\gamma - 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\alpha\cos\gamma\right\}} ,$$

$$\sin\omega_2 = \sqrt{\left\{1 - \sin^2\varepsilon\cos^2\alpha - \cos^2\varepsilon\cos^2\gamma + 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\alpha\cos\gamma\right\}} .$$

Ist nun 2a die constante Summe oder Differenz der Winkel ω_1 und ω_2, so ist

$$\cos 2a = \cos\omega_1\cos\omega_2 \mp \sin\omega_1\sin\omega_2 ,$$

und daher, durch Substitution der angegebenen Ausdrücke,

$$\cos 2a = -\sin^2\varepsilon\cos^2\alpha + \cos^2\varepsilon\cos^2\gamma$$
$$\mp\sqrt{\left\{(1 - \sin^2\varepsilon\cos^2\alpha - \cos^2\varepsilon\cos^2\gamma)^2 - 4\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos^2\alpha\cos^2\gamma\right\}} .$$

Wenn wir diese Gleichung rational machen, so kommt

$$\cos^2 2a + 2\cos 2a(\sin^2\varepsilon\cos^2\alpha - \cos^2\varepsilon\cos^2\gamma) = 1 - 2(\sin^2\varepsilon\cos^2\alpha + \cos^2\varepsilon\cos^2\gamma),$$

eine Gleichung, die sich, wenn wir in dem zweiten Gliede ihres ersten Theils $\cos^2 a - \sin^2 a$ für $\cos 2a$ setzen, auf

$$4\cos^2 a\sin^2\varepsilon\cos^2\alpha + 4\sin^2 a\cos^2\varepsilon\cos^2\gamma = \sin^2 2a$$

reducirt, und außerdem ist

$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1 .$$

Schaffen wir aus diesen beiden Gleichungen $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ vermittelst der Gleichungen (8) fort, so kommt

$$4(\cos^2 a\sin^2\varepsilon\cdot x^2 + \sin^2 a\cos^2\varepsilon\cdot z^2)\cos^2\gamma = \sin^2 2a\cdot z^2 ,$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)\cos^2\gamma = z^2 ,$$

und sodann, durch Elimination von $\cos\gamma$,

$$4\cos^2 a\sin^2\varepsilon\cdot x^2 + 4\sin^2 a\cos^2\varepsilon\cdot z^2 = \sin^2 2a(x^2 + y^2 + z^2) , \quad (9)$$

welches die verlangte Gleichung der erzeugten Kegelfläche ist. Dieser Gleichung, welche, wie wir sehen, vom zweiten Grade ist, können wir auch die Form

$$(\cos^2\varepsilon - \cos^2 a)(\sin^2 a\cdot z^2 - \cos^2 a\cdot x^2) = \sin^2 a\cos^2 a\cdot y^2 , \quad (10)$$

geben.

Die Ebene der xz, deren Gleichung y = 0 ist, schneidet diese Kegelfläche (10) in zwei Geraden A_1, A_2, deren Gleichungen respective

$$\sin a\cdot z - \cos a\cdot x = 0 \quad \text{und} \quad \sin a\cdot z + \cos a\cdot x = 0$$

§. 34. sind, und die folglich mit der Achse der z zwei Winkel bilden, welche gleich a sind.

Die Ebene der yz, deren Gleichung $x = 0$ ist, schneidet die Kegelfläche (10) in zwei Geraden B_1, B_2, deren Gleichungen respective

$$\sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2 a}\cdot z - \cos a\cdot y = 0 \text{ und } \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2 a}\cdot z + \cos a\cdot y = 0$$

sind. Bezeichnen wir die Winkel, welche diese Geraden B_1, B_2 mit der Achse der z machen, respective durch b und $-b$, so finden wir aus den letzten Gleichungen unmittelbar

$$\tang b = \frac{\sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2 a}}{\cos a}, \text{ und hieraus } \cos b = \frac{\cos a}{\cos\varepsilon},$$

wonach wiederum

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Dividiren wir die Gleichung (10) durch $(\cos^2\varepsilon - \cos^2 a)\sin^2 a$, und setzen für $\cos^2\varepsilon - \cos^2 a$ sodann $\cos^2 a \tang^2 b$, so kommt

$$\left(\frac{y}{tg\,b}\right)^2 + \left(\frac{x}{tg\,a}\right)^2 = z^2 \qquad (11)$$

als Gleichung der in Rede stehenden Kegelfläche. Die Aehnlichkeit dieser Gleichung mit der Gleichung einer, auf ihre Achsen bezogenen Ellipse oder Hyperbel fällt in die Augen. Diese Aehnlichkeit tritt noch mehr heraus, wenn wir die Gleichung (11) in Polarcoordinaten der vierten Art transformiren, indem wir (§. 1) entweder $y = tg\,t'\cdot z$ und $x = tg\,\tau'\cdot z$ oder $y = tg\,t\cdot x$ und $z = tg\,\tau\cdot x$ setzen, und dadurch

entweder
$$\frac{tg^2 t'}{tg^2 b} + \frac{tg^2\tau'}{tg^2 a} = 1 \ ; \qquad (12)$$

oder
$$\frac{tg^2 a}{tg^2 b}\cdot tg^2 t - tg^2 a\cdot tg^2\tau = -1 \ ; \qquad (13)$$

erhalten. Die Geraden A_1, A_2 und B_1, B_2 können die Scheitellinien, und die Geraden F_1, F_2, welche die Rolle der Brennpunkte spielen, die Focallinien der Kegelfläche (11) genannt werden.

Schneiden wir die Kegelfläche (11) durch drei Ebenen, welche den Coordinatenebenen, in beliebiger Entfernung c, parallel sind, so erhalten wir als Gleichungen der Durchschnittscurven:

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{y^2}{c^2 tg^2 b} + \dfrac{x^2}{c^2 tg^2 a} = 1 \\ z = c \end{array}\right\};$$

§. 34.

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{tg^2b}{c^2}z^2 - \frac{tg^2b}{c^2 tg^2 a}x^2 = 1 \\ y = c\end{array}\right\} ;$$

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{tg^2a}{c^2}z^2 - \frac{tg^2a}{c^2 tg^2 b}y^2 = 1 \\ x = c\end{array}\right\} ,$$

welche also Ellipsen und Hyperbeln sind. Hierbei bemerken wir, daß die Brennpunkte dieser Curven mit den Punkten, in welchen ihre Ebenen von den Focallinien geschnitten werden, nicht zusammen fallen; denn für die Brennpunkte der Ellipse, zum Beispiel, finden wir die Coordinaten

$$z_e = c \quad ; \quad y_e = 0 \quad ; \quad x_e = \pm c\sqrt{tg^2a - tg^2b} \ ,$$

und für die Durchschnittspunkte der Focallinien F_1, F_2 mit der Ebene $z = c$ ergiebt sich

$$z_\varepsilon = c \quad ; \quad y_\varepsilon = 0 \quad ; \quad x_\varepsilon = \pm c\,tg\,\varepsilon \ .$$

Nun war aber $cos\,\varepsilon = \frac{cos\,a}{cos\,b}$, also ist $\pm c\,tg\,\varepsilon = \pm c\frac{\sqrt{cos^2b - cos^2a}}{cos\,b}$, daher ist

$$x^2_e - x^2_\varepsilon = c^2 \cdot sin^2a(sec^2a - sec^2b) \ ,$$

ein Ausdruck, der für keinen endlichen Werth von c verschwindet, wenn nicht $a = b$ ist, was wir nicht annehmen, weil in diesem Falle $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 2\pi$ wäre, und somit die beiden Geraden F_1 u. F_2 zusammen fielen, in welchem Falle der Kegel (11) in einen Rotationskegel überginge.

Es bleibt uns noch übrig, nachzuweisen, wie die Kegelfläche (11) zugleich der Ort sey für die Gerade L, wenn sie mit den Geraden F_1 u. F_2 Winkel bildet, deren Summe, und wenn sie mit ihnen Winkel macht, deren Differenz constant ist. Bildet die Gerade L mit der Geraden F_1 einen Winkel $\omega_1 = \varphi$, so bildet sie zugleich mit der Verlängerung dieser Geraden einen Winkel $\omega'_1 = 2\pi - \varphi$; ist nun die constante Summe $\omega_1 + \omega_2 = 2a$, also $\varphi + \omega_2 = 2a$, so ist $\omega'_1 - \omega_2 = 2\pi - (\varphi + \omega_2) = 2(\pi - a)$, und demnach die Differenz der Winkel, $\omega'_1 - \omega_2$, ebenfalls constant, was wir nachweisen wollten.

Daß sich jede Gleichung einer Kegelfläche, wenn sie vom zweiten Grade ist, durch Transformation der Coordinaten auf die Form (11) bringen lasse, wird sich in einem der folgenden Capitel ergeben.

§. 35.

Legen wir durch den Mittelpunkt einer Kegelfläche eine Ebene, so wird

§. 35. sie mit der Kegelfläche entweder nur diesen Punkt gemein haben oder die Kegelfläche in einer oder mehreren Geraden schneiden. Jede Ebene aber, welche nicht durch den Mittelpunkt geht, schneidet die Kegelfläche in einer Curve.

Zwei parallele Ebenen schneiden eine Kegelfläche in ähnlichen Curven. Denn, welches auch die Lage dieser Ebenen seyn mag, so können wir eine derselben zur Ebene der xy nehmen, und dann sind ihre Gleichungen

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z = h \quad ,$$

wo h eine Constante bedeutet. Die Gleichung der Kegelfläche aber ist

$$\varphi \left\{ \frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c} \right\} = 0 \quad .$$

Daraus folgt, daß die Gleichung der einen Durchschnittscurve

$$\varphi \left\{ \frac{x'-a}{-c}, \frac{y'-b}{-c} \right\} = 0 \quad ,$$

und die Gleichung der Projection der anderen

$$\varphi \left\{ \frac{x''-a}{h-c}, \frac{y''-b}{h-c} \right\} = 0$$

ist, indem wir, zur besseren Unterscheidung, x', y' und x'', y'' für x, y schreiben. Von diesen beiden letzten Gleichungen geht die erste in die zweite über, wenn wir die Relationen

$$x' = \frac{c}{c-h} \cdot x'' - \frac{ah}{c} \quad ; \quad y' = \frac{c}{c-h} \cdot y'' - \frac{bh}{c}$$

setzen. Diese Gleichungen drücken aber die Aehnlichkeit aus (I. §. 17); es ist also die eine Durchschnittscurve der Projection der anderen ähnlich, und da die letztere der Projectionsebene parallel ist, der projicirende Cylinder also von der Ebene dieser Curve und der Projectionsebene parallel geschnitten wird, so ist diese zweite Curve ihrer Projection gleich (§. 30) und folglich der ersten Curve ähnlich.

Lehrsatz [14]. Irgend zwei Ebenen E, E' schneiden eine Kegelfläche in collinear-verwandten Curven, welche als solche von demselben Grade sind.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus §. 22.; wir können sie aber auch direct nachweisen, wie folgt.

Nehmen wir die Ebene E zur Ebene der xz und die Ebene E' zur Ebene der yz, und ist, in Beziehung auf ein solches Coordinatensystem,

$$\varphi\left\{\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right\} = 0$$ §. 35.

die Gleichung einer Kegelfläche, so ist, für alle in der Ebene E liegenden Punkte, $y = 0$ und, für alle in der Ebene E′ liegenden Punkte, $x = 0$. Die Gleichungen der Durchschnittscurven sind daher respective

$$\varphi\left\{\frac{x'-a}{z'-c}, \frac{-b}{z'-c}\right\} = 0 \;;\; \varphi\left\{\frac{-a}{z''-c}, \frac{y''-b}{z''-c}\right\} = 0,$$

wenn wir zur besseren Unterscheidung die Coordinaten z und x der ersten durch z′ und x′, und die Coordinaten z und y der zweiten Curve durch z″ und y″ bezeichnen. Die erste dieser Gleichungen gehet aber in die zweite über, wenn wir

$$z' = \frac{cy''-bz''}{y''-b} \;;\; x' = \frac{ay''}{y''-b}$$

setzen, zwei Relationen, welche die der Collineationsverwandtschaft sind (I, §. 11).

Legen wir durch den Mittelpunkt der Kegelfläche eine Ebene A, welche diese Fläche in einer erzeugenden Geraden a schneidet, so wird sie sie zugleich, im Allgemeinen, in noch einer oder mehreren erzeugenden Geraden b, c, d ꝛc. schneiden. Drehen wir die Ebene A um die erzeugende Gerade a, so werden die Geraden b, c, d ꝛc. auf der Kegelfläche fortrücken, und wenn wir die Drehung fortsetzen, wird endlich eine dieser Geraden b, c, d ꝛc. mit der Geraden a zusammen fallen. In dieser Lage der Ebene A, bei welcher zwei Durchschnittslinien a, b, zusammen gefallen sind, heißt die Ebene A die Berührungsebene oder Tangentialebene an der Kegelfläche in der Geraden a.

Sehen wir irgend eine gegebene Kegelfläche K als diejenige Fläche an, welche mit einer gewissen ebenen Curve C in der Verwandtschaft der Centralcollineation steht (§. 22), was offenbar immer geschehen kann, so entspricht einem jeden Punkte der Curve C eine erzeugende Gerade der Kegelfläche K, einer jeden, die Curve C schneidenden Geraden entspricht eine, den Mittelpunkt enthaltende und die Fläche K schneidende Ebene, und einer jeden, die Curve C berührenden Geraden entspricht eine, die Fläche K berührende Ebene. Auf diese Weise lassen sich viele Sätze von ebenen Curven auf Kegelflächen übertragen.

Nehmen wir z. B. an, daß die ebene Curve C eine Linie zweiten Grades sey, so ist die mit ihr in der Verwandtschaft der Centralcollineation

§. 35. stehende Kegelfläche K offenbar ebenfalls vom zweiten Grade, und aus den bekannten Eigenschaften jener Curve leiten wir unmittelbar die folgenden ab.

„Durch fünf sich in einem Punkte schneidende Gerade kann immer eine und nur eine Kegelfläche zweiten Grades gelegt werden."

„Durch fünf sich in einem Punkte schneidende Tangentialebenen ist immer eine Kegelfläche zweiten Grades bestimmt."

„Wenn man in einer Kegelfläche zweiten Grades beliebig viele vierkantige Ecken einschreibt, deren erste Seitenebenen dieselben drei festen, durch den Mittelpunkt gehenden und in einer Ebene liegenden Geraden enthalten, so schneiden sich die vierten Seitenebenen dieser Ecken in einer und derselben, in der nämlichen Ebene liegenden Geraden."

„Wenn man um eine Kegelfläche zweiten Grades beliebig viele vierseitige Ecken umschreibt, deren drei ersten Kanten in denselben drei festen, durch den Mittelpunkt gehenden und sich in einer Geraden schneidenden Ebenen liegen, so liegen die vierten Kanten dieser Ecken in einer und derselben, durch die nämliche Gerade gehenden Ebene."

„Wenn man in einer Kegelfläche zweiten Grades eine sechskantige Ecke einschreibt, und die einander gegenüberliegenden Seitenebenen bis zu ihren Durchschnitten erweitert, so liegen diese drei Durchschnittslinien in einer und derselben durch den Mittelpunkt gehenden Ebene."

„Wenn man um eine Kegelfläche zweiten Grades eine sechsseitige Ecke umschreibt, und durch die einander gegenüberliegenden Kanten Ebenen legt, so schneiden sich diese drei Ebenen in einer und derselben durch den Mittelpunkt gehenden Geraden."

„Wenn eine Ebene um eine in ihr liegende, durch den Mittelpunkt einer Kegelfläche zweiten Grades gehende Gerade g gedreht wird, und wenn in den jedesmaligen beiden Durchschnittslinien dieser Ebene und der Kegelfläche Tangentialebenen an der Kegelfläche gelegt werden, so bewegt sich die Durchschnittslinie dieser Tangentialebenen auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene E." Und umgekehrt:

„Werden an eine Kegelfläche zweiten Grades zwei Tangentialebenen gelegt, und bewegt sich die Durchschnittslinie dieser Ebenen auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene E, so dreht sich die Ebene, welche die Berührungslinien enthält, um eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade g."

„Die Geraden g und die Ebenen E, welche in den beiden vorigen Sätzen genannt worden sind, bilden somit zwei Systeme, welche zu einander in der Beziehung der conischen Reciprocität stehen (§. 28)."

Von

§. 35. Von den Gleichungen der Tangentialebenen an krummen Flächen wird in der Folge ausführlich gehandelt werden. Hier mag es genügen zu bemerken, daß die Gleichung einer Tangentialebene an einer Kegelfläche sich unmittelbar aus der Gleichung der Tangente an derjenigen Curve, mit welcher die Kegelfläche in der Verwandtschaft der Central-Collineation steht, finden läßt. Wollen wir z. B. die Gleichung der Ebene finden, welche die Kegelfläche zweiten Grades (§. 34. G. 11)

$$\frac{y^2}{tg^2 b} + \frac{x^2}{tg^2 a} = z^2 \qquad (1)$$

in der, durch den Mittelpunkt und den Punkt $x'y'z'$ dieser Fläche gehenden Geraden berührt, so setzen wir als Beziehungsgleichungen der Central-Collineation

$$u = \frac{y}{z} \; ; \quad t = \frac{x}{z} \; , \qquad (2)$$

und dem gemäß

$$u' = \frac{y'}{z'} \; ; \quad t' = \frac{x'}{z'} \; . \qquad (3)$$

Der Kegelfläche (1) entspricht, in Folge der Gleichungen (2), die Curve

$$\frac{u^2}{tg^2 b} + \frac{t^2}{tg^2 a} = 1 \quad ;$$

und der Tangente an dieser Curve im Punkte $t'u'$, deren Gleichung

$$\frac{u'u}{tg^2 b} + \frac{t't}{tg^2 a} = 1$$

ist, entspricht eine Ebene, deren Gleichung, in Folge von (2) u. (3),

$$\frac{y'y}{tg^2 b} + \frac{x'x}{tg^2 a} = z'z \qquad (4)$$

ist, und welche die Kegelfläche (1) nothwendigerweise in der, durch ihren Mittelpunkt und den Punkt $x'y'z'$ gehenden Geraden berührt. Die Gleichung (4) ist demnach die Gleichung der gesuchten Tangentialebene.

Lehrsatz [15]. *Wenn durch irgend eine erzeugende Gerade L einer Kegelfläche zweiten Grades und respective durch ihre beiden Focallinien F_1, F_2 zwei Ebenen gelegt werden, so bilden diese mit der Tangentialebene, welche die Kegelfläche in der Geraden L berührt, gleiche Neigungswinkel.*

Ist, wie in §. 34. (G. 11),

$$\frac{y^2}{tg^2 b} + \frac{x^2}{tg^2 a} = z^2$$

§. 35. die Gleichung der Kegelfläche zweiten Grades, und sind (§. 34. S. 7)

$$\cos\varepsilon\cdot x + \sin\varepsilon\cdot z = 0 \quad ; \quad \cos\varepsilon\cdot x - \sin\varepsilon\cdot z = 0$$

die Gleichungen der beiden Focallinien, so ist (§. 34)

$$tg^2 b = \frac{\cos^2\varepsilon - \cos^2 a}{\cos^2 a} \quad .$$

Die Tangentialebene in der, durch den Punkt $x'y'z'$ gehenden, erzeugenden Geraden L ist (S. 4)

$$\frac{x'}{tg^2 a}\cdot x + \frac{y'}{tg^2 b}\cdot y - z'\cdot z = 0 \quad ,$$

und die Gleichungen der beiden Ebenen, welche durch den Punkt $x'y'z'$ und respective durch die Focallinien gehen, sind, wie wir leicht finden,

$$\cos\varepsilon\, y'\cdot x - (\cos\varepsilon\, x' + \sin\varepsilon\, z')\cdot y + \sin\varepsilon\, y'\cdot z = 0 \quad ,$$
$$\cos\varepsilon\, y'\cdot x - (\cos\varepsilon\, x' - \sin\varepsilon\, z')\cdot y - \sin\varepsilon\, y'\cdot z = 0 \quad .$$

Bezeichnen wir die Winkel, welche diese Ebenen mit der genannten Tangentialebene bilden, respective durch φ u. φ', so finden wir

$$\cos\varphi = \frac{\varkappa}{\lambda\mu} \quad ; \quad \cos\varphi' = \frac{\varkappa'}{\lambda\mu'} \quad ,$$

wenn wir

$$cotg^2 a\, cotg^2 b \left\{ \cos\varepsilon(tg^2 b - tg^2 a)x' - \sin\varepsilon(tg^2 a + tg^2 a\, tg^2 b)z' \right\} = \varkappa \quad ,$$
$$cotg^2 a\, cotg^2 b \left\{ \cos\varepsilon(tg^2 b - tg^2 a)x' + \sin\varepsilon(tg^2 a + tg^2 a\, tg^2 b)z' \right\} = \varkappa' \quad ,$$

$$z'^2 + \frac{y'^2}{tg^2 b} + \frac{x'^2}{tg^2 a} = \lambda^2 \quad ,$$

$$y'^2 + (\cos\varepsilon\, x' + \sin\varepsilon\, z')^2 = \mu^2 \quad ,$$
$$y'^2 + (\cos\varepsilon\, x' - \sin\varepsilon\, z')^2 = \mu'^2 \quad ,$$

setzen. Da der Punkt $x'y'z'$ auf der Kegelfläche liegt, so haben wir

$$y'^2 = tg^2 b\cdot z'^2 - \frac{tg^2 b}{tg^2 a}\cdot x'^2 \quad ;$$

und dieser Werth, in die Ausdrücke von μ^2 u. μ'^2 gesetzt, giebt

$$cotg^2 a \left\{ (tg^2 a \cos^2\varepsilon - tg^2 b)x'^2 + 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\, tg^2 a\, x'y' + tg^2 a(tg^2 b + \sin^2\varepsilon)z'^2 \right\} = \mu^2 \quad ,$$
$$cotg^2 a \left\{ (tg^2 a \cos^2\varepsilon - tg^2 b)x'^2 - 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\, tg^2 a\, x'y' + tg^2 a(tg^2 b + \sin^2\varepsilon)z'^2 \right\} = \mu'^2 \quad .$$

Substituiren wir jetzt in jenen Ausdrücken von $\varkappa$ u. $\varkappa'$ und diesen letzten von μ^2 u. μ'^2 noch $\frac{\cos^2\varepsilon - \cos^2 a}{\cos^2 a}$ für $tg^2 b$, so kommt, nach einigen leichten Reductionen,

§. 35.

$$-\frac{\cos\varepsilon\sin\varepsilon}{\cos^2 a\sin^2 a\, tg^2 b}\left\{\cos^2 a\sin\varepsilon\cdot x'+\cos\varepsilon\sin^2 a\cdot z'\right\} = \varkappa \quad ,$$

$$-\frac{\cos\varepsilon\sin\varepsilon}{\cos^2 a\sin^2 a\, tg^2 b}\left\{\cos^2 a\sin\varepsilon\cdot x'-\cos\varepsilon\sin^2 a\cdot z'\right\} = \varkappa' \quad ,$$

$$\frac{1}{\cos^2 a\sin^2 a}\left\{\cos^2 a\sin\varepsilon\cdot x'+\cos\varepsilon\sin^2 a\cdot z'\right\}^2 = \mu^2 \quad ,$$

$$\frac{1}{\cos^2 a\sin^2 a}\left\{\cos^2 a\sin\varepsilon\cdot x'-\cos\varepsilon\sin^2 a\cdot z'\right\}^2 = \mu'^2 \quad .$$

Demnach ist $\frac{\varkappa^2}{\mu^2} = \frac{\varkappa'^2}{\mu'^2}$, und somit auch $\cos^2\varphi = \cos^2\varphi'$; folglich sind die im Lehrsatze genannten Winkel einander gleich.

Setzen wir in die Gleichung

$$\varphi\left(\frac{t}{v}, \frac{u}{v}\right) = 0 \quad , \tag{5}$$

welche irgend eine Kegelfläche ausdrückt, um die ihr ähnliche und ähnlichliegende Fläche zu finden, in Folge des §. 20. (S. 16′),

$$v = \pm kz + c \quad ; \quad u = \pm ky + b \quad ; \quad t = \pm kx + a \quad ,$$

so kommt
$$\varphi\left\{\frac{\pm kx + a}{\pm kz + c}, \frac{\pm ky + b}{\pm kz + c}\right\} = 0 \quad .$$

Nehmen wir nun ein neues Coordinatensystem $x'y'z'$ an, dessen Achsen denen des Systems xyz parallel sind, und dessen Anfangspunkt $\mp\frac{a}{k}$, $\mp\frac{b}{k}$, $\mp\frac{c}{k}$ zu Coordinaten hat, so daß

$$x = x' \mp \frac{a}{k} \quad ; \quad y = y' \mp \frac{b}{k} \quad ; \quad z = z' \mp \frac{c}{k}$$

ist, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\varphi\left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right) = 0 \quad , \tag{6}$$

eine Gleichung, welche dieselbe Relation zwischen x', y' und z' ausdrückt als die Gleichung (5) zwischen t, u und v, woraus wir sehen, daß jede Fläche, welche einer gegebenen Kegelfläche ähnlich ist, eine, ihr vollkommen gleiche Kegelfläche sey, was sich auch auf anderen Wegen sehr leicht zeigen läßt.

Von der Kugelfläche.

§. 36.

Aufgabe [53]. Die Gleichung der Kugelfläche zu finden.

Da, wie aus den Elementen bekannt ist, jeder Punkt der Kugelfläche eine constante Entfernung von ihrem Mittelpunkte hat, so haben wir, wenn r diese Entfernung oder, was dasselbe ist, den Radius der Kugelfläche bezeichnet und wenn x', y', z' die Coordinaten des Mittelpunktes sind, nach §. 2. (F. 3 u. 4), unmittelbar

$$(z-z')^2+(y-y')^2+(x-x')^2+2(x-x')(y-y')\cos\hat{z}$$
$$+2(x-x')(z-z')\cos\hat{y}+2(y-y')(z-z')\cos\hat{x} = r^2$$

wenn die Coordinaten schiefwinklig sind, und

$$(z-z')^2+(y-y')^2+(x-x')^2 = r^2 \qquad (1)$$

in rechtwinkligen Coordinaten, als die verlangte Gleichung.

Wir werden in dem gegenwärtigen Capitel die Coordinaten immer nur rechtwinklig annehmen.

Liegt der Mittelpunkt der Kugelfläche im Anfangspunkte der Coordinaten, so ist die Gleichung der Kugelfläche

$$z^2+y^2+x^2 = r^2\ . \qquad (2)$$

Geht die Kugelfläche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so ist, wenn x', y', z' die Coordinaten ihres Mittelpunktes bedeuten,

$$z^2+y^2+x^2-2z'z-2y'y-2x'x = 0 \qquad (3)$$

die Gleichung dieser Fläche, die wir aus der Gleichung (1) finden, wenn wir die jetzt Statt habende Bedingung $z'^2+y'^2+x'^2 = r^2$ berücksichtigen. Liegt außerdem der Mittelpunkt in der Achse der z, und ist daher $x' = 0$, $y' = 0$ und $z' = \pm r$; so ist die Gleichung

$$z^2+y^2+x^2-2rz = 0 \quad \text{oder} \quad z^2+y^2+x^2+2rz = 0\ ,$$

je nachdem der Mittelpunkt auf der positiven oder auf der negativen Seite der Achse der z liegt.

Aufgabe [54]. Die Gleichung

$$z^2+y^2+x^2+2az+2by+2cx+d = 0$$

einer Kugelfläche ist gegeben. Es sollen die Coordinaten des Mittelpunktes und ihr Radius gefunden werden.

Identificiren wir die gegebene Gleichung mit der Gleichung (1), so

finden wir, wenn x', y', z' die gesuchten Coordinaten und r den gesuchten Radius bedeuten, §. 36.

$$z' = -a \;;\; y' = -b \;;\; x' = -c \;;\; r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \;.$$

Hierbei bemerken wir, daß die Kugelfläche imaginair ist, wenn der unter dem Wurzelzeichen befindliche Ausdruck einen negativen Werth hat, daß sie in einen Punkt degenerirt, und zwar in den Mittelpunkt, dessen Coordinaten wir so eben gefunden haben, wenn der genannte Ausdruck gleich Null ist.

Aufgabe [55]. **Die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punktes p von n gegebenen Punkten ist gegeben. Es soll der Ort des Punktes p gefunden werden.**

Wir wollen nur drei gegebene Punkte annehmen, weil die Rechnung für eine größere Anzahl im Wesentlichen keine andere ist, und es seyen $x', y', z' \;;\; x'', y'', z'' \;;\; x''', y''', z'''$ die bekannten Coordinaten dieser Punkte; es sei ferner q^2 die Summe der Quadrate der drei Entfernungen dieser Punkte von dem Punkte p, dessen Coordinaten durch x, y, z bezeichnet werden. Alsdann haben wir (§. 2., F. 4)

$$\left.\begin{aligned} &(z-z')^2 + (y-y')^2 + (x-x')^2 \\ +&(z-z'')^2 + (y-y'')^2 + (x-x'')^2 \\ +&(z-z''')^2 + (y-y''')^2 + (x-x''')^2 \end{aligned}\right\} = q^2 \quad ,$$

oder, wenn wir entwickeln,

$$z^2 + y^2 + x^2 - 2\cdot\frac{z'+z''+z'''}{3}\cdot z - 2\cdot\frac{y'+y''+y'''}{3}\cdot y - 2\cdot\frac{x'+x''+x'''}{3}\cdot x$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left\{z'^2 + y'^2 + x'^2 + z''^2 + y''^2 + x''^2 + z'''^2 + y'''^2 + x'''^2 - q^2\right\} = 0$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher folglich eine Kugelfläche ist.

§. 37.

Wir setzen hier als bekannt voraus, daß eine Kugelfläche von einer Ebene in keiner anderen Curve als in einem Kreise geschnitten werden kann, und daß eine Ebene, welche in dem Endpunkte eines Radius senkrecht auf ihm steht, mit der Kugelfläche nur diesen einen Punkt gemein hat, und die Tangentialebene der Kugelfläche in diesem Punkte ist.

Aufgabe [56]. **Die Gleichung einer Kugelfläche und die Coordinaten eines auf derselben befindlichen Punktes sind gegeben. Es soll die Gleichung der Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte gefunden werden.**

§. 37. Es sey

$$(z-\gamma)^2 + (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung der Kugelfläche, und es seyen x', y', z' die gegebenen Coordinaten eines Punktes auf derselben.

Die Gleichungen der Geraden, welche den Mittelpunkt mit dem gegebenen Punkt $x'y'z'$ verbindet, sind, wenn wir ihre laufenden Coordinaten durch t, u, v bezeichnen (§. 6. G. 1),

$$(z'-\gamma)(u-\beta) = (y'-\beta)(v-\gamma) \quad ; \quad (z'-\gamma)(t-\alpha) = (x'-\alpha)(v-\gamma) \ ,$$

und die Gleichung der Ebene, welche auf dieser Geraden im Punkte $x'y'z'$ senkrecht steht, ist daher (§. 9. G. 13)

$$(z'-\gamma)(v-z') + (y'-\beta)(u-y') + (x'-\alpha)(t-x') = 0 \ . \qquad (2)$$

Da aber der Punkt $x'y'z'$ ein Punkt der Kugelfläche ist, so haben wir, in Folge der gegebenen Gleichung (1), auch

$$(z'-\gamma)^2 + (y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2 = r^2 \quad ; \qquad (3)$$

und wenn wir nun die Gleichungen (2) und (3) addiren, so erhalten wir

$$(z'-\gamma)(v-\gamma) + (y'-\beta)(u-\beta) + (x'-\alpha)(t-\alpha) = r^2 \qquad (4)$$

als Gleichung der gesuchten Tangentialebene, in welcher die Coordinaten des Berührungspunktes $x'y'z'$ nur in erster Potenz vorkommen.

Ist der Mittelpunkt der Kugel der Anfangspunkt der Coordinaten, demgemäß $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und

$$z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \qquad (5)$$

die Gleichung der Kugelfläche, so ist

$$z'v + y'u + x't = r^2 \qquad (6)$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $x'y'z'$ dieser Fläche.

Die Lösung dieser Aufgabe giebt zu mehreren Betrachtungen Veranlassung. Da die Gleichung (6) mit der Gleichung (2) des §. 26 identisch ist, wenn wir in der letzteren für x, y, z respective x', y', z' setzen, so folgt, daß die Tangentialebene in irgend einem Punkte $x'y'z'$ der Kugelfläche als die Polarebene dieses Punktes, und daß umgekehrt dieser Punkt als der Pol der Tangentialebene angesehen werden kann. Daher ist denn ferner die Ebene, welche drei beliebige Punkte der Kugelfläche enthält, die Polarebene des Durchschnittspunktes der Tangentialebenen dieser Punkte, und in diesem selbigen Durchschnittspunkte schneiden sich die Tangentialebenen aller Punkte der Kugelfläche, welche in jener Ebene liegen, d. i. aller Punkte des Kreises,

in welchem jene Ebene die Kugelfläche schneidet. Durch die Lösung der folgenden Aufgabe wird das eben Gesagte bestätigt werden. §. 37.

Aufgabe [57]. Die Gleichung einer Kugelfläche und die Coordinaten eines, nicht auf derselben liegenden Punktes sind gegeben. Es soll der Ort der Punkte gefunden werden, in welchen die durch den gegebenen Punkt an die Kugelfläche gelegten Tangentialebenen sie berühren.

Es sey

$$(z-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r^2 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung der Kugelfläche und es seyen x', y', z' die gegebenen Coordinaten des Punktes. Bezeichnen wir die noch unbekannten Coordinaten eines Berührungspunktes durch t, u, v, so ist die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkte, wenn wir ihre laufenden Coordinaten x, y, z benennen, zufolge der vorigen Aufgabe,

$$(v-\gamma)(z-\gamma)+(u-\beta)(y-\beta)+(t-\alpha)(x-\alpha) = r^2 \ . \quad (7)$$

Soll diese Ebene, wie es die Aufgabe fordert, durch den Punkt $x'y'z'$ gehen, so muß ihre Gleichung von seinen Coordinaten befriedigt werden. Es muß also seyn:

$$(v-\gamma)(z'-\gamma)+(u-\beta)(y'-\beta)+(t-\alpha)(x'-\alpha) = r^2 \ , \quad (8)$$

und da der Berührungspunkt auf der Kugelfläche liegt, so ist auch

$$(v-\gamma)^2+(u-\beta)^2+(t-\alpha)^2 = r^2 \ . \qquad (9)$$

Diese beiden Gleichungen (8) und (9) bestimmen den Ort des Berührungspunktes; die erste dieser Gleichungen drückt, wie wir sehen, eine Ebene, die zweite aber die gegebene Kugelfläche aus; alle Berührungspunkte befinden sich demnach zugleich auf jener Ebene (8) und auf der Kugelfläche (9), d. i. in dem Durchschnitte dieser Flächen.

Wir bemerken hierbei, daß die, durch die Gleichung (8) ausgedrückte Ebene offenbar immer reell ist, wenn auch durch den gegebenen Punkt keine Tangentialebene an die Kugelfläche gelegt werden kann; nur schneidet sie in diesem letzteren Falle die Kugelfläche nicht. Die Form der Gleichung (8), welche mit der Gleichung (4) übereinstimmt, zeigt, daß diese, die Berührungspunkte enthaltende Ebene als Polarebene des gegebenen Punktes angesehen werden kann, was mit dem, in Folge der vorigen Aufgabe Bemerkten übereinkommt. Diese Ebene (8) heißt deshalb auch die Polarebene des gegebenen Punktes in Beziehung auf die Kugelfläche (9). Verwandeln wir die Gleichung (8) in

$$(z'-\gamma)v+(y'-\beta)u+(x'-\alpha)t-\gamma z'-\beta y'-\alpha x'+\gamma^2+\beta^2+\alpha^2-r^2 = 0 \ ,$$

§. 37. und vergleichen sie nun mit der Gleichung (1) des §. 23, welche die Beziehung zweier reciproken Systeme im Allgemeinen ausdrückt, so finden wir, daß für den gegenwärtigen Fall, wie es schon die, in §. 26 betrachtete, erste specielle Art der Reciprocität erheischte,

$$a'=0\ ;\ a''=0\ ;\ b=0\ ;\ b'=a\ ;\ b''=0\ ;\ c=0\ ;\ c'=0\ ;\ c''=a\ ,$$

und daß ferner

$$a=1\ ;\ d=a'''=-\gamma\ ;\ d'=b'''=-\beta\ ;\ d''=c'''=-\alpha\ ;$$
$$f=\gamma^2+\beta^2+\alpha^2-r^2$$

ist.

Aufgabe [58]. **Eine Kugelfläche und eine gerade Linie sind gegeben; es soll diejenige Ebene gefunden werden, welche die Kugelfläche berührt und die gegebene Gerade enthält.**

Es sey wieder

$$(z-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung der Kugelfläche, und

$$\left|\ y=mz+m'\ ;\ x=nz+n'\ \right| \qquad (10)$$

seyen die gegebenen Gleichungen der geraden Linie. Nehmen wir irgend einen Punkt auf dieser Geraden an, und bestimmen den Ort der Berührungspunkte aller durch ihn an die Kugelfläche zu legenden Tangentialebenen, so erhalten wir einen auf dieser Kugelfläche liegenden Kreis; nehmen wir einen zweiten Punkt auf der genannten Geraden, so erhalten wir für den Ort der Berührungspunkte einen zweiten Kreis. Eine Ebene, welche durch die beiden angenommenen Punkte geht und die Kugelfläche berührt, enthält offenbar die gegebene Gerade, und hat mit der Kugelfläche einen derjenigen Punkte gemein, in welchen sich die genannten Oerter scheiden. Die beiden, auf der Kugelfläche befindlichen Oerter liegen aber in zwei Ebenen; der Berührungspunkt der verlangten Ebene ist daher einer derjenigen Punkte, in welchen die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen die Kugelfläche schneidet. Da nun aber die beiden Ebenen die Polarebenen jener auf der gegebenen Geraden angenommenen Punkte sind, so ist die zuletzt genannte Durchschnittslinie die reciproke Gerade der gegebenen (§. 23); und als Gleichungen dieser Geraden finden wir, indem wir in den Gleichungen (7) des §. 23 die, zu Ende der vorigen Aufgabe angegebenen Werthe für a, b, c, d, a' ꝛc. setzen,

$$\left\{\begin{aligned} v-\gamma+m(u-\beta)+n(t-\alpha)&=0\\ \gamma(v-\gamma)&=(m'-\beta)(u-\beta)+(n'-\alpha)(t-\alpha)-r^2\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Wenn diese Gerade die Kugelfläche schneidet, so geschieht es im Allgemeinen in zwei Punkten, und es giebt dann zwei Berührungsebenen der Kugelfläche, welche die gegebene Gerade enthalten. §. 37.

Die Gleichungen (11) führen uns leicht zu einer Construction dieser reciproken Geraden; noch leichter aber gelangen wir zu derselben, wenn wir die Coordinatenachsen so annehmen, daß die Achse der z der gegebenen Geraden (10) parallel, und der Mittelpunkt der Kugelfläche der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Denn alsdann gehen die Gleichungen (1) und (10) respective in

$$z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \quad , \qquad (12)$$

$$\Big|\ y = m' \quad ; \quad x = n'\ \Big| \quad ; \qquad (13)$$

die Gleichungen (11) aber in

$$\Big|\ v = 0 \quad ; \quad m'u + n't = r^2\ \Big| \qquad (14)$$

über; die Gerade (11) oder (14) liegt demnach in der jetzt zur Ebene der xy genommenen Ebene, d. i. in einer Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugelfläche geht und senkrecht auf der gegebenen Geraden (10) oder (13) ist, und sie ist die Polarlinie des in dieser Ebene befindlichen Punktes $m'n'$ in Beziehung auf den Kreis, in welchem dieselbe Ebene die Kugelfläche schneidet, wonach denn die Construction dieser Linie als bekannt anzusehen ist.

Aufgabe [59]. *Eine gerade Linie bewegt sich so, daß sie fortwährend durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Kugelfläche berührt. Es soll die, von dieser Geraden erzeugte Kegelfläche gefunden werden.*

Es seyen

$$(z-\gamma)^2 + (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2 \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung der Kugelfläche und x', y', z' die gegebenen Coordinaten des Punktes. Ziehen wir durch den Punkt $x'y'z'$ eine Gerade

$$\Big|\ x - x' = a(z-z') \quad ; \quad y - y' = b(z-z')\ \Big| \quad , \qquad (15)$$

so schneidet sie die Kugelfläche im Allgemeinen in zwei reellen oder imaginairen Punkten, deren Coordinaten wir durch Entwicklung aus den drei Gleichungen (1) und (15) finden können. Geben wir zunächst der Gleichung (1) die Form

$$(z-z')^2 + (y-y')^2 + (x-x')^2 + 2(z'-\gamma)(z-z') + 2(y'-\beta)(y-y')$$
$$+ 2(x'-\alpha)(x-x') + (z'-\gamma)^2 + (y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2 - r^2 = 0 \quad , \qquad (16)$$

und eliminiren nun, zwischen dieser Gleichung (16) und den Gleichungen (15), $(x-x')$ und $(y-y')$; so kommt

§. 37. $$(1+a^2+b^2)(z-z')^2+2\{(z'-\gamma)+b(y'-\beta)+a(x'-\alpha)\}(z-z')$$
$$+\{(z'-\gamma)^2+(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2-r^2\} = 0 \quad , \qquad (17)$$

und aus dieser Gleichung finden sich für $z-z'$, und somit auch für z, im Allgemeinen, zwei verschiedene Werthe. Wollen wir aber, daß die Gerade (15) die Kugelfläche (1) nicht in zwei Punkten schneiden, sondern in einem Punkte berühren soll, so muß z, und somit auch $z-z'$ aus der Gleichung (17) zwei gleiche Werthe erhalten, was bekanntermaßen erfordert, daß

$$\{(z'-\gamma)+b(y'-\beta)+a(x'-\alpha)\}^2$$
$$-\{(z'-\gamma)^2+(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2-r^2\}(1+a^2+b^2) = 0$$

sey. Eliminiren wir zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen (15) a und b, so ergiebt sich

$$\{(z'-\gamma)(z-z')+(y'-\beta)(y-y')+(x'-\alpha)(x-x')\}^2 =$$
$$\{(z'-\gamma)^2+(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2-r^2\}\cdot\{(z-z')^2+(y-y')^2+(x-x')^2\}\,, \quad (18)$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Kegelfläche. Vergleichen wir sie mit der Gleichung (1) in §. 34, so sehen wir, daß dieser Kegel ein Rotationskegel ist, und daß, wenn wir zur Abkürzung

$$(z'-\gamma)^2+(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2 = \varkappa^2$$

setzen, den Winkel, welchen die erzeugende Gerade mit der Achse des Kegels bildet, durch δ, die drei Winkel aber, welche diese Achse mit den Coordinatenachsen macht, durch α', β', γ' bezeichnen,

$$\cos\gamma' = \frac{z'-\gamma}{\varkappa} \quad ; \quad \cos\beta' = \frac{y'-\beta}{\varkappa} \quad ; \quad \cos\alpha' = \frac{x'-\alpha}{\varkappa}$$

$$\cos^2\delta = 1-\frac{r^2}{\varkappa^2} \quad \text{daher} \quad \sin\delta = \frac{r}{\varkappa} \quad ;$$

daß ferner die Gleichungen dieser Achse

$$\{ (z'-\gamma)(x-x') = (x'-\alpha)(z-z') \quad ; \quad (z'-\gamma)(y-y') = (y'-\beta)(z-z') \}$$

sind. Diese Gerade gehet daher nicht nur durch den Punkt $x'y'z'$, den Mittelpunkt des Kegels, sondern auch durch den Punkt $\alpha\beta\gamma$, den Mittelpunkt der Kugel.

Die Kegelfläche (18) hat mit der Kugelfläche diejenigen Punkte gemein, deren Coordinaten die Gleichungen (16) und (18) zugleich befriedigen. Diese Coordinaten müssen also auch jede Gleichung befriedigen, welche

durch Combination der beiden Gleichungen (16) und (18) hervorgehet. §. 37.
Multipliciren wir die Gleichung (16) mit dem constanten Ausdruck
$[(z'-\gamma)^2+(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2-r^2]$ und addiren zu dem Producte die Gleichung (18), so kommt

$$\left\{(z'-\gamma)(z-z')+(y'-\beta)(y-y')+(x'-\alpha)(x-x')+(z'-\gamma)^2+(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2-r^2\right\}^2=0$$

oder, wenn wir reduciren,

$$(z'-\gamma)(z-\gamma)+(y'-\beta)(y-\beta)+(x'-\alpha)(x-\alpha)=r^2 \quad , \qquad (19)$$

eine Gleichung, welche mit der Gleichung (8) übereinstimmt, wenn wir in dieser x, y, z statt t, u, v setzen, und welche also die Polarebene des Punktes $x'y'z'$ ausdrückt. Alle Punkte, welche der Kegelfläche (18) und der gegebenen Kugel gemein sind, liegen demnach in dieser Ebene (19) und somit in demjenigen Kreise, in welchem die Kugelfläche von der Ebene (19) geschnitten wird.

Jede Kegelfläche, welche eine Kugel in einem Kreise berührt, heißt der Kugel umschrieben.

Aufgabe [60]. *Eine Kugelfläche und eine Ebene sind durch ihre Gleichungen gegeben. Es soll die Gleichung der Kegelfläche gefunden werden, welche die Kugelfläche in demjenigen Kreise berührt, in welchem sie von der Ebene geschnitten wird.*

Wenn die Gleichung

$$(z-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2 \qquad (1)$$

diejenige der Kugelfläche, und

$$gz+hy+kx+1=0 \qquad (20)$$

die der Ebene ist, so brauchen wir nur diese letztere mit der Gleichung (19) zu identificiren, wodurch sich x', y' u. z' bestimmen; und setzen wir die für diese Größen resultirenden Werthe in die Gleichung (18), so ergiebt sich die verlangte Gleichung der umschriebenen Kegelfläche.

In den Lösungen der letzten Aufgaben hat sich Folgendes gezeigt: Wird irgend ein Punkt zum Mittelpunkt (Scheitel) eines der Kugel umschriebenen Kegels angenommen, so ist die Berührungscurve von einfacher Krümmung, und, weil sie auf der Kugelfläche liegt, ein Kreis; die Ebene dieser Curve ist aber die Polarebene jenes Punktes, welche auf der, durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Achse des Kegels senkrecht steht. Bewegt sich

§. 37. daher der gegebene Punkt, d. i. der Mittelpunkt des umschriebenen Kegels auf einer Ebene, so dreht sich die Ebene des Berührungskreises um einen Punkt, den Pol der Ebene, und umgekehrt, dreht sich die Ebene des Berührungskreises um einen Punkt, so bewegt sich der Mittelpunkt des umschriebenen Kegels auf einer Ebene, der Polarebene des Punktes.

Wir beschliessen diesen §. mit folgendem, jetzt leicht zu erweisenden

Lehrsatz [16]. *Wenn man einen Rotationskegel durch eine beliebige Ebene schneidet, und eine Kugel beschreibt, welche die Kegelfläche in einer Curve, und welche auch die Ebene berührt; so ist der Berührungspunkt der Kugel und der Ebene ein Brennpunkt der Durchschnittscurve der Ebene und der Kegelfläche.*

Nehmen wir die, die Kegelfläche schneidende Ebene zur Ebene der xy, und den Punkt, in welchem sie von der Kugel berührt wird, zum Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten, so sind die Gleichungen der Ebene und der Kugelfläche, deren Radius r heissen mag, respective

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z^2 + y^2 + x^2 - 2rz = 0 \quad .$$

Die Gleichung der Kegelfläche aber, deren Scheitel in irgend einem Punkte $x'y'z'$ liegt, ist, wie sich aus der Gleichung (18) ergiebt, wenn wir darin $\gamma = r$, $\beta = 0$ und $\alpha = 0$ setzen,

$$\left\{-(z'-r)(z-z') + y'(y-y') + x'(x-x')\right\}^2$$
$$= \left\{(z'-r)^2 + y'^2 + x'^2 - r^2\right\} \cdot \left\{(z-z')^2 + (y-y')^2 + (x-x')^2\right\} \quad .$$

Setzen wir hierin, um die Gleichung der Curve zu finden, in welcher die Kegelfläche von der Ebene der xy geschnitten wird, $z = 0$, so kommt, nach einer sich von selbst darbietenden Reduction,

$$(z'^2 + y'^2 + x'^2 - 2rz')(y^2 + x^2) = (y'y + x'x - 2rz')^2 \quad ,$$

eine Gleichung, welche eine Linie zweiten Grades ausdrückt, deren Brennpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt (I. §. 33. S. 1); demnach ist der Berührungspunkt der Kugelfläche und der Ebene der Brennpunkt dieser Durchschnittscurve.

§. 38.

Wenn wir durch irgend einen festen Punkt gerade Linien an eine Kugelfläche ziehen, so wird eine jede derselben die Kugelfläche, im Allgemeinen,

in zwei Punkten schneiden. Wir wollen jetzt zeigen, daß je zwei solche Durchschnittspunkte als homologe Punkte derselben collinearen und collinear-liegenden Systeme und der feste Punkt als Collineationspunkt angesehen werden kann. §. 38.

Wir nehmen den festen Punkt zum Anfangspunkt, und legen die Achse der z und der v durch den Mittelpunkt der Kugelfläche, deren Gleichung alsdann

$$v^2 + u^2 + t^2 - 2\gamma v + \gamma^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

ist. Setzen wir hierin (§. 17. G. 1)

$$v = \frac{kz}{mz+ny+px+1} \; ; \; u = \frac{ky}{mz+ny+px+1} \; ; \; t = \frac{kx}{mz+ny+px+1} \; ,$$

so kommt

$$\left.\begin{array}{l} [k^2-2\gamma km + (\gamma^2-r^2)m^2]z^2 + [k^2+(\gamma^2-r^2)n^2]y^2 + [k^2+(\gamma^2-r^2)p^2]x^2 \\ -2n[\gamma k-(\gamma^2-r^2)m]yz - 2p[\gamma k-(\gamma^2-r^2)m]xz + 2(\gamma^2-r^2)npxy \\ -2[\gamma k-(\gamma^2-r^2)m]z + 2n(\gamma^2-r^2)y + 2p(\gamma^2-r^2)x + \gamma^2 - r^2 \end{array}\right\} = 0. \; (2)$$

Die, den Punkten der Fläche (1) entsprechenden Punkte liegen demnach in einer durch die Gleichung (2) ausgedrückten Fläche, und sollen sie in der Kugelfläche (1) selbst liegen, so muß die Gleichung (2) der Gleichung (1) identisch seyn. Es müssen also, wenn unsere Behauptung wahr ist, folgende neun Gleichungen

$$\begin{array}{lll} k^2-2\gamma km+(\gamma^2-r^2)m^2 = 1 \; ; & k^2+(\gamma^2-r^2)n^2 = 1 \; ; & k^2+(\gamma^2-r^2)p^2 = 1 \; ; \\ n[\gamma k-(\gamma^2-r^2)m] = 0 \; ; & p[\gamma k-(\gamma^2-r^2)m] = 0 \; ; & np(\gamma^2-r^2) = 0 \; ; \\ \gamma k-(\gamma^2-r^2)m = \gamma \; ; & n(\gamma^2-r^2) = 0 \; ; & p(\gamma^2-r^2) = 0 \end{array}$$

durch dieselben reellen Werthe der vier Größen m, n, p und k befriedigt werden können. Und dies ist wirklich der Fall. Denn setzen wir erstens

$$m = 0 \; ; \; n = 0 \; ; \; p = 0 \; ; \; k = 1 \; ,$$

oder zweitens

$$m = \frac{2\gamma}{r^2-\gamma^2} \; ; \; n = 0 \; ; \; p = 0 \; ; \; k = -1 \; ;$$

so werden sämmtliche neun Gleichungen befriedigt. Die zuerst genannten Werthe geben

$$v = z \; ; \; u = y \; ; \; t = x \; ,$$

wodurch nicht die Collineationsverwandtschaft in ihrer Allgemeinheit, sondern die Congruenz ausgedrückt wird; die zuletzt genannten Werthe geben

§. 38. $$v = \frac{-z}{2\frac{\gamma}{r^2-\gamma^2}z+1} \quad ; \quad u = \frac{-y}{2\frac{\gamma}{r^2-\gamma^2}z+1} \quad ; \quad t = \frac{-x}{2\frac{\gamma}{r^2-\gamma^2}z+1} \quad .$$

Wir sehen hieraus, daß nicht nur die zweiten Durchschnittspunkte als den ersten entsprechend dürfen angesehen werden, sondern daß, weil $k = -1$ ist, auch je zwei homologe Punkte gegenseitig vertauscht werden können (§. 17, S. 85); und für die Gleichung der Collineationsebene ergiebt sich unmittelbar

$$\gamma z + r^2 - \gamma^2 = 0 \quad ,$$

wodurch aber auch die Polarebene des Anfangspunktes der Coordinaten ausgedrückt ist; die Collineationsebene fällt daher mit der Polarebene des, zum Collineationspunkte zu nehmenden, festen Punktes zusammen.

Hieraus ergeben sich mehrere bemerkenswerthe Folgerungen, von welchen wir einige hier anführen wollen.

Nehmen wir irgend einen Punkt A außerhalb einer Kugel zum Mittelpunkt eines der Kugel umschriebenen Kegels, so berührt dieser die Kugelfläche in einem Kreise, dessen Ebene wir durch e bezeichnen. Ziehen wir durch den Punkt A nach drei beliebigen Punkten der Kugelfläche P, Q, R gerade Linien, so schneiden diese die Kugelfläche in noch drei anderen Punkten P′, Q′, R′. Alsdann werden die Ebenen PQR u. P′Q′R′, PQ′R u. P′QR′, PQR′ u. P′Q′R, P′QR u. PQ′R′ sich respective auf der Ebene e schneiden. Die beiden Ebenen PQR u. P′Q′R′ schneiden die Kugelfläche in zwei Kreisen c, c′, und diese Kreise, welche offenbar in einer Kegelfläche a liegen, bestimmen an der Kugel zwei Berührungskegel h, h′, deren Mittelpunkte (Scheitel) wir durch H, H′ bezeichnen wollen. Nun ist klar, daß die Berührungsebene der Kugelfläche in irgend einem Punkte C des Kreises c, welche offenbar die Kegelfläche h in der erzeugenden Geraden HC berührt, der Berührungsebene der Kugelfläche in dem homologen Punkte C′ des Kreises c′ entspricht, welche offenbar die Kegelfläche h′ in der erzeugenden Geraden H′C′ berührt, woraus denn folgt, daß je zwei erzeugende Gerade HC, H′C′ homologe Linien und somit die Kegelflächen h, h′ homologe Flächen, und ihre Mittelpunkte H, H′ homologe Punkte sind. Hieraus folgt denn weiter, daß sich die Kegel h und h′ auf der Ebene e schneiden, und daß die Punkte H und H′ mit dem Punkte A in gerader Linie liegen. Da aber die Punkte H und H′ die Pole der Kreisebenen c und c′ sind, so ist ihre, durch A gehende Verbindungslinie AH die reciproke Gerade der Durchschnittslinie δ der Ebenen c, c′. Legen wir jetzt durch den Punkt A,

welcher der Pol der Ebene e ist, und durch die Gerade δ eine Ebene d, so ist diese nothwendigerweise die Polarebene desjenigen Punktes B, in welchem die Ebene e von der Geraden AH geschnitten wird. Legen wir ferner durch die Gerade AH und durch einen beliebigen Punkt C der Kreislinie c eine Ebene, so schneidet diese dieselbe Kreislinie in einem zweiten Punkte C_1, die Kreislinie c' aber in den beiden, jenen homologen Punkten C', C'_1, die Gerade δ in einem Punkte D, und die Kugelfläche in einem Kreise $CC_1C'_1C'$. Erinnern wir uns jetzt des Lehrsatzes (22) in I. §. 41, so sehen wir, daß die erzeugenden Geraden HC und $H'C'_1$, HC_1 und $H'C'$ der Kegelflächen h und h' sich respective auf der Ebene d schneiden. Legen wir durch die Gerade AH andere Ebenen, welche den Kreis c in anderen Punkten schneiden, so erhalten wir andere erzeugende Gerade der Kegel h und h', welche sich immer auf der Ebene d schneiden, und hieraus folgt, daß diese Kegelflächen h und h' sich nicht nur auf der Ebene e, sondern auch auf der Ebene d schneiden. Zugleich ergiebt sich auch, daß eine Kegelfläche b, welche den Punkt B zum Mittelpunkt hat, und welche die Kugelfläche in der Kreislinie c schneidet, diese Fläche auch in der Kreislinie c' schneiden wird.

§. 38.

Statt, wie wir gethan haben, den Punkt A beliebig anzunehmen, kann man auch die beiden Kreisebenen beliebig annehmen, wodurch alsdann der Punkt A bestimmt wird, und dann können die so eben gefundenen Resultate folgendermaßen ausgedrückt werden:

Lehrsatz [17]. *Wird eine Kugelfläche durch zwei beliebige Ebenen geschnitten, und werden die beiden Durchschnitte c, c' als Berührungskreise zweier umschriebenen Kegel b, h' angenommen; so schneiden sich die beiden Kegelflächen h und h' in zwei ebenen Curven, deren Ebenen e und d sich in der Durchschnittslinie δ der Ebenen c und c' schneiden; die beiden Kreise c, c' bestimmen zwei Kegelflächen a, b, deren Mittelpunkte A, B respective auf den Ebenen e, d, und mit den Mittelpunkten H, H' der Kegel h, h' in einer Geraden liegen; die Punkte A, B sind respective die Pole der Ebenen e, d; und endlich sind die Geraden AB und δ reciproke Gerade.*

§. 39.

Es seyen

$$(v-\gamma)^2 + (u-\beta)^2 + (t-\alpha)^2 = r^2 \quad , \qquad (1)$$
$$(z-\gamma')^2 + (y-\beta')^2 + (x-\alpha') = r'^2 \qquad (2)$$

die Gleichungen zweier Kugelflächen, deren Coordinaten t, u, v und x, y, z

§. 39. sich auf ein und dasselbe rechtwinklige System beziehen. Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach einem Punkte $x_1 y_1 z_1$, so erhalten wir

$$(v' + z_1 - \gamma)^2 + (u' + y_1 - \beta)^2 + (t' + x_1 - \alpha)^2 = r^2 \quad , \qquad (3)$$

$$(z' + z_1 - \gamma')^2 + (y' + y_1 - \beta')^2 + (x' + x_1 - \alpha')^2 = r'^2 \quad . \qquad (4)$$

Sollen beide Flächen als zu collinearen und collinear-liegenden Systemen gehörend, und der neue Anfangspunkt der Coordinaten als Collineationscentrum angesehen werden können; so muß die, durch Substitution der Ausdrücke (1) des §. 17 für v', u' u. t' aus der Gleichung (3) entstehende Gleichung der Gleichung (4) identisch seyn. Führen wir diese Substitution aus und setzen, der Kürze wegen, $x_1 - \alpha = X$, $y_1 - \beta = Y$, $z_1 - \gamma = Z$ und $(z_1 - \gamma)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (x_1 - \alpha)^2 - r^2 = M$; so kommt

$$\left.\begin{aligned} &(k^2 + 2mkZ + m^2M)z'^2 + (k^2 + 2nkY + n^2M)y'^2 + (k^2 + 2pkX + p^2M)x'^2 \\ &+ 2(nkZ + mkY + mnM)y'z' + 2(pkZ + mkX + mpM)x'z' + 2(pkY + nkX + npM)x'y' \\ &+ 2(kZ + mM)z' + 2(kY + nM)y' + 2(kX + pM)x' + M \end{aligned}\right\} = 0. \qquad (5)$$

Setzen wir ferner in der Gleichung (4), zur Abkürzung, $x_1 - \alpha' = X'$, $y_1 - \beta' = Y'$, $z_1 - \gamma' = Z'$ und $(z_1 - \alpha')^2 + (y_1 - \beta')^2 + (x_1 - \alpha')^2 - r'^2 = M'$, so bekommt diese die Form

$$z'^2 + y'^2 + x'^2 + 2Z'z' + 2Y'y' + 2X'x' + M' = 0 \quad . \qquad (6)$$

Damit nun die Gleichungen (5) u. (6) identisch seyen, müssen folgende Bedingungsgleichungen Statt finden:

$$(k^2 + 2mkZ + m^2M)M' = M \quad ; \quad (k^2 + 2nkY + n^2M)M' = M \quad ;$$
$$(k^2 + 2pkX + p^2M)M' = M \quad ; \quad (nkZ + mkY + mnM)M' = 0 \quad ;$$
$$(pkZ + mkX + mpM)M' = 0 \quad ; \quad (pkY + nkX + npM)M' = 0 \quad ;$$
$$(kZ + mM)M' = Z'M \ ; \ (kY + nM)M' = Y'M \ ; \ (kX + pM)M' = X'M.$$

Wir finden aber leicht, daß diese neun Gleichungen nur dann sämmtlich befriedigt werden, wenn

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} \quad , \qquad (7)$$

$$MX'^2 = M'X^2 \quad , \qquad (8)$$

und wenn entweder

$$k = + \frac{X}{X'} \quad ; \quad m = 0 \quad ; \quad n = 0 \quad ; \quad p = 0 \qquad (9)$$

oder wenn

$$k = - \frac{X}{X'} \ ; \ m = \frac{2Z'}{M'} \ ; \ n = \frac{2Y'}{M'} \ ; \ p = \frac{2X'}{M'} \qquad (10)$$

gesetzt wird.

Die Gleichungen (7) und (8) bestimmen die Werthe von x_1, y_1 und z_1.

Da

Da nämlich §. 39.

$$M = Z^2 + Y^2 + X^2 - r^2 \quad \text{und} \quad M' = Z'^2 + Y'^2 + X'^2 - r'^2 ,$$

so giebt die Gleichung (8)

$$X'^2Z^2 + X'^2Y^2 - X^2Z'^2 - X^2Y'^2 + X^2r'^2 - X'^2r^2 = 0$$

und reducirt sich, weil, in Folge der Gleichungen (7), $X'Z = XZ'$ und $X'Y = XY'$, auf $X^2r'^2 - X'^2r^2 = 0$, oder, was dasselbe ist, auf

$$Xr' \pm X'r = 0 ,$$

woraus denn auch, vermittelst der Gleichungen (7),

$$Yr' \pm Y'r = 0 \quad \text{und} \quad Zr' \pm Z'r = 0$$

folgt. Setzen wir in diese drei Gleichungen für X, Y, Z, X', Y' und Z' die von ihnen vertretenen Ausdrücke, und entwickeln, so kommt

$$x_1 = \frac{r'\alpha \pm r\alpha'}{r' \pm r} \ ; \quad y_1 = \frac{r'\beta \pm r\beta'}{r' \pm r} \ ; \quad z_1 = \frac{r'\gamma \pm r\gamma'}{r' \pm r} \ . \quad (11)$$

Die Formeln (1) des §. 17. sind demnach, wenn wir die Gleichungen (9) gelten lassen:

$$v' = \mp \frac{r}{r'} z' \ ; \quad u' = \mp \frac{r}{r'} y' \ ; \quad t' = \mp \frac{r}{r'} x' \ ; \quad (12)$$

und wenn die Gleichungen (10) gelten:

$$\left.\begin{aligned} v' &= \frac{\pm rM'z'}{r'(2Z'z' + 2Y'y' + 2X'x' + M')} \\ u' &= \frac{\pm rM'y'}{r'(2Z'z' + 2Y'y' + 2X'x' + M')} \\ t' &= \frac{\pm rM'x'}{r'(2Z'z' + 2Y'y' + 2X'x' + M')} \end{aligned}\right\} , \quad (13)$$

in welchen letzten Formeln (13) noch für X', Y', Z' und M' ihre Werthe zu setzen sind.

Wir sehen hieraus, daß zwei Kugelflächen von verschiedenen Radien, wie sie auch liegen mögen, erstens immer als ähnliche und ähnlich-liegende Flächen (S. 12), und daß sie zweitens immer als collineare und collinear-liegende Flächen (S. 13) angesehen werden können, und zwar auf doppelte Art, indem jedesmal, wegen der doppelten Vorzeichen in den Gleichungen (11), zwei Aehnlichkeits- oder Collineationspunkte existiren, wenn die beiden Flächen nicht concentrisch sind.

Setzen wir $v' = z'$, $u' = y'$, $t' = x'$, so finden wir, aus den Gleichungen (13), als Gleichung der Collineationsebene

§. 39.

$$2r'(Z'z' + Y'y' + X'x') + (r' \mp r)M' = 0 \quad .$$

Diese Gleichung transformiren wir auf das alte Coordinatensystem, indem wir wieder $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ respective für x', y', z' setzen, und erhalten, wenn wir außerdem für X', Y', Z' und M' ihre Werthe substituiren,

$$2r'\left\{(z_1 - \gamma')(z - z_1) + (y_1 - \beta')(y - y_1) + (x_1 - \alpha')(x - x_1)\right\}$$
$$+ (r' \mp r)\left\{(z_1 - \gamma')^2 + (y_1 - \beta')^2 + (x_1 - \alpha')^2 - r'^2\right\} = 0 \quad ,$$

oder, nach Substitution der Ausdrücke (11) für x_1, y_1 und z_1,

$$2(\gamma-\gamma')z + 2(\beta-\beta')y + 2(\alpha-\alpha')x + \gamma'^2 + \beta'^2 + \alpha'^2 - \gamma^2 - \beta^2 - \alpha^2 + r^2 - r'^2 = 0, \quad (14)$$

eine Gleichung, in welcher die doppelten Vorzeichen von selbst verschwunden sind, woraus sich ergiebt, daß die Collineationsebene dieselbe ist, man mag den einen oder den anderen der beiden gefundenen Punkte (11) als Collineationscentrum nehmen.

Es darf hier nicht unbemerkt bleiben, daß die Gleichung (14) unmittelbar aus den Gleichungen (1 u. 2) der Kugelflächen hervorgehet, wenn man $v = z$, $u = y$, $t = x$ setzt, und sodann die erste dieser Gleichungen von der zweiten abzieht; woraus denn folgt, daß die Ebene (14) die Durchschnittscurve beider Kugelflächen enthält, es mag diese Curve reell oder imaginair seyn.

Die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Kugelflächen verbindet, und Centrallinie genannt wird, hat

$$\left\{(\gamma-\gamma')(x-\alpha) = (\alpha-\alpha')(z-\gamma) \quad ; \quad (\gamma-\gamma')(y-\beta) = (\beta-\beta')(z-\gamma)\right\} \quad (15)$$

zu Gleichungen, welche, wie wir sehen, von den Werthen (11) von x_1, y_1 und z_1 befriedigt werden. Die Collineationspunkte liegen also auf dieser Centrallinie (15), auf welcher die Collineationsebene (14) senkrecht steht.

Von den beiden Aehnlichkeitspunkten ist derjenige, dessen Coordinaten in ihren Ausdrücken (11) das obere Vorzeichen haben, der innere, und derjenige, dessen Coordinaten in denselben Ausdrücken das untere Vorzeichen haben, der äußere Aehnlichkeitspunkt (§. 20. S. 96). Nehmen wir jenen ersten Punkt, so müssen wir auch in den Gleichungen (12) die oberen Zeichen nehmen, und dann sind die beiden Kugelflächen als symmetrisch-ähnlich, nehmen wir den zweiten Punkt, und demgemäß auch die unteren Vorzeichen in den Gleichungen (12), so sind die Kugelflächen als vollkommen ähnlich zu betrachten. Hieraus folgt, nach §. 20, daß von den sechs Aehnlichkeitspunkten an drei Kugelflächen die drei äußeren sowohl als jeder äußere mit zwei inneren in gerader Linie liegen.

§. 39. Betrachten wir jetzt drei Kugelflächen, deren Mittelpunkte nicht in gerader Linie liegen, und legen durch diese Mittelpunkte eine Ebene (Centralebene), so stehen die Collineationsebenen von je zwei dieser Kugelflächen auf den in der Centralebene liegenden Centrallinien, und somit auf dieser Centralebene selbst senkrecht. Die drei Kugelflächen schneiden ihre Centralebene in drei Kreisen, deren Collineationsachsen die Durchschnittslinien der genannten Collineationsebenen mit der Centralebene sind. Diese drei Collineationsachsen schneiden sich aber in einem Punkte (I. §. 23), woraus nun folgt, daß die genannten drei Collineationsebenen sich in einer, auf der Centralebene senkrechten Geraden schneiden. Eine vierte Kugelfläche, deren Mittelpunkt nicht in der Centralebene der drei ersten liegt, hat mit den drei vorher genannten Kugelflächen drei Collineationsebenen; und sämmtliche sechs Collineationsebenen schneiden sich in einem Punkte. Denn bezeichnen wir die Gleichungen der vier Kugelflächen durch

$$A_1 = 0 \quad ; \quad A_2 = 0 \quad ; \quad A_3 = 0 \quad ; \quad A_4 = 0 \quad ,$$

so sind die Gleichungen der sechs Collineationsebenen, nach Demjenigen, was wir oben gesehen haben,

$$A_1 - A_2 = 0 \quad ; \quad A_1 - A_3 = 0 \quad ; \quad A_1 - A_4 = 0 \quad ;$$
$$A_2 - A_3 = 0 \quad ; \quad A_2 - A_4 = 0 \quad ; \quad A_3 - A_4 = 0 \quad ,$$

und von diesen sechs Gleichungen ist nicht nur jede eine nothwendige Folge von zwei anderen, d. i. es schneiden sich nicht nur die drei Collineationsebenen von drei Kugelflächen in einer und derselben Geraden; sondern die Coordinaten des Durchschnittspunktes der drei ersten jener sechs Collineationsebenen, welche die drei ersten Gleichungen zugleich befriedigen, genügen nothwendigerweise auch den drei letzten Gleichungen, d. i. alle sechs Ebenen schneiden sich in einem Punkte.

Nehmen wir einen der beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kugelflächen zum Mittelpunkte einer Kegelfläche, welche wir der einen dieser beiden Kugelflächen umschreiben, so berührt diese Kegelfläche auch die andere Kugel. Da nämlich jede erzeugende Gerade der Kegelfläche mit der ersten Kugelfläche einen und nur einen Punkt gemein hat, so wird diese Gerade, da sie durch den Collineationspunkt gehet, mit der anderen Kugelfläche auch einen, und zwar nur den homologen Punkt des erstgenannten gemein haben, folglich wird die Kegelfläche auch die zweite Kugelfläche berühren. Die Ebenen

§. 39. der Berührungskreise auf beiden Kugelflächen stehen auf der, durch die Mittelpunkte gehenden Achse des Kegels, welche die Centrallinie der Kugelflächen ist, senkrecht, und sie sind folglich der Collineationsebene parallel.

§. 40.

Wenn die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kugelflächen der Summe oder der Differenz ihrer Radien gleich ist, so berühren die Kugelflächen einander. In diesem Falle findet zwischen den Coordinaten der Mittelpunkte und den Radien die Relation

$$(\gamma-\gamma')^2+(\beta-\beta')^2+(\alpha-\alpha')^2=(r\pm r')^2$$

Statt, und vermittelst dieser Relation können wir der Gleichung (14) der Collineationsebene die eine und die andere der beiden Formen

$$(\gamma-\gamma')(z-\gamma)+(\beta-\beta')(y-\beta)+(\alpha-\alpha')(x-\alpha)+r(r\pm r')=0\ ,$$
$$(\gamma'-\gamma)(z-\gamma')+(\beta'-\beta)(y-\beta')+(\alpha'-\alpha)(x-\alpha')+r'(r'\pm r)=0$$

geben. Für die Länge der Perpendikel von den Mittelpunkten $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ auf diese Collineationsebene finden wir nun respective r und r'; und hieraus ergiebt sich leicht, daß die Collineationsebene zweier einander berührender Kugelflächen mit der gemeinschaftlichen Tangentialebene im Berührungspunkte coincidirt.

Aufgabe [61]. Es sind drei Kugelflächen gegeben; man soll finden, erstens den Ort des Mittelpunktes einer vierten Kugel, welche die drei gegebenen berührt; zweitens den Ort eines jeden der drei Berührungspunkte.

Wir nehmen den Mittelpunkt von einer der gegebenen Kugelflächen zum Anfangspunkte der Coordinaten, und die Centralebene dieser drei Kugelflächen zur Ebene der xy. Die Gleichungen der gegebenen Kugelflächen sind alsdann

$$\left.\begin{aligned} z^2+y^2+x^2&=r_1^2\ ;\\ z^2+(y-\beta_2)^2+(x-\alpha_2)^2&=r_2^2\ ;\\ z^2+(y-\beta_3)^2+(x-\alpha_3)^2&=r_3^2\ ;\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

und die der gesuchten ist

$$(z-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2\ ,\qquad(2)$$

wo α_2, β_2, α_3, β_3, r_1, r_2 und r_3 bekannte, α, β, γ und r aber unbekannte Größen bedeuten.

Wir nehmen an, daß die zuletzt genannte Kugelfläche (2) die gegebenen von außen berühre, alsdann ist

$$\gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2 = (r + r_1)^2 \qquad (3)$$ §. 40.

$$\gamma^2 + (\beta - \beta_2)^2 + (\alpha - \alpha_2)^2 = (r + r_2)^2 \quad , \qquad (4)$$

$$\gamma^2 + (\beta - \beta_3)^2 + (\alpha - \alpha_3)^2 = (r + r_3)^2 \quad . \qquad (5)$$

I. Ziehen wir die Gleichungen (4) und (5) von der Gleichung (3) ab, so erhalten wir

$$2\beta_2\beta + 2\alpha_2\alpha = \beta_2^2 + \alpha_2^2 + r_1^2 - r_2^2 + 2(r_1 - r_2)r \quad , \qquad (6)$$

$$2\beta_3\beta + 2\alpha_3\alpha = \beta_3^2 + \alpha_3^2 + r_1^2 - r_3^2 + 2(r_1 - r_3)r \quad ; \qquad (7)$$

und eliminiren wir zwischen diesen Gleichungen (6) und (7) das r, so kömmt

$$\frac{2\beta_2\beta + 2\alpha_2\alpha - \beta_2^2 - \alpha_2^2 - r_1^2 + r_2^2}{r_1 - r_2} = \frac{2\beta_3\beta + 2\alpha_3\alpha - \beta_3^2 - \alpha_3^2 - r_1^2 + r_3^2}{r_1 - r_3} \, . \qquad (8)$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf α und β vom ersten Grade, deshalb drückt sie eine, auf der Ebene der xy senkrechte, Ebene aus. Da diese selbige Gleichung (8) befriedigt wird, wenn wir

$$2\beta_2\beta + 2\alpha_2\alpha - \beta_2^2 - \alpha_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 \; ; \; 2\beta_3\beta + 2\alpha_3\alpha - \beta_3^2 - \alpha_3^2 - r_1^2 + r_3^2 = 0 \; (9)$$

setzen, so enthält die, durch sie ausgedrückte Ebene die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, welche die letzten Gleichungen (9) darstellen. Diese letzteren Ebenen (9) sind offenbar die Collineationsebenen der ersten und zweiten und der ersten und dritten gegebenen Kugelfläche. Die Ebene (8) bildet mit der Ebene der xz einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente

$$-\frac{(r_1 - r_3)\alpha_2 - (r_1 - r_2)\alpha_3}{(r_1 - r_3)\beta_2 - (r_1 - r_2)\beta_3}$$

ist, und da die Coordinaten x_2, y_2 und x_3, y_3 der äußeren Aehnlichkeitspunkte der ersten und zweiten und der ersten und dritten gegebenen Kugelfläche

$$x_2 = \frac{r_1\alpha_2}{r_1 - r_2} \; ; \; y_2 = \frac{r_1\beta_2}{r_1 - r_2} \; ; \; x_3 = \frac{r_1\alpha_3}{r_1 - r_3} \; ; \; y_3 = \frac{r_1\beta_3}{r_1 - r_3}$$

sind (§. 39), so ist

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{(r_1 - r_3)\beta_2 - (r_1 - r_2)\beta_3}{(r_1 - r_3)\alpha_2 - (r_1 - r_2)\alpha_3} \; ;$$

folglich steht die Ebene (8) auf der Verbindungslinie der äußeren Aehnlichkeitspunkte x_2y_2 und x_3y_3, welche auch den äußeren Aehnlichkeitspunkt der zweiten und dritten gegebenen Kugel enthält (§. 39), senkrecht.

Eliminiren wir zwischen einer der Gleichungen (3), (4) u. (5) und einer der Gleichungen (6) u. (7) ebenfalls das r, so bekommen wir eine Gleichung in α, β und γ, welche vom zweiten Grade ist; und eliminiren wir ferner zwischen dieser letzten Gleichung und der Gleichung (8) das β,

§ 40. so ergiebt sich eine Gleichung in α und γ, welche nothwendigerweise ebenfalls vom zweiten Grade ist. Diese letzte Gleichung in α und γ drückt eine Cylinderfläche zweiten Grades aus; und alle Mittelpunkte $\alpha\beta\gamma$ der berührenden Kugelfläche liegen sowohl auf dieser Cylinderfläche als auf der Ebene (8); daher ist der verlangte Ort der Mittelpunkte die Durchschnittscurve dieser Cylinderfläche und der Ebene (8), somit ist dieser Ort eine Curve einfacher Krümmung und zwar eine Linie zweiten Grades. (Wir werden in §. 58. auf diese Curve zurück zu kommen Gelegenheit haben.)

II. Nennen wir die Coordinaten des Berührungspunktes der Kugelfläche (2) mit der ersten Kugelfläche (1) t, u, v, so haben wir

$$v^2 + u^2 + t^2 = r_1^2 \quad , \qquad (10)$$

$$(v-\gamma)^2 + (u-\beta)^2 + (t-\alpha)^2 = r^2 \quad . \qquad (11)$$

Addiren wir die Gleichungen (3) und (10), und subtrahiren von der Summe die Gleichung (11), so kommt

$$\gamma v + \beta u + \alpha t = r_1(r + r_1) \quad . \qquad (12)$$

Setzen wir in dieser Gleichung für $r + r_1$ und r_1 die Ausdrücke, welche die Gleichungen (3) und (10) geben, so erhalten wir, nach einigen sich von selbst darbietenden Reductionen,

$$(\beta v - \gamma u)^2 + (\alpha v - \gamma t)^2 + (\alpha u - \beta t)^2 = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, welche offenbar nur bestehen kann, wenn

$$\beta v - \gamma u = 0 \quad ; \quad \alpha v - \gamma t = 0 \quad ; \quad \alpha u - \beta t = 0 \qquad (13)$$

ist, woraus wir sehen, daß der Berührungspunkt tuv mit den Mittelpunkten der beiden genannten Kugelflächen in gerader Linie liegt, was auch ohnehin klar ist. Aus den Gleichungen (12) und (13) erhalten wir, wenn wir noch die Gleichung (10) berücksichtigen:

$$\gamma = \frac{v(r + r_1)}{r_1} \quad ; \quad \beta = \frac{u(r + r_1)}{r_1} \quad ; \quad \alpha = \frac{t(r + r_1)}{r_1} \quad .$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (6) und (7), und eliminiren sodann das r, so kommt

$$\left\{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - (r_1 - r_3)^2\right\} \cdot \left\{\beta_2 u + \alpha_2 t - r_1(r_1 - r_2)\right\} =$$
$$\left\{\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 - r_2)^2\right\} \cdot \left\{\beta_3 u + \alpha_3 t - r_1(r_1 - r_3)\right\} \quad . \qquad (14)$$

Diese Gleichung, welche v nicht enthält, ist in Beziehung auf t und u vom ersten Grade; sie drückt daher eine, auf der Ebene der tu, d. i. auf der Centralebene der gegebenen Kugelflächen senkrechte Ebene aus. Der Durchschnitt dieser Ebene und der ersten gegebenen Kugelfläche (1) ist der Ort

des Berührungspunktes an dieser letzteren, und dieser gesuchte Ort ist demnach eine Kreislinie. Die Ebene (14) dieser Kreislinie schneidet die Ebene der tu in einer Geraden, welche durch dieselbe Gleichung (14) ausgedrückt ist; und da wir diese Gerade (I. §. 25. G. 12) schon construirt haben, so geht hieraus die Construction der Ebene (14) hervor. Doch bemerken wir noch, daß die Ebene (14) die Durchschnittslinie der Collineationsebenen der gegebenen Kugelflächen enthält (I. §. 25. G. 17 u. 18). — Sowohl für die zweite als für die dritte gegebene Kugelfläche ist nun der Ort des Berührungspunktes offenbar ebenfalls ein auf ihr befindlicher Kreis, dessen Ebene gleichfalls die genannte Durchschnittslinie der Collineationsebenen enthält. §. 40.

Wenn die gegebenen Kugelflächen sämmtlich von innen oder theils von außen und theils von innen berührt werden sollen, so sind die Vorzeichen von r_1, r_2 u. r_3 in den gefundenen Gleichungen (8) und (14) sämmtlich oder zum Theil nur umzukehren, wodurch die gefundenen Resultate, in Beziehung auf ihre allgemeine Form, nicht geändert werden (Vergl. I. S. 89 u. 90).

Die in der Lösung dieser Aufgabe enthaltenen Ergebnisse sind also folgende. Wenn drei feste Kugelflächen S_1, S_2, S_3 von einer veränderlichen vierten Kugelfläche S_4 berührt werden, so ist der Ort des Mittelpunktes der Kugelfläche S_4 eine Curve einfacher Krümmung C, und zwar eine Linie zweiten Grades, deren Ebene auf der Verbindungslinie der drei Aehnlichkeitspunkte von S_1 u. S_2, von S_1 u. S_3, von S_2 u. S_3 senkrecht steht; und der Ort des Berührungspunktes auf den Kugelflächen S_1, S_2, S_3 respektive ein Kreis C_1, C_2, C_3. Die Ebenen dieser vier Curven C, C_1, C_2, C_3, und die drei Collineationsebenen der Kugelflächen S_1 u. S_2, S_1 u. S_3, S_2 u. S_3 schneiden sich in einer und derselben Geraden G, welche auf der Centralebene von S_1, S_2 u. S_3 senkrecht steht.

Wir fügen diesen Resultaten noch folgende Bemerkungen hinzu. Betrachten wir eine bestimmte berührende Kugelfläche S, und legen in den Berührungspunkten a_1, a_2 u. a_3 mit den Kugelflächen S_1, S_2 und S_3 die gemeinschaftlichen Tangentialebenen, so sind diese, wie oben bemerkt worden, zugleich respective die Collineationsebenen der Kugelfläche S und einer jeden der Kugelflächen S_1, S_2 und S_3; diese Tangentialebenen schneiden sich daher in einem auf der Geraden G liegenden Punkte b. Die Tangenten an den Kreisen C_1, C_2, C_3 respective in den Punkten a_1, a_2, a_3 liegen aber offenbar in den genannten Tangentialebenen und respective in den Ebenen dieser Kreise; sie gehen folglich alle drei ebenfalls durch den auf der Geraden G befindlichen Punkt b.

§. 40. Nehmen wir die Gleichung

$$(z-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = r^2 \qquad (2)$$

als diejenige der eben erwähnten bestimmten Kugelfläche S, und

$$(z-\gamma')^2+(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2 = r'^2 \qquad (2')$$

als diejenige einer anderen, die Kugelflächen S_1, S_2, S_3 ebenfalls von außen berührenden Kugelfläche S'; bezeichnen wir auch, der Kürze wegen,

$\beta_2{}^2+\alpha_2{}^2+r_1{}^2-r_2{}^2$ durch m_2 ; $\beta_3{}^2+\alpha_3{}^2+r_1{}^2-r_3{}^2$ durch m_3 ;

so haben wir außer den Gleichungen

$$2\beta_2\beta+2\alpha_2\alpha = m_2+2(r_1-r_2)r \quad , \qquad (6)$$

$$2\beta_3\beta+2\alpha_3\alpha = m_3+2(r_1-r_3)r \quad , \qquad (7)$$

auch noch

$$2\beta_2\beta'+2\alpha_2\alpha' = m_2+2(r_1-r_2)r' \quad , \qquad (6')$$

$$2\beta_3\beta'+2\alpha_3\alpha' = m_3+2(r_1-r_3)r' \quad . \qquad (7')$$

Eliminiren wir r_1-r_2 zwischen den Gleichungen (6) und (6'), und r_1-r_3 zwischen den Gleichungen (7) und (7'), so kommt:

$$\left.\begin{aligned} 2\beta_2\left(\frac{r'\beta-r\beta'}{r'-r}\right)+2\alpha_2\left(\frac{r'\alpha-r\alpha'}{r'-r}\right)-m_2 = 0 \quad , \\ 2\beta_3\left(\frac{r'\beta-r\beta'}{r'-r}\right)+2\alpha_3\left(\frac{r'\alpha-r\alpha'}{r'-r}\right)-m_3 = 0 \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des (äußeren) Aehnlichkeitspunktes der Kugelflächen S und S' durch x_1, y_1, so ist (§. 39. G. 11)

$$\frac{r'\beta-r\beta'}{r'-r} = y_1 \;;\; \frac{r'\alpha-r\alpha'}{r'-r} = x_1 \quad ,$$

wodurch die Gleichungen (15), wenn wir für m_2 und m_3 die von ihnen vertretenen Ausdrücke setzen, sich in

$$2\beta_2y_1+2\alpha_2x_1-\beta_2{}^2-\alpha_2{}^2-r_1{}^2+r_2{}^2=0 \;;\; 2\beta_3y_1+2\alpha_3x_1-\beta_3{}^2-\alpha_3{}^2-r_1{}^2+r_3{}^2=0 \quad (16)$$

verwandeln. Der (äußere) Aehnlichkeitspunkt der Kugelflächen S u. S' liegt also in der Durchschnittslinie der beiden, durch die Gleichungen (16) ausgedrückten Ebenen, und da diese, wie wir sehen, die Collineationsebenen der Kugelflächen S_1 u. S_2, S_1 u. S_3 sind, in der Geraden G.

Wir können daher den vorher zusammengefaßten Ergebnissen noch Folgendes hinzufügen. Sind a_1, a_2, a_3 die Punkte, in welchen die Kugelfläche S_4 die Kugeln S_1, S_2, S_3 berührt, so schneiden sich die Tangenten an den Kreisen C_1, C_2, C_3, welche in diesen Punkten a_1, a_2, a_3 gezogen werden, in einem und demselben Punkte b, und dieser Punkt liegt auf der genannten Geraden G. Nehmen

wir aus der unendlichen Menge der Kugelflächen S_4 zwei beliebige und construiren ihre beiden Aehnlichkeitspunkte, so liegt einer derselben in der nämlichen Geraden G*).

Aufgabe [62]. Vier Kugelflächen sind gegeben; es soll eine fünfte Kugelfläche gefunden werden, welche die gegebenen berührt.

Wir wollen die gegebenen Kugelflächen durch S_1, S_2 S_3 und S_4, die gesuchte aber durch S bezeichnen. Wenn nun die Fläche S die Flächen S_1, S_2 und S_3 berührt, so liegt der Berührungspunkt von S und S_1 in einer bestimmten Kreislinie C_1 auf der Fläche S_1, deren Ebene wir, nach der vorigen Aufgabe, zu construiren wissen, und wenn dieselbe Fläche S die Flächen S_1, S_2 und S_4 berührt, so liegt der Berührungspunkt von S und S_1 in einer bestimmten Kreislinie C'_1 auf der Fläche S_1, deren Ebene wir gleichfalls nach der vorigen Aufgabe zu construiren wissen. Der genannte Berührungspunkt, welcher sich auf den beiden Kreislinien C_1 und C'_1 zugleich befinden muß, ist also einer der beiden Durchschnittspunkte dieser Kreise, und somit als gefunden zu betrachten. Auf gleiche Weise erhalten wir die Berührungspunkte der Fläche S mit der Fläche S_2 und mit der Fläche S_3. Verbinden wir nun einen jeden der drei gefundenen Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte derjenigen gegebenen Fläche, auf welcher er sich befindet; so schneiden diese drei (verlängerten) Verbindungslinien sich in einem Punkte, welcher der Mittelpunkt der verlangten Kugelfläche S, und wodurch diese gänzlich bestimmt ist.

Der beschränkte Raum gestattet uns nicht auf eine Determination der einzelnen Fälle näher einzugehen; doch wollen wir bemerklich machen, daß es höchstens 16 Kugelflächen giebt, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

§. 41.

Wenn ein Punkt sich auf einer Kugelfläche bewegt, so beschreibt er eine Curve, welche im Allgemeinen von doppelter Krümmung ist, und eine sphärische Curve genannt wird. Eine solche sphärische Curve kann, wie eine jede Curve, durch die Gleichungen zweier projicirenden Cylinder ausgedrückt werden; sie läßt sich aber auch — und dies ist in der Regel die bequemere Darstellungsweise — durch die Gleichungen der Kugel und derjenigen Kegelfläche, deren Mittelpunkt im Centrum der Kugel liegt, und

*) Alle diese Ergebnisse sind zuerst von Herrn Dupin bekannt gemacht worden.

§. 41. welche die Curve enthält, ausdrücken. Drücken wir die eben genannten Flächen in Polarcoordinaten der vierten Art aus, so ist, wenn r den Radius der Kugel bedeutet, die Gleichung der Kugelfläche

$$u = r \quad ,$$

und diejenige der Kegelfläche

$$\varphi(\tau, t) = 0 \quad ; \qquad (1)$$

alsdann ist auch die sphärische Curve durch die eine Gleichung (1) zwischen zwei veränderlichen Coordinaten τ und t dargestellt, wenn nur u constant und gleich dem Radius der Kugel gedacht wird.

Der Grad einer sphärischen Linie ist derselbe als der Grad der genannten Kegelfläche.

Die Eigenschaften der sphärischen Curven können aus den Eigenschaften der Kegelflächen unmittelbar abgeleitet werden. Um hiervon ein Beispiel zu geben, wollen wir diejenige Curve auf der Kugelfläche betrachten, welche der Ort des Scheitels eines sphärischen Dreiecks von gegebener Grundlinie und gegebenem Inhalte ist. Bezeichnen wir die constante Grundlinie des Dreiecks, welche ein Bogen eines Hauptkreises ist, durch 2ε, die veränderlichen Winkel des Dreiecks durch m, n, p, den constanten Flächeninhalt durch s; so ist bekanntermaßen $s = m + n + p - \pi$. Construiren wir nun eine dreikantige körperliche Ecke, deren Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, von welcher zwei Kanten durch die Endpunkte der gegebenen Grundlinie 2ε gehen und in welcher die Summe der drei Neigungswinkel gleich $s + \pi$ ist; so wird diese Ecke die Kugelfläche in einem sphärischen Dreiecke schneiden, welches die gegebene Grundlinie und den gegebenen Inhalt hat. Der Ort der dritten Kante jener Ecke ist aber, wie wir in der Aufgabe 51. (§. 34) gefunden haben, ein Rotationskegel; daher ist der Ort des Scheitels der in Rede stehenden Dreiecke diejenige Curve, in welcher die Kugelfläche von diesem Rotationskegel geschnitten wird, d. i. ein Kreis. Als zweites Beispiel wollen wir den Ort des Scheitels eines sphärischen Dreiecks von gegebener Grundlinie und gegebener Summe oder Differenz der Seiten betrachten. Dieser Ort ist offenbar diejenige Curve, in welcher die Kugelfläche von der, in der Aufgabe 52. (§. 34) gefundenen, ihr concentrischen Kegelfläche zweiten Grades geschnitten wird, und daher eine sphärische Linie zweiten Grades. Der Analogie wegen heißen diejenigen Punkte, in welchen die Kugelfläche von den Focallinien der eben genannten Kegelfläche geschnitten wird, die Brennpunkte der sphärischen Linie zweiten Grades. Legen wir an der Kegelfläche eine Tangentialebene, so schneidet diese

die Kugelfläche in einem Hauptkreise, welcher augenscheinlich die in Rede stehende Curve berührt; ein solcher Hauptkreis heißt eine sphärische Tangente der Curve. Aus dem in §. 35. erwiesenen Lehrsatz [15] ergiebt sich nun unmittelbar, daß die, von den Brennpunkten einer sphärischen Linie zweiten Grades nach einem Punkte ihrer Peripherie gezogenen Hauptkreisbogen gleiche Winkel mit der sphärischen Tangente der Curve in jenem Punkte bilden. §. 41.

Wir wollen über die sphärischen Linien des zweiten Grades noch Folgendes bemerken.

Wenn es die Gleichungen

$$\left\{ \frac{y^2}{tg^2 b} + \frac{x^2}{tg^2 a} = z^2 \ ; \ z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \right\} \qquad (2)$$

sind (vergl. §. 34., S. 11), welche eine solche Linie darstellen, so kann ein jeder der sechs Punkte, in welchen die Kugelfläche von den drei Coordinatenachsen geschnitten wird, als Mittelpunkt der Curve betrachtet werden. — Durch Verwandlung in Polarcoordinaten der vierten Art geht die erste der beiden Gleichungen (2) in die Gleichung (12) oder in die Gleichung (13) des §. 34. über, und diese eben genannten Gleichungen zwischen den beiden veränderlichen Größen t' und τ' oder t und τ drücken demnach eine sphärische Linie des zweiten Grades aus, wenn u constant und gleich r gedacht wird. — Ein solcher Unterschied wie zwischen der ebenen Ellipse und der ebenen Hyperbel findet bei den sphärischen Linien zweiten Grades im eigentlichen Sinne nicht Statt. — Aus den, in §. 35. vermittelst der Centralcollineation hergeleiteten Sätzen über Kegelflächen zweiten Grades folgen ähnliche Sätze von sphärischen Linien zweiten Grades; z. B. „daß eine sphärische Linie zweiten Grades durch fünf Punkte der Kugelfläche, oder durch fünf berührende Hauptkreise bestimmt ist" u. s. f. Ferner, „daß, wenn ein Durchschnitt zweier, eine sphärische Linie zweiten Grades berührenden Hauptkreise sich auf einem Hauptkreise bewegt, derjenige Hauptkreisbogen, welcher die Berührungspunkte verbindet, sich um einen Punkt dreht, und umgekehrt"; woraus sich dann ergiebt, daß alle diejenigen Beziehungen, welche bei ebenen Linien des zweiten Grades zwischen dem Pol und seiner Polaren Statt haben, bei sphärischen Linien des zweiten Grades, zu welchen auch die Nebenkreise auf der Kugelfläche gehören, sich ebenfalls vorfinden.

Wird eine Kugelfläche von einer Kegelfläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt nicht in dem Mittelpunkte der Kugel liegt, geschnitten; so ist

§. 41. die Durchschnittscurve eine sphärische Linie, die im Allgemeinen nicht vom zweiten Grade ist. Die Ebenen, welche durch den Mittelpunkt dieser Kegelfläche gelegt werden, schneiden die Kugelfläche in Nebenkreisen, und die genannte sphärische Linie hat, in Beziehung auf diese Nebenkreise, alle diejenigen Eigenschaften, welche eine sphärische Linie zweiten Grades in Beziehung auf Hauptkreise hat.

Wir bemerken noch Folgendes. Ist auf der Kugelfläche ein von Hauptkreisbogen gebildetes sphärisches Polygon A gegeben, und bildet man in derselben Kugel, oder in einer ihr gleichen, diejenige körperliche Ecke a, welche die Ebenen der Hauptkreisbogen des Polygons A einschließen, so giebt es immer eine Ecke b, welche der Ecke a conisch-reciprok und mit ihr reciprok liegend ist; diese Ecke b schneidet die Kugelfläche in einem sphärischen Polygone B, welches mit dem Polygone A in der Verwandtschaft der Reciprocität stehet, und mit ihm reciprok-liegend ist, so daß, wenn die Hauptkreisbogen, welche gewisse Eckpunkte des Polygons A verbinden, sich in einem Punkte schneiden, die Durchschnittspunkte gewisser Seiten des Polygons B auf einem Hauptkreise liegen, und umgekehrt. Nehmen wir den besonderen Fall an, in welchem die Reciprocität der Ecken a und b durch die Gleichung (14) des §. 28. ausgedrückt ist, so ist das Polygon B diejenige Figur, welche in den Elementen die Polarfigur des Polygons A genannt wird.

Flächen zweiten Grades.

§. 42.

Jede Gleichung vom zweiten Grade zwischen den rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten x, y, z kann auf die Form

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (1)$$

gebracht werden. Wir nehmen an, daß die Constanten a, b, c, a', ꝛc., reelle Größen bedeuten. Wenn wir den Coordinaten x und y beliebige aber bestimmte Werthe beilegen, so erhält z aus dieser Gleichung (1) zwei bestimmte, reelle oder imaginaire Werthe; die Punkte, deren Coordinaten diese Gleichung (1) befriedigen, sind daher auf einen gewissen Ort im Raume beschränkt, der, weil die Gleichung (1) vom zweiten Grade ist, Fläche des zweiten Grades genannt wird. Sind die, aus der Gleichung (1) sich ergebenden Werthe von z immer imaginair, welche reellen Werthe man auch den Größen x und y beilegen mag, so drückt die Gleichung (1) keinen reellen Punkt und keine reelle Fläche, sondern eine imaginaire Fläche aus; wird z nur für ein einziges Paar reeller Werthe von x und y reell, so drückt sie einen Punkt aus; wird z nicht für beliebige reelle Werthe von x und y, sondern nur für diejenigen reellen Werthe dieser Größen, welche eine bestimmte zweite Gleichung befriedigen, reell, so drückt unsere Gleichung (1) eine Linie aus. Läßt sich die Gleichung (1) in zwei reelle Factoren vom ersten Grade zerlegen, so drückt sie das System zweier Ebenen aus, welches, eben weil es durch eine Gleichung des zweiten Grades dargestellt ist, als eine Fläche zweiten Grades betrachtet werden kann. Findet keiner von den genannten Fällen Statt, so drückt die Gleichung (1) eine krumme Fläche aus. Wir werden bald sehen, wie viele verschiedene Arten von krummen Flächen des zweiten Grades existiren.

Ein Punkt, welcher so liegt, daß er alle, durch ihn gezogenen, von ei-

§. 42. ner Fläche zweiten Grades begrenzten, geraden Linien halbirt, heißt der **Mittelpunkt** dieser Fläche.

Aufgabe [63]. Die Gleichung (1) einer Fläche zweiten Grades ist gegeben; es sollen die Coordinaten ihres Mittelpunktes gefunden werden.

Es seyen x', y', z' die gesuchten Coordinaten des Mittelpunktes. Nehmen wir diesen Punkt zum Anfangspunkte neuer Coordinaten, und setzen, um zu transformiren, $x + x'$, $y + y'$, $z + z'$ respective für x, y, z; so erhalten wir aus der Gleichung (1)

$$\left.\begin{array}{l} az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz \\ +2(az'+b'x'+c'y'+a'')z+2(by'+a'x'+c'z'+b'')y+2(cx'+a'y'+b'z'+c'')x \\ +az'^2+by'^2+cx'^2+2a'x'y'+2b'x'z'+2c'y'z'+2a''z'+2b''y'+2c''x'+d \end{array}\right\} = 0. \quad (2)$$

Ziehen wir nun durch den neuen Anfangspunkt der Coordinaten irgend eine Gerade, und schneidet diese die Fläche in einem Punkte p, dessen Coordinaten in Beziehung auf das neue Coordinatensystem $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ sind; so wird dieselbe Gerade die Fläche in einem zweiten Punkte p' schneiden, und die Coordinaten dieses zweiten Punktes werden nothwendigerweise $x = -\alpha$, $y = -\beta$, $z = -\gamma$ seyn, wenn der neue Anfangspunkt der Coordinaten der Mittelpunkt der Fläche ist. Die Gleichung (2) muß also, wenn ihr irgend drei Werthe der Coordinaten x, y, z genügen, auch von den entgegengesetzten Werthen befriedigt werden, falls der neue Anfangspunkt der Coordinaten der Mittelpunkt der Fläche ist. Daher müssen denn offenbar die Glieder, welche x, y, z in erster Potenz enthalten, in dieser Gleichung (2) nicht vorkommen, und es muß demnach

$$\left.\begin{array}{l} az' + c'y' + b'x' + a'' = 0 \\ c'z' + by' + a'x' + b'' = 0 \\ b'z' + a'y' + cx' + c'' = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

seyn. Aus diesen drei Gleichungen ergiebt sich, wenn wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} a''(a'^2 - bc) + b''(cc' - a'b') + c''(bb' - a'c') = A \\ b''(b'^2 - ac) + c''(aa' - b'c') + a''(cc' - a'b') = B \\ c''(c'^2 - ab) + a''(bb' - a'c') + b''(aa' - b'c') = C \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = D \quad (5)$$

setzen,

$$z' = \frac{A}{D} \; ; \; y' = \frac{B}{D} \; ; \; x' = \frac{C}{D} \; , \quad (6)$$

welches die gesuchten Coordinaten des Mittelpunktes sind.

Hierbei ist aber Folgendes zu bemerken:

I. Dem Ausdrucke, den wir durch D bezeichnet haben, lassen sich auch nachstehende Formen geben: §. 42.

$$\left.\begin{aligned} D &= -\frac{1}{a}\left\{(aa'-b'c')^2-(c'^2-ab)(b'^2-ac)\right\} \\ D &= -\frac{1}{b}\left\{(bb'-a'c')^2-(c'^2-ab)(a'^2-bc)\right\} \\ D &= -\frac{1}{c}\left\{(cc'-a'b')^2-(b'^2-ac)(a'^2-bc)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

II. Wenn $D = 0$ ist, schneiden sich die drei, durch die Gleichungen (3) ausgedrückten Ebenen nicht in einem und demselben Punkte, sondern in parallelen Geraden, (§. 8, Aufg. 14), und die Fläche (1) hat keinen Mittelpunkt, indem die Ausdrücke (6) gleich ∞ werden.

III. Wenn $D = 0$ und zugleich $C = 0$ ist, so werden im Allgemeinen auch $B = 0$ und $A = 0$. Die, durch die Gleichungen (3) ausgedrückten Ebenen schneiden sich dann nicht in einem einzigen Punkte, sondern in einer und derselben Geraden (§. 8. Aufg. 14 u. 15), und die Fläche (1) hat unendlich viele Mittelpunkte, welche sämmtlich in dieser Geraden liegen.

IV. Wenn aber D und C dadurch gleich Null werden, daß $c'^2-ab = 0$, $bb'-a'c' = 0$ und $aa'-b'c' = 0$ ist, so werden A und B im Allgemeinen nicht gleich Null, daher z' und y' gleich ∞, und die Fläche (1) hat keinen Mittelpunkt.

V. Wenn endlich $D = 0$ und $C = 0$, außerdem aber $c'^2-ab = 0$, $c'a''-ab'' = 0$, $b'^2-ac = 0$ und $b'a''-ac'' = 0$ ist, so werden auch $A = 0$ und $B = 0$. Die, durch die Gleichungen (3) ausgedrückten Ebenen fallen dann in eine einzige zusammen, und die Fläche (1) hat unendlich viele Mittelpunkte, welche sämmtlich in dieser Ebene liegen.

Außerdem ist noch zu bemerken, daß aus der Realität der Coordinaten des Mittelpunktes einer Fläche nicht die Realität der Fläche gefolgert werden kann.

§. 43.

Nachdem wir die vorige Aufgabe gelöst haben, wollen wir die einzelnen Fälle, welche in der Gleichung (1) enthalten sind, discutiren. Wir werden dabei voraussetzen, daß in dieser Gleichung

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (1)$$

der Coefficient a positiv sey, was immer geschehen kann, weil wir in dem

§. 43. Falle, in welchem der Coefficient von z^2 negativ wäre, diesen Coefficienten, indem wir die Gleichung mit -1 multipliciren, positiv machen können; und haben nun die folgenden drei Hauptfälle I., II. und III. zu untersuchen.

I. Wir nehmen zuerst an, daß

$$D \gtrless 0$$

sey. Die Fläche (1) hat also, nach den zu Ende des vorigen §. gemachten Bemerkungen, einen Mittelpunkt. Nehmen wir diesen Mittelpunkt zum Anfangspunkt neuer Coordinaten, so erhalten wir durch Substitution von $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ respective für x, y, z die transformirte Gleichung

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + \Delta = 0 \quad, \qquad (2)$$

wenn wir nämlich

$$\Delta = az'^2 + by'^2 + cx'^2 + 2a'x'y' + 2b'x'z' + 2c'y'z' + 2a''z' + 2b''y' + 2c''x' + d \quad (3)$$

setzen. Zwischen den alten Coordinaten des neuen Anfangspunktes, d. i. zwischen den Coordinaten des Mittelpunktes x', y', z', finden die Gleichungen (3) des vorigen §. Statt, und diese Coordinaten sind den Ausdrücken (6) des vor. §. gleich. Wir können daher aus der letzten Gleichung (3) die Größen x', y', z' wegschaffen, indem wir ihre Werthe (6) des vor. §. substituiren, und somit Δ blos durch die Coefficienten der Gleichung (1) ausdrücken. Diese Substitution erleichtern wir uns dadurch, daß wir dem Ausdrucke Δ zunächst die Form

$$\Delta = \begin{cases} (az' + c'y' + b'x' + a'')z' + (c'z' + by' + a'x' + b'')y' \\ + (b'z' + a'y' + cx' + c'')x' + a''z' + b''y' + c''x' + d \end{cases}$$

geben, welche sich, in Folge der genannten Gleichungen (3) des vor. §., auf

$$\Delta = a''z' + b''y' + c''x' + d \qquad (4)$$

zurückziehet. Verrichten wir jetzt die angegebene Substitution, so kommt

$$\Delta = \frac{a''A + b''B + c''C + dD}{D} \quad ;$$

und, wenn wir für A, B und C ihre Werthe (4) des vorigen §. setzen, ferner, der Kürze wegen, wie im vor. §.,

$$abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = D \quad , \qquad (5)$$

auch außerdem noch

$$\left.\begin{matrix} a''^2(a'^2 - bc) + b''^2(b'^2 - ac) + c''^2(c'^2 - ab) \\ +2a''b''(cc' - a'b') + 2a''c''(bb' - a'c') + 2b''c''(aa' - b'c') + dD \end{matrix}\right\} = \Delta' \qquad (6)$$

setzen,

$$\Delta = \frac{\Delta'}{D} \quad , \tag{7}$$ §. 43.

so daß die transformirte Gleichung (2) die Form

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + \frac{\Delta'}{D} = 0 \tag{8}$$

hat.

Ziehen wir jetzt durch den neuen Anfangspunkt der Coordinaten, welcher der Mittelpunkt der Fläche ist, eine beliebige Gerade, deren Gleichungen wir durch

$$\left\{ \quad y = \alpha x \quad ; \quad z = \beta x \quad \right\} \tag{9}$$

bezeichnen, so ergiebt sich für die Durchschnittspunkte dieser Geraden (9) und der Fläche (8), durch Elimination von y und z,

$$(a\beta^2 + 2c'\alpha\beta + b\alpha^2 + 2b'\beta + 2a'\alpha + c)x^2 + \frac{\Delta'}{D} = 0 \quad ,$$

oder, wenn wir, zur Abkürzung,

$$a\beta^2 + 2c'\alpha\beta + b\alpha^2 + 2b'\beta + 2a'\alpha + c = E \tag{10}$$

setzen,

$$Ex^2 + \frac{\Delta'}{D} = 0 \quad ,$$

woraus wir für x, und sodann auch für y und z, zufolge der Gleichungen (9), die Ausdrücke

$$x = \pm\sqrt{\frac{-\Delta'}{ED}} \quad ; \quad y = \pm\alpha\sqrt{\frac{-\Delta'}{ED}} \quad ; \quad z = \pm\beta\sqrt{\frac{-\Delta'}{ED}} \tag{11}$$

finden. Die beiden Durchschnittspunkte der Geraden (9) und der Fläche (8) liegen also, weil ihre Coordinaten (11) gleich und entgegengesetzt sind, zu beiden Seiten des neuen Anfangspunktes, in gleicher Entfernung von demselben, wie es auch seyn muß, da dieser Anfangspunkt der Mittelpunkt der Fläche ist.

Es kommt nunmehr darauf an zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen die Ausdrücke (11) reell sind, und wir müssen demnach entscheiden, wann der Ausdruck

$$\frac{-\Delta'}{ED}$$

positiv, und wann er negativ wird, was wiederum von den Vorzeichen der Werthe von Δ', D und E abhängt. Da aber E seinen Werth (10) mit den Größen α und β, welche die Lage der Geraden (9) bestimmen, ändert, so wollen wir zunächst das Vorzeichen von E betrachten.

§ 43. In (I. §. 28) haben wir bereits die Bedingungen gefunden, unter welchen eine ganze rationale Function zweiten Grades zweier veränderlichen Größen, wie E, nicht gleich Null und auch nicht negativ werden kann. Von diesen Bedingungen können diejenigen, welche

$$(aa' - b'c')^2 - (c'^2 - ab)(b'^2 - ac) = 0$$

involviren, hier nicht Statt finden, weil alsdann, wie die erste Gleichung (7) des vorigen §. zeigt, $D = 0$ seyn würde, was gegen unsere jetzige Voraussetzung ist. Daher bleiben blos die Bedingungen

$$c'^2 - ab < 0 \quad \text{und} \quad (aa' - b'c')^2 - (c'^2 - ab)(b'^2 - ac) < 0$$

übrig, unter welchen E für alle Werthe von α und β positiv ist. In Folge der ersten Gleichung (7) des vor. §. können wir, da a, unserer Annahme nach, positiv ist, diese beiden Bedingungen durch

$$c'^2 - ab < 0 \quad \text{und} \quad D > 0$$

ausdrücken. Wir betrachten nun erstens den Fall, in welchem diese Bedingungen erfüllt werden, und dann zweitens den Fall, in welchem sie nicht erfüllt werden.

1) Ist also erstens

$$\text{zugleich} \quad c'^2 - ab < 0 \quad \text{und} \quad D > 0 \,, \qquad \text{(I)}$$

so ist E für alle Werthe von α und β positiv, und die Realität der Ausdrücke (11) hängt nur noch von dem Vorzeichen von Δ' ab, und zwar sind, was auch α und β für reelle Werthe haben mögen,

wenn Δ' positiv : die Ausdrücke (11) imaginair
wenn Δ' null : die Ausdrücke (11) gleich Null
wenn Δ' negativ : die Ausdrücke (11) reell.

Wir sehen also, daß, unter den Bedingungen (I), wenn Δ' positiv ist, die Gleichung (1) keine geometrische Bedeutung hat; wenn Δ' null ist, die Gleichung (1) einen Punkt, und zwar den Anfangspunkt der neuen Coordinaten ausdrückt; und wenn Δ' negativ ist, die Gleichung (1) eine reelle Fläche darstellt, welche geschlossen ist, da jede durch ihren Mittelpunkt gezogene Gerade sie in zwei reellen, in endlicher Entfernung befindlichen Punkten trifft. Diese geschlossene Fläche heißt Ellipsoid.

2) Ist aber zweitens

$$\text{nicht zugleich} \quad c'^2 - ab < 0 \quad \text{und} \quad D > 0 \,, \qquad \text{(II)}$$

so wird E, für unendlich viele, von einander unabhängige Werthe von α und β, positiv, und, für unendlich viele, von einander unabhängige Werthe von α und β, negativ, ferner, für unendlich viele, von einander auf bestimmte Weise abhängige Werthe von α und β, gleich Null. Die Ausdrücke (11) werden aber reell für die positiven Werthe von E wenn $\frac{\Delta'}{D}$ negativ, für die negativen Werthe von E wenn $\frac{\Delta'}{D}$ positiv; sie werden imaginair für die positiven Werthe von E wenn $\frac{\Delta'}{D}$ positiv, für die negativen Werthe von E wenn $\frac{\Delta'}{D}$ negativ; ferner werden dieselben Ausdrücke $= \infty$ für $E = 0$. §. 43.

Wir sehen also, daß, unter den Bedingungen (II), die Gleichung (1) immer eine reelle Fläche ausdrückt, welche aber nicht geschlossen ist; und zwar werden die Werthe von α und β, für welche $E = 0$ ist, die Grenzwerthe derjenigen seyn, welche reelle Durchschnittspunkte der Fläche (1 od. 8) und der Geraden (9) geben; und für diese Grenzwerthe werden die Durchschnittspunkte ins Unendliche fallen. Diese nicht geschlossenen Flächen, welche die Gleichung (1) im Falle der Bedingungen (II) ausdrückt, heißen Hyperboloiden.

Ist $\Delta' = 0$, so werden die Ausdrücke (11) für alle Werthe von α und β, welche E nicht annulliren, gleich Null; der Anfangspunkt der Coordinaten d. i. der Mittelpunkt liegt also dann auf der Fläche selbst. Für alle Werthe von α und β aber, welche $E = 0$ machen, werden die Ausdrücke (11) unbestimmt. Wenn aber $\Delta' = 0$ ist, geht die Gleichung (2) in

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz = 0 \qquad (12)$$

über, und drückt folglich (§. 33, S. 8) eine Kegelfläche aus, deren Mittelpunkt in dem neuen Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Dieselbe Gleichung (12) erhalten wir auch, wenn wir vermittelst der Gleichungen (9) α und β aus der Gleichung $E = 0$ eliminiren. Die Kegelfläche (12) enthält demnach alle, durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, welche das vorher genannte Hyperboloid in unendlicher Entfernung treffen, und deshalb wird die Fläche (12) auch der Asymptotenkegel der Fläche (2) genannt.

Die Hyperboloiden werden in zwei Arten eingetheilt: ein Hyperboloid heißt nämlich geradlinig oder hyperbolisch (auch wohl Hyperboloid mit

§. 43. einer Schale), wenn es von einer Geraden erzeugt werden kann, und elliptisch (auch wohl Hyperboloid mit zwei Schalen), wenn dies nicht der Fall ist. Soll nun die Gleichung (2) ein hyperbolisches Hyperboloid ausdrücken, so müssen sich gerade Linien so ziehen lassen, daß sie gänzlich in der Fläche liegen. Sind demnach

$$y = \alpha x + \alpha' \quad ; \quad z = \beta x + \beta'$$

die Gleichungen einer Geraden, welche sich auf dieselben Achsen als die Gleichung (2) beziehen, so müssen sich die Constanten α, β, α', β' reellerweise so bestimmen lassen, daß diese Gleichungen und die Gleichung (2) für jeden Werth von x dieselben Werthe von y und z geben, daß also, wenn y und z zwischen den genannten drei Gleichungen eliminirt werden, die Finalgleichung x unbestimmt läßt. Führen wir diese Elimination aus, so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{c}(a\beta^2 + 2c'\alpha\beta + b\alpha^2 + 2b'\beta + 2a'\alpha + c)x^2 \\ + 2(a\beta\beta' + b\alpha\alpha' + a'\alpha' + b'\beta' + c'\beta\alpha' + c'\beta'\alpha)x \\ + a\beta'^2 + 2c'\alpha'\beta' + b\alpha'^2 + \frac{\Delta'}{D}\end{array}\right\} = 0 \quad ;$$

und wenn diese Gleichung x unbestimmt lassen soll, müssen

$$\left.\begin{array}{r}a\beta^2 + 2c'\alpha\beta + b\alpha^2 + 2b'\beta + 2a'\alpha + c = 0 \quad , \\ a\beta\beta' + b\alpha\alpha' + a'\alpha' + b'\beta' + c'\beta\alpha' + c'\beta'\alpha = 0 \quad , \\ a\beta'^2 + 2c'\alpha'\beta' + b\alpha'^2 + \frac{\Delta'}{D} = 0 \quad\;\end{array}\right\} \quad (13)$$

seyn. Eliminiren wir α' und β' nach einander zwischen der zweiten und dritten dieser Gleichungen (13), so kommt

$$\left\{(c'^2 - ab)(a\beta^2 + 2c'\alpha\beta + b\alpha^2 + 2b'\beta + 2a'\alpha) - (aa'^2 + bb'^2 - 2a'b'c')\right\}\beta'^2 D$$
$$= \Delta'(c'\beta + b\alpha + a')^2 \quad ,$$

$$\left\{(c'^2 - ab)(a\beta^2 + 2c'\alpha\beta + b\alpha^2 + 2b'\beta + 2a'\alpha) - (aa'^2 + bb'^2 - 2a'b'c')\right\}\alpha'^2 D$$
$$= \Delta'(a\beta + c'\alpha + b')^2 \quad ,$$

oder auch, da, in Folge der ersten Gleichung (13) und der Gleichung (5) des §. 42,

$$(c'^2 - ab)(a\beta^2 + 2c'\alpha\beta + b\alpha^2 + 2b'\beta + 2a'\alpha) - (aa'^2 + bb'^2 - 2a'b'c')$$
$$= abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = D$$

ist,

$$D^2\beta'^2 = \Delta'(c'\beta + b\alpha + a')^2 \; ; \; D^2\alpha'^2 = \Delta'(a\beta + c'\alpha + b')^2 \quad .$$

Diese Gleichungen können aber, da $D^2\beta'^2$, $D^2\alpha'^2$, $(c'\beta + b\alpha + a')^2$ und

$(a\beta + c'\alpha + b')^2$ für reelle Werthe von α, β, α', β' nothwendigerweise im Allgemeinen positiv sind, von reellen Werthen von α, β, α' und β' nicht befriedigt werden, wenn Δ' negativ ist *). Es folgt hieraus, daß wenn Δ' negativ ist, die Gleichung (1) kein hyperbolisches Hyperboloid ausdrücken kann.

Das Resultat der gegenwärtigen Untersuchung ist demnach: die Gleichung (1) drückt, unter den Bedingungen (II.),

wenn Δ' positiv, ein hyperbolisches Hyperboloid
wenn $\Delta' = 0$, eine Kegelfläche
wenn Δ' negativ, ein elliptisches Hyperboloid

aus.

II. Wir nehmen jetzt an, daß

$$D = 0$$

ist. Wir transformiren die Gleichung (1) wieder, indem wir $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ respective für x, y, z setzen, wodurch wir zu der Gleichung (2) des vorigen §. gelangen; wir lassen nun aber nicht die Gleichungen (3) des vorigen §. gelten, weil wir schon wissen, daß die Fläche (1), unter der jetzigen Voraussetzung, $D = 0$, im Allgemeinen keinen Mittelpunkt hat (§.42); sondern wir setzen

$$\left.\begin{aligned} az'+c'y'+b'x'+a'' &= 0\ , \\ c'z'+by'+a'x'+b'' &= 0\ , \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$az'^2+by'^2+cx'^2+2a'x'y'+2b'x'z'+2c'y'z'+2a''z'+2b''y'+2c''x'+d = 0\ , \quad (15)$$

$$b'z'+a'y'+cx'+c'' = \delta\ . \quad (16)$$

Dadurch zieht sich die transformirte Gleichung (2) des vorigen §. auf

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2\delta x = 0 \quad (17)$$

zurück. Die drei Gleichungen (14 u. 15) reichen hin x', y', z' zu bestimmen; wir verfahren bei dieser Bestimmung wie folgt. Wir multipliciren von den beiden Gleichungen (14) die erste mit z' und die zweite mit y'; die Summe dieser Producte ziehen wir von der Gleichung (15) ab, und erhalten dadurch

---

*) Wir sagen, daß die oben genannten vier Ausdrücke im Allgemeinen positiv werden, denn in dem besonderen Falle, daß den Größen α und β die beiden reellen Werthe beigelegt werden, welche $c'\beta + b\alpha + a' = 0$ und $a\beta + c'a + b' = 0$ befriedigen, und $\alpha' = 0$ und $\beta' = 0$ gesetzt wird, werden die genannten Ausdrücke offenbar sämmtlich gleich Null. Indessen werden die Gleichungen (13) doch von diesen Werthen nicht befriedigt; denn $\alpha' = 0$ und $\beta' = 0$ stehen mit der letzten derselben im Widerspruche.

§. 43.
$$cx'^2 + a'x'y' + b'x'z' + a''z' + b''y' + 2c''x' + d = 0 \quad ;$$
in diese Gleichung setzen wir für z' und y' diejenigen Ausdrücke, welche sich durch Entwicklung aus den Gleichungen (14) ergeben, und auf diese Weise finden wir
$$\left.\begin{array}{c}(cc'^2 + aa'^2 + bb'^2 - abc - 2a'b'c')x'^2 \\ + 2[c''(c'^2 - ab) + a''(bb' - a'c') + b''(aa' - b'c')]x' \\ + d(c'^2 - ab) + ab''^2 - 2c'a''b'' + ba''^2\end{array}\right\} = 0 \quad .$$
Der Coefficient von x'^2 ist gleich $-D$, und derjenige von x' ist gleich C (§. 42, S. 4 u. 5). Da nun unserer jetzigen Voraussetzung zufolge $D = 0$ ist, so zieht sich die eben gefundene Gleichung, wenn wir noch, der Kürze wegen,
$$d(c'^2 - ab) + ab''^2 - 2c'a''b'' + ba''^2 = \varkappa \qquad (18)$$
setzen, auf
$$2Cx' + \varkappa = 0 \qquad (19)$$
zurück, woraus wir einen einfachen reellen Werth für x', und sodann, vermittelst der Gleichungen (14), auch einfache reelle Werthe für y' und z' finden.

Setzen wir, um nun auch δ zu bestimmen, die Ausdrücke von y' und z', welche sich aus den Gleichungen (14) ergeben, in die Gleichung (16), so geht, weil $D = 0$ ist, x' von selbst fort, und wir erhalten unmittelbar
$$\delta = \frac{C}{c'^2 - ab} \quad . \qquad (20)$$

Ziehen wir durch den neuen Anfangspunkt der Coordinaten eine Gerade, deren Gleichungen wieder
$$\left\{ \quad y = \alpha x \quad ; \quad z = \beta x \quad \right\} \qquad (9)$$
seyn mögen, so ergiebt sich für die Durchschnittspunkte dieser Geraden und der Fläche (17)
$$(a\beta^2 + 2c'\alpha\beta + b\alpha^2 + 2b'\beta + 2a'\alpha + c)x^2 + 2\delta x = 0 \quad ,$$
oder, zufolge der Gleichungen (10 u. 20),
$$(c'^2 - ab)Ex^2 + 2Cx = 0 \quad ,$$
woraus wir, mit Hülfe der Gleichungen (9), die zusammen gehörenden Werthe
$$x = 0 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0 \quad , \qquad (21)$$
$$x = \frac{-2C}{(c'^2 - ab)E} \quad ; \quad y = \frac{-2\alpha C}{(c'^2 - ab)E} \quad ; \quad z = \frac{-2\beta C}{(c'^2 - ab)E} \qquad (22)$$
erhalten.

Ein Durchschnittspunkt der Geraden (9) und der Fläche (17) liegt also

in dem Anfangspunkte der neuen Coordinaten, wie es auch seyn muß, da die Gerade (9) durch diesen Anfangspunkt geht, und dieser selbige Punkt, in Folge der Gleichung (15), auf der Fläche angenommen ist.

1) Was den anderen Durchschnittspunkt betrifft, so nehmen wir zuerst an, daß

$$c'^2 - ab < 0$$

ist. Alsdann sind die zweiten Werthe (22) von x, y, z immer reell und endlich; blos für E = 0 werden diese Werthe = ∞. Aber es giebt, da D = 0 ist, wie in (I. §. 28. Aufg. 38) bewiesen, nur ein Paar bestimmter Werthe von α und β, für welche E = 0 wird, und diese sind

$$\beta = \frac{bb' - a'c'}{c'^2 - ab} \quad ; \quad \alpha = \frac{aa' - b'c'}{c'^2 - ab} \quad .$$

Demnach schneiden alle, durch den neuen Anfangspunkt der Coordinaten gezogenen Geraden die Fläche in reellen Punkten, die desto weiter von dem auf dieser Fläche befindlichen Anfangspunkte entfernt sind je kleiner E wird, und nur eine einzige, der durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, deren Gleichungen

$$\left\{ \; (c'^2 - ab)y = (aa' - b'c')x \quad ; \quad (c'^2 - ab)z = (bb' - a'c')y \; \right\}$$

sind, trifft die Fläche nicht in einem zweiten Punkte. Die Fläche erstreckt sich daher ins Unendliche und ist nicht geschlossen.

2) Nehmen wir zweitens an, daß

$$c'^2 - ab > 0$$

ist, so sind wieder die zweiten Werthe (22) von x, y, z immer reell und endlich; blos für E = 0 werden sie = ∞. Aber es wird jetzt E für unzählig viele Werthe von α und β gleich Null. E läßt sich nämlich in zwei Factoren

$$E \equiv \left(\sqrt{a}\cdot\beta + \frac{c' + \sqrt{c'^2 - ab}}{\sqrt{a}}\cdot\alpha + \frac{b' + \sqrt{b'^2 - ac}}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a}\cdot\beta + \frac{c' - \sqrt{c'^2 - ab}}{\sqrt{a}}\cdot\alpha + \frac{b' - \sqrt{b'^2 - ac}}{\sqrt{a}}\right)$$

zerlegen, welche reell sind; denn, da D = 0 ist, so müssen, zufolge der ersten Gleichung (7) des vor. §., $c'^2 - ab$ und $b'^2 - ac$ von gleichen Zeichen seyn; es ist, unserer jetzigen Voraussetzung nach, $c'^2 - ab > 0$, folglich muß auch $b'^2 - ac > 0$ seyn, und somit sind die, in den angegebenen Factoren vorkommenden Wurzelgrößen reell. Wenn nun α und β so angenommen werden, daß sie einen der beiden genannten Factoren auf Null reduciren, was auf unzählig verschiedene Weise geschehen kann, so trifft die Gerade (9)

§. 43. die Fläche (17) nicht in einem zweiten Punkte, und die Fläche erstreckt sich ins Unendliche.

3) Es bleibt uns nur noch übrig drittens anzunehmen, daß

$$c'^2 - ab = 0$$

sey. In diesem Falle wird aber die Transformation der Gleichung (1) auf die Form (17) unmöglich; denn wenn $D = 0$ und $c'^2 - ab = 0$ ist, so werden auch, wie die beiden ersten Gleichungen (7) des vorigen §. zeigen, $aa' - b'c' = 0$ und $bb' - a'c' = 0$, und dadurch wird auch, wie wir aus der letzten Gleichung (4) des vorigen §. sehen, $C = 0$, wodurch wiederum die Coordinaten x', y', z' des neuen Anfangspunktes, wie die Gleichungen (19 u. 14) zeigen, unendlich werden. In dem gegenwärtigen Falle kann aber die Gleichung (1) auf die Form

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2\delta'y = 0 \quad (17')$$

gebracht werden, indem man nämlich statt der Gleichungen (14) und (16)

$$\left.\begin{array}{l} az' + c'y' + b'x' + a'' = 0 \\ b'z' + a'y' + cx' + c'' = 0 \end{array}\right\} \quad (14')$$

$$c'z' + by' + c'x' + b'' = \delta' \quad (16')$$

und außerdem die Gleichung (15) setzt. Hieraus ergiebt sich, auf ähnliche Weise wie oben, wenn

$$d(b'^2 - ac) + ac''^2 - 2b'a''c'' + ca''^2 = \varkappa' \quad (18')$$

gesetzt wird,

$$2By' + \varkappa' = 0 \quad , \quad (19')$$

woraus sich, in Verbindung mit den Gleichungen (14'), einfache reelle Werthe für x', y', z' ergeben. Für δ' findet sich

$$\delta' = \frac{B}{b'^2 - ac} \quad . \quad (20')$$

Für die Coordinaten der Durchschnittspunkte einer, durch den neuen Anfangspunkt gezogenen Geraden (9) und der Fläche (17') erhält man auf dieselbe Weise wie vorher

$$x = 0 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0 \quad , \quad (21')$$

$$x = \frac{-2B}{(b'^2 - ac)E} \quad ; \quad y = \frac{-2\alpha B}{(b'^2 - ac)E} \quad ; \quad z = \frac{-2\beta B}{(b'^2 - ac)E} \; ; \quad (22')$$

und Alles, was wir unter 1) und 2) von der Fläche (1) gesagt haben wenn die Bedingungen $D = 0$ und $c'^2 - ab \lessgtr 0$ Statt finden, gilt ebenfalls wenn die Bedingungen $D = 0$ und $b'^2 - ac \lessgtr 0$ vorhanden sind.

(Den Fall, in welchem zu gleicher Zeit $c'^2 - ab = 0$ und $b'^2 - ac = 0$ §. 43. ist, werden wir nachher betrachten.)

Die nicht geschlossenen Flächen, welche die Gleichung (1) unter der Bedingung $D = 0$ ausdrückt, heißen Paraboloiden. Die Paraboloiden werden in zwei Arten eingetheilt: ein Paraboloid heißt nämlich geradlinig oder hyperbolisch, wenn es von einer Geraden erzeugt werden kann, elliptisch aber, wenn dies nicht der Fall ist. — Soll eine Gerade, deren Gleichungen

$$\left\{ \quad y = \alpha x + \alpha' \quad ; \quad z = \beta x + \beta' \quad \right\}$$

sind, gänzlich auf dem, durch die Gleichung (17) ausgedrückten Paraboloide liegen, so muß die, durch Elimination von y und z aus den genannten drei Gleichungen entstehende Gleichung in x für jeden Werth dieser Größe gelten, woraus wir die Relationen

$$\left.\begin{array}{c} a\beta^2 + 2c'\alpha\beta + b\alpha^2 + 2a'\alpha + 2b'\beta + c = 0 \;, \\ a\beta\beta' + b\alpha\alpha' + a'\alpha' + b'\beta' + c'\alpha'\beta + c'\alpha\beta' + \delta = 0 \;, \\ a\beta'^2 + 2c'\alpha'\beta' + b\alpha'^2 = 0 \end{array}\right\} \quad (23)$$

erhalten. Wenn nun $c'^2 - ab < 0$, so wird die letzte dieser drei Gleichungen von keinen anderen Werthen als von $\alpha' = 0$ und $\beta' = 0$ befriedigt, welche Werthe der zweiten Gleichung widersprechen. Die Gleichung (1) drückt demnach ein elliptisches Paraboloid aus wenn $c'^2 - ab < 0$, und ein hyperbolisches wenn $c'^2 - ab > 0$. Auf ähnliche Weise finden wir, wenn wir statt der Gleichung (17) die Gleichung (17') anwenden, daß die Gleichung (1) ein elliptisches Paraboloid ausdrückt wenn $b'^2 - ac < 0$, und ein hyperbolisches wenn $b'^2 - ac > 0$ ist. (Es ist unmöglich, daß diese Bedingungen einander widerstreiten, daß nämlich die Gleichung (1) ein elliptisches Paraboloid ausdrücken müsse, weil $c'^2 - ab < 0$ und zugleich ein hyperbolisches weil $b'^2 - ac > 0$; denn $c'^2 - ab$ und $b'^2 - ac$ müssen, wie schon oben bemerkt worden, weil $D = 0$ ist, von gleichen Zeichen seyn.)

Eine Bemerkung, die hier sehr nahe liegt, dürfen wir nicht übergehen. Nämlich, wenn $c'^2 - ab > 0$ wenn also die Gleichung (1) ein hyperbolisches Paraboloid darstellt, so lassen sich die erste und die letzte der drei Gleichungen (23) in reelle Factoren des ersten Grades zerlegen. Bewerkstelligen wir diese Zerfällung der ersten Gleichung (23), und eliminiren zwischen ihr und den beiden Gleichungen $y = \alpha x + \alpha'$; $z = \beta x + \beta'$ die beiden Größen α und β, so kommt

§. 43.

$$\left\{\sqrt{a}\cdot(z-\beta')+\frac{c'+\sqrt{c'^2-ab}}{\sqrt{a}}(y-\alpha')+\frac{b'+\sqrt{b'^2-ac}}{\sqrt{a}}\cdot x\right\}\cdot\left\{\sqrt{a}\cdot(z-\beta')+\frac{c'-\sqrt{c'^2-ab}}{\sqrt{a}}(y-\alpha')+\frac{b'-\sqrt{b'^2-ac}}{\sqrt{a}}\cdot x\right\}=0\;,$$

wodurch zwei Ebenen ausgedrückt werden. Hieraus folgt, daß das hyperbolische Paraboloid erzeugt wird durch eine Gerade, welche bei ihrer Bewegung der Ebene

$$\sqrt{a}\cdot z+\frac{c'+\sqrt{c'^2-ab}}{\sqrt{a}}\cdot y+\frac{b'+\sqrt{b'^2-ac}}{\sqrt{a}}\cdot x=0$$

parallel bleibt; und daß dasselbe Paraboloid erzeugt wird durch eine andere Gerade, welche bei ihrer Bewegung der Ebene

$$\sqrt{a}\cdot z+\frac{c'-\sqrt{c'^2-ab}}{\sqrt{a}}\cdot y+\frac{b'-\sqrt{b'^2-ac}}{\sqrt{a}}\cdot x=0$$

parallel bleibt.

Eine andere Bemerkung, die wir hier noch zu machen haben, betrifft die Form der Gleichungen (17) und (17′). Setzen wir in den Gleichungen (17) und (17′) $x=0$, $y=0$ und $z=0$, so werden sie befriedigt; der neue Anfangspunkt der Coordinaten liegt also auf der Fläche selbst, was, wie wir oben schon bemerkt haben, eine nothwendige Folge der, bei der Transformation benutzten Gleichung (15) ist. Setzen wir aber in der Gleichung (17) blos $x=0$, so kommt

$$az^2+2c'yz+by^2=0\;. \qquad (24)$$

Ist $c'^2-ab<0$, so wird diese Gleichung (24) von keinen anderen reellen Werthen als von $z=0$ und $y=0$ befriedigt. Hieraus folgt, daß das durch die Gleichung (17) ausgedrückte elliptische Paraboloid mit der Ebene der neuen yz nur einen Punkt, den Anfangspunkt der neuen Coordinaten, gemein hat. Ist aber $c'^2-ab>0$, so drückt die Gleichung (24), welche sich nun in zwei reelle Factoren zerlegen läßt, zwei durch den Anfangspunkt gehende gerade Linien aus. Hieraus folgt, daß das, durch die Gleichung (17) ausgedrückte hyperbolische Paraboloid mit der Ebene der yz nicht nur den Anfangspunkt der neuen Coordinaten, sondern zwei durch diesen Punkt gehende Gerade gemein hat. — Auf gleiche Weise können wir uns überzeugen, daß die Ebene der neuen xz mit dem, durch die Gleichung (17′) ausgedrückten Paraboloide nur einen Punkt gemein hat, wenn es ein elliptisches, und zwei Gerade wenn es ein hyperbolisches ist.

III. Jetzt nehmen wir an, daß

zugleich $D=0$ und $C=0$

ist. In diesem Falle können wir der Gleichung (1) die Form §. 43.

$$a(c'z+by+a'x+b'')^2-2c'(az+c'y+b'x+a'')(c'z+by+a'x+b'') \\ +b(az+c'y+b'x+a'')^2 = \varkappa \qquad (25)$$

geben, wo $\varkappa$ die oben angegebene Bedeutung (18) hat; denn wenn man die Parenthesen entwickelt und, in Folge der Gleichungen $D = 0$ und $C = 0$,

$-c(c'^2-ab)$ für $aa'^2-2a'b'c'+bb'^2$ u. $-c''(c'^2-ab)$ für $a''(bb'-a'c')+b''(aa'-b'c')$

setzt, so ergiebt sich, nach der Division durch c'^2-ab, die Gleichung (1). Da nun die Gleichung (25) unter der Form

$$\varphi\left\{(c'z+by+a'x+b'')\ ,\ (az+c'y+b'x+a'')\right\} = 0$$

begriffen ist, so drückt die Gleichung (1), wenn $D = 0$ und $C = 0$, im Allgemeinen eine Cylinderfläche aus (§. 29, S. 6).

Die erzeugende Gerade dieser Cylinderfläche ist der Durchschnittslinie der, durch die Gleichungen

$$az+c'y+b'x+a'' = 0 \qquad (26)$$
$$c'z+by+a'x+b'' = 0 \qquad (27)$$

ausgedrückten Ebenen parallel (§. 29). Diese beiden Ebenen sind zwei von den drei Ebenen (3) des vorigen §., welche sich, nach der zu Ende dieses §. gemachten Bemerkung III., bei den jetzt Statt findenden Bedingungen, alle drei in einer und derselben, die unendlich vielen Mittelpunkte der Fläche enthaltenden, Geraden schneiden. Diese Gerade heißt die Achse der Cylinderfläche.

Transformiren wir die Gleichung (25) auf ein neues Coordinatensystem, dessen Coordinaten wir durch X, Y, Z bezeichnen, und in welchem die Ebene der YZ mit der Ebene (26), die Ebene der XZ mit der Ebene (27) coincidirt, so haben wir, da die erstere Ebene in dem neuen Coordinatensysteme durch die Gleichung $X = 0$ und in dem alten durch die Gleichung (26), ferner die letztere Ebene in dem neuen Systeme durch $Y = 0$ und in dem alten durch die Gleichung (27) ausgedrückt ist,

$$\lambda X = az+c'y+b'x+a''\ ,$$
$$\mu Y = c'z+by+a'x+b''\ ,$$

wo λ und μ zwei reelle Coefficienten bedeuten, die wir nicht zu bestimmen nöthig haben werden; und die Gleichung (25) geht also durch diese Transformation in

$$a\mu^2Y^2-2c'\lambda\mu XY+b\lambda^2X^2 = \varkappa \qquad (28)$$

über. Diese Gleichung (28), welche die in Rede stehende Cylinderfläche darstellt, drückt deren Directrix aus, wenn wir ihr die Gleichung $Z = 0$

§. 43. hinzufügen (§. 29). Die Art dieser Linie zweiten Grades hängt aber von den Vorzeichen der Werthe von $c'^2\lambda^2\mu^2 - ab\lambda^2\mu^2$ und $\varkappa$ ab (I. §. 28, 29), oder da $\lambda^2\mu^2$ positiv ist, von den Vorzeichen der Werthe von $c'^2 - ab$ und $\varkappa$; und wir sehen daher, daß die Gleichung (28), folglich auch die Gleichung (25), und daher auch die Gleichung (1) wenn, außer $D = 0$ und $C = 0$,

1) $c'^2 - ab < 0$ und $\varkappa > 0$ ... eine elliptische Cylinderfläche,
2) $c'^2 - ab > 0$ und $\varkappa \gtrless 0$ ... eine hyperbolische Cylinderfläche,
3) $c'^2 - ab > 0$ und $\varkappa = 0$ ... zwei Ebenen,
4) $c'^2 - ab < 0$ und $\varkappa = 0$ ... eine gerade Linie,
5) $c'^2 - ab < 0$ und $\varkappa < 0$ ... eine imaginaire Cylinderfläche

ausdrückt. Es kann hierbei bemerkt werden, daß die unter 3) genannten beiden Ebenen respective

$$\left.\begin{array}{l} a(c'z+by+a'x+b'')-(c'+\sqrt{c'^2-ab})(az+c'y+b'x+a'')=0 \\ a(c'z+by+a'x+b'')-(c'-\sqrt{c'^2-ab})(az+c'y+b'x+a'')=0 \end{array}\right\} \quad (29)$$

zu ihren Gleichungen haben, und daß die unter 4) genannte Gerade durch das Gleichungssystem

$$\{\ az+c'y+b'x+a''=0 \quad ; \quad c'z+by+a'x+b''=0\ \}$$

ausgedrückt ist.

Ist außer $D = 0$ und $C = 0$ auch $c'^2 - ab = 0$, so wird die Form (25), welche, wie wir vorher gesehen haben, $c'^2 - ab$ als Factor enthält, illusorisch. Wir haben aber diesen Fall schon in II. 3) betrachtet, wo wir fanden, daß die Gleichung (1) sich alsdann im Allgemeinen auf die Form (17') bringen läßt und ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid ausdrückt, je nachdem $b'^2 - ac <$ oder > 0 ist. Wir sagen im Allgemeinen, denn wir haben den besonderen Fall, in welchem $D = 0$ und $C = 0$ auch $c'^2 - ab = 0$ und $b'^2 - ac = 0$, noch nicht discutirt. In diesem besonderen Falle nun kann die Gleichung (1) auf die Form

$$(az+c'y+b'x+a'')^2-[2(c'a''-ab'')y+2(b'a''-ac'')x+(a''^2-ad)]=0 \quad (30)$$

gebracht werden, und sie drückt daher, wie man durch eine, der vorher angewandten ähnliche Transformation findet, eine parabolische Cylinderfläche aus.

Wenn außer den zuletzt genannten Bedingungen noch $c'a'' - ab'' = 0$ und $b'a'' - ac'' = 0$ ist, so läßt sich die Gleichung (30) in zwei Factoren, wie folgt

$$\left\{az+c'y+b'x+a''+\sqrt{a''^2-ad}\right\}\cdot\left\{az+c'y+b'x+a''-\sqrt{a''^2-ad}\right\} = 0$$

zerlegen, und drückt demnach, wenn

$a''^2 - ad > 0$ .... zwei parallele Ebenen
$a''^2 - ad = 0$ .... eine einzige Ebene,
$a''^2 - ad < 0$ .... zwei imaginaire Ebenen

aus.

Wir stellen alle, in dem gegenwärtigen §. erhaltenen Resultate zusammen, wobei wir, zur Abkürzung

$$a'^2 - bc = A' \quad ; \quad b'^2 - ac = B' \quad ; \quad c'^2 - ab = C' \quad ,$$

und, wie bisher,

$$a''(a'^2 - bc) + b''(cc' - a'b') + c''(bb' - a'c') = A \quad ,$$
$$b''(b'^2 - ac) + c''(aa' - b'c') + a''(cc' - a'b') = B \quad ,$$
$$c''(c'^2 - ab) + a''(bb' - a'c') + b''(aa' - b'c') = C \quad ,$$
$$abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = D \quad ,$$
$$a''^2A' + b''^2B' + c''^2C' + 2a''b''(cc' - a'b') + 2a''c''(bb' - a'c') + 2b''c''(aa' - b'c') + dD = \Delta' \; ,$$
$$dC' + ab''^2 - 2c'a''b'' + ba''^2 = \varkappa$$

setzen, wodurch sich folgende Tafel ergiebt:

Analytische Bedingungen	Geometr. Bedeutung der Gleichung (1)
$D < 0$ oder $C' > 0$ und $D > 0$ und $\Delta' > 0$	hyp. Hyperboloid.
$D < 0$ oder $C' > 0$ und $D > 0$ und $\Delta' = 0$	Kegel.
$D < 0$ oder $C' > 0$ und $D > 0$ und $\Delta' < 0$	ellipt. Hyperboloid.
$C' < 0$ und $D > 0$ und $\Delta' < 0$	Ellipsoid.
$C' < 0$ und $D > 0$ und $\Delta' = 0$	ein Punkt.
$C' < 0$ und $D > 0$ und $\Delta' > 0$	keine geometr. Bedeutung.
$D = 0$ und $C' > 0$ oder $B' > 0$	hyp. Paraboloid.
$D = 0$ und $C' < 0$ oder $B' < 0$	ellipt. Paraboloid.
$C = 0$ und $D = 0$ und $C' > 0$ und $B' > 0$ und $\varkappa \gtrless 0$	hyp. Cylinder.
$C = 0$ und $D = 0$ und $C' < 0$ und $B' < 0$ und $\varkappa > 0$	ellipt. Cylinder.
$C = 0$ und $D = 0$ und $C' = 0$ und $B' = 0$	parab. Cylinder.
$C = 0$ und $D = 0$ und $C' > 0$ und $B' > 0$ und $\varkappa = 0$	zwei Ebenen.
$C = 0$ und $D = 0$ und $C' < 0$ und $B' < 0$ und $\varkappa = 0$	eine Gerade.
$C = 0$ und $D = 0$ und $C' < 0$ und $B' < 0$ und $\varkappa < 0$	keine geometr. Bedeutung.
$C = 0$ und $D = 0$ und $C' = 0$ und $B' = 0$ und $c'a'' - ab'' = 0$ und $b'a'' - ac'' = 0$ und $a''^2 - ad > 0$	zwei parallele Ebenen.
$C = 0$ und $D = 0$ und $C' = 0$ und $B' = 0$ und $c'a'' - ab'' = 0$ und $b'a'' - ac'' = 0$ und $a''^2 - ad = 0$	eine Ebene.
$C = 0$ und $D = 0$ und $C' = 0$ und $B' = 0$ und $c'a'' - ab'' = 0$ und $b'a'' - ac'' = 0$ und $a''^2 - ad < 0$	keine geometr. Bedeutung.

§. 43. Wenn der Coefficient von z^2 in der Gleichung (1) gleich Null ist, so dürfen die hier zusammen gestellten Resultate unserer bisherigen Discussion nicht ohne Weiteres auf diese Gleichung angewandt werden, weil wir bei dieser Discussion voraussetzten, daß a positiv, also nicht gleich Null sey. Für diesen Fall nun können wir, um die geometrische Bedeutung der Gleichung aus der obigen Tafel zu nehmen, z mit x, oder mit y, gegenseitig vertauschen, was auf die einfachste Coordinatenverwandlung hinausläuft, wodurch wir eine neue Gleichung erhalten, in welcher der Coefficient von z^2 im Allgemeinen nicht gleich Null ist.

Für den Fall aber, daß $a = b = c = 0$ ist, müssen wir die Discussion von neuem anfangen. Die Gleichung (1) geht dann in

$$2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2a''z + 2b''y + 2c''x + d = 0 \quad (31)$$

über, und giebt, wie wir sehen, für jedes reelle x und y auch einen reellen Werth von z. Die Gleichung (31) drückt demnach immer eine reelle Fläche aus.

Im gegenwärtigen Falle reduciren sich die Gleichungen (3 u. 4) des vorigen §. auf

$$(a'a'' - b'b'' - c'c'')a' = A \quad ; \quad (b'b'' - c'c'' - a'a'')b' = B \quad ,$$
$$(c'c'' - a'a'' - b'b'')c' = C \quad ; \quad 2a'b'c' = D \quad ,$$

und die Fläche (31) hat, wenn keine der Größen a', b', c' gleich Null, also auch D nicht gleich Null ist, immer einen Mittelpunkt. Wenn wir nun den Anfangspunkt der Coordinaten nach diesem Mittelpunkte verlegen, so erhalten wir, statt der Gleichung (8),

$$2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + \frac{\Delta'}{D} = 0 \quad , \qquad (32)$$

worin

$$\Delta' = a'^2a''^2 + b'^2b''^2 + c'^2c''^2 - 2a'a''b'b'' - 2a'a''c'c'' - 2b'b''c'c'' + 2a'b'c'd. \quad (33)$$

Die Gleichung (10) reducirt sich jetzt auf

$$E = 2c'\alpha\beta + 2b'\beta + 2a'\alpha \quad ; \qquad (34)$$

es kann daher E sowohl positiv als negativ werden, und die Gleichung (31) drückt somit im Allgemeinen ein Hyperboloid oder, falls $\Delta' = 0$, einen Kegel aus. Die Gleichungen (13) gehen jetzt in

$$c'\alpha\beta + b'\beta + a'\alpha = 0 \quad ,$$
$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\beta\alpha' + c'\beta'\alpha = 0 \quad ,$$
$$2c'\alpha'\beta' + \frac{\Delta'}{D} = 0$$

über, und eliminiren wir zwischen ihnen α' und α, so kommt

$$(a'+c'\beta)^2\Delta' = 2a'b'c'\beta'^2D$$

oder, da $2a'b'c' = D$ ist,

$$(a'+c'\beta)^2\Delta' = \beta'^2D^2 \quad ,$$

woraus wir, wie oben schließen, daß das Hyperboloid ein hyperbolisches ist, wenn $\Delta' > 0$, und ein elliptisches wenn $\Delta' < 0$.

Ist aber in der Gleichung (31) eine der Größen a', b', c' gleich Null z. B. $c' = 0$, so hat die Fläche keinen Mittelpunkt. Transformiren wir in diesem Falle, wie oben in II., so erhalten wir, statt der Gleichung (17'),

$$a'xy + b'xz + \delta'y = 0 \quad , \qquad (35)$$

worin

$$\delta' = \frac{b'b''-a'a''}{b'} \quad .$$

Es findet sich auf diese Weise, daß die Gleichung (31) im gegenwärtigen Falle ein hyperbolisches Paraboloid ausdrückt; und eben so verhält es sich mit dieser Gleichung (31) wenn zwei von den Größen a', b', c' gleich Null, z. B. $a' = c' = 0$.

Ist aber $c' = 0$ und $b'b''-a'a'' = 0$, so kann die Gleichung (31) nicht auf die Form (35) gebracht werden, weil die Coordinaten des neuen Anfangspunktes ∞ werden; wir können aber jener Gleichung in diesem Falle die Form

$$2(b'x+a'')(b'z+a'y+c'')+b'd-2a''c'' = 0 \qquad (36)$$

geben, woraus wir sehen, daß unsere Gleichung (31) im gegenwärtigen Falle einen hyperbolischen Cylinder ausdrückt.

Ist $c' = 0$, $b'b''-a'a'' = 0$ und $b'd-2a''c'' = 0$, so degenerirt dieser Cylinder in zwei Ebenen, welche parallel sind, wenn $a' = 0$ ist.

§. 44.

In dem vorigen §. haben wir gesehen, daß es außer der Cylinder- und Kegelfläche zweiten Grades nur noch fünf wesentlich von einander verschiedene Flächen zweiten Grades giebt, daß drei von diesen Flächen, nämlich

1) das Ellipsoid
2) das elliptische Hyperboloid
3) das hyperbolische Hyperboloid,

einen Mittelpunkt, daß die beiden anderen, nämlich

4) das hyperbolische Paraboloid
5) das elliptische Paraboloid,

§. 44. keinen Mittelpunkt haben, und daß von diesen Flächen nur die dritte und vierte geradlinig sind. — Ehe wir von der Vereinfachung der allgemeinen Gleichung für diese Flächen reden, wollen wir die ebenen Schnitte dieser Flächen betrachten.

Eine Ebene schneidet eine Fläche zweiten Grades in einer Linie, die ebenfalls vom zweiten Grade ist, und die auch in zwei oder in eine gerade Linie und auch in einen Punkt degeneriren kann. Denn wenn die Gleichung der Fläche zweiten Grades und die Lage der schneidenden Ebene gegeben ist, so haben wir, um die Gleichung der Durchschnittscurve zu finden, nur die Formeln (23) des §. 13 in Anwendung zu bringen, nachdem wir den Anfangspunkt der Coordinaten in einen Punkt der genannten Ebene verlegt haben; das heißt wir haben in die Gleichung der Fläche Substitutionen von der Form

$$x = mx' + ny' + p \quad ; \quad y = m'x' + n'y' + p' \quad ; \quad z = m''x' + n''y' + p''$$

zu machen, wodurch wir zu einer Gleichung in x' und y' gelangen, die, wie die Gleichung der Fläche, den zweiten Grad nicht übersteigt.

Parallele Ebenen schneiden eine Fläche zweiten Grades in Curven die einander ähnlich, oder Hyperbeln sind, in denen die Hauptachsen und Nebenachsen in umgekehrtem Verhältnisse stehen. Denn nehmen wir eine dieser Ebenen zur Ebene der xy, und ist alsdann die Gleichung der Fläche zweiten Grades

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \;, \quad (1)$$

so erhalten wir für die Durchschnittscurve in der Ebene der xy, dadurch, daß wir $z = 0$ setzen, die Gleichung

$$by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b''y + 2c''x + d = 0 \quad . . \quad (2)$$

Für eine parallele Ebene, deren Gleichung $z = h$ ist, erhalten wir aber, durch Elimination von z,

$$by^2+cx^2+2a'xy+2(c'h+b'')y+2(b'h+c'')x+ah^2+2a''h+d = 0 \;, \quad (3)$$

eine Gleichung, welche den projicirenden Cylinder der Durchschnittscurve der parallelen Ebene, oder, wenn wir sie mit $z = 0$ verbinden, die Projection dieser Curve, welche ihr selbst gleich ist (§. 30), ausdrückt. Die ebenen Curven (2) und (3) sind aber einander ähnlich oder Hyperbeln, deren Haupt- und Nebenachsen in umgekehrtem Verhältnisse stehen (I. §. 46), weil die Coefficienten in den drei ersten Gliedern ihrer Gleichungen dieselben sind.

Nehmen wir auf irgend einer Fläche zweiten Grades einen beliebigen Punkt an und legen durch diesen Punkt mehrere Ebenen, so schneiden diese die

die Fläche in ebenen Curven; eine jede dieser Curven hat in dem angenommenen Punkte eine bestimmte Berührungslinie; alle diese Berührungslinien liegen, wie sich durch die Lösung der folgenden Aufgabe zeigen wird, in einer Ebene, und diese Ebene heißt die **Berührungsebene** oder **Tangentialebene** der Fläche in dem genannten Punkte, welcher der **Berührungspunkt** der Tangentialebene heißt. §. 44.

Aufgabe [64]. *Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades und die Coordinaten eines Punktes derselben sind gegeben; es soll die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkte gefunden werden.*

Es sey

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (1)$$

die gegebene Gleichung der Fläche, und x', y', z' seyen die gegebenen Coordinaten eines ihrer Punkte. Jede Ebene, welche durch diesen Punkt geht, kann durch die Gleichung

$$z-z' = m(y-y')+n(x-x') \quad (4)$$

ausgedrückt werden. Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem gegebenen Punkte indem wir $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ bezüglich für x, y, z setzen, so verwandeln sich die Gleichungen (1) und (4), da der gegebene Punkt auf der Fläche (1) liegt und also

$$az'^2+by'^2+cx'^2+2a'x'y'+2b'x'z'+2c'y'z'+2a''z'+2b''y'+2c''x'+d=0 \quad (1')$$

ist, respective in

$$\left.\begin{array}{l} az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz \\ \quad +2(az'+c'y'+b'x'+a'')z \\ \quad +2(c'z'+by'+a'x'+b'')y \\ \quad +2(b'z'+a'y'+cx'+c'')x \end{array}\right\} = 0\,, \quad (5)$$

$$z = my+nx\,. \quad (6)$$

Eliminiren wir z zwischen diesen beiden Gleichungen, so kommt

$$\left.\begin{array}{l} (am^2+2c'm+b)y^2+2(amn+b'm+c'n+a')xy+(an^2+2b'n+c)x^2 \\ \quad +2[(az'+c'y'+b'x'+a'')m+(c'z'+by'+a'x'+b'')]y \\ \quad +2[(az'+c'y'+b'x'+a'')n+(b'z'+a'y'+cx'+c'')]x \end{array}\right\} = 0$$

als Gleichung des projicirenden Cylinders der Durchschnittscurve oder auch als Gleichung der Projection dieser Curve. Die Tangentialebene im neuen Anfangspunkte der Coordinaten an jenem projicirenden Cylinder, oder die Tangente an dieser Projection, hat zur Gleichung

§. 44.
$$\left.\begin{array}{l}\left\{(az'+c'y'+b'x'+a'')m+(c'z'+by'+a'x'+b'')\right\}y\\+\left\{(az'+c'y'+b'x'+a'')n+(b'z'+a'y'+cx'+c'')\right\}x\end{array}\right\}=0\,,\quad(7)$$

und diese Tangentialebene (7) ist die projicirende Ebene der Tangente an der Durchschnittscurve, oder diese Tangente der Projection der Durchschnittscurve ist die Projection der Tangente an dieser Curve. Die Gleichungen (6) und (7) zusammen, drücken also die Tangente an der Durchschnittscurve aus. Um nun den Ort der Tangenten an all' den Durchschnittscurven, welche von allen, durch den neuen Anfangspunkt gehenden Ebenen gebildet werden, zu finden, eliminiren wir m zwischen den so eben genannten Gleichungen, wobei n von selbst fortgehet, und wodurch wir

$$(az'+c'y'+b'x'+a'')z+(c'z'+by'+a'x'+b'')y+(b'z'+a'y'+cx'+c'')x=0$$

erhalten, eine Gleichung, welche, wie wir vorausgesagt haben, eine Ebene ausdrückt. Um zu den alten Coordinaten zurück zu kehren, setzen wir $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ respective für x, y, z, und finden aus der zuletzt genannten Gleichung, indem wir die Gleichung (1') berücksichtigen,

$$\begin{array}{r}(az'+c'y'+b'x'+a'')z+(c'z'+by'+a'x'+b'')y+(b'z'+a'y'+cx'+c'')x\\+a''z'+b''y'+c''x'+d=0\end{array}\quad(8)$$

als die gesuchte Gleichung der Tangentialebene im Punkte $x'y'z'$.

Daß diese Ebene mit der Fläche (1) einen Punkt, nämlich den Berührungspunkt, gemein hat, ist aus der Herleitung klar; ob und in welchen Fällen sie aber mit der Fläche (1) noch andere Punkte gemein hat, wird sich später zeigen. Wir müssen sogleich darauf aufmerksam machen, daß jeder Punkt $x'y'z'$ einer Fläche zweiten Grades immer eine und nur eine Tangentialebene hat, den ganz speciellen Fall ausgenommen, in welchem die Fläche eine Kegelfläche und der Punkt $x'y'z'$ ihr Mittelpunkt (Scheitel) ist, wo dann die Coefficienten von z, y und x und das constante Glied in der Gleichung (8) gleich Null sind.

Aufgabe [65]. *In einer gegebenen Fläche zweiten Grades sind Sehnen einer gegebenen Richtung parallel gezogen. Es soll der Ort des Halbirungspunktes dieser Sehnen gefunden werden.*

Es sey die Gleichung (1) diejenige der gegebenen Fläche zweiten Grades, und

$$\left\{\quad y=\alpha x+\alpha'\quad;\quad z=\beta x+\beta'\quad\right\}\quad(9)$$

seyen die Gleichungen einer Geraden, welche die gegebene Richtung hat. Setzen wir α' und β' veränderlich, so drücken die Gleichungen (9) alle ge-

raden Linien aus, welche der gegebenen Richtung parallel sind. In den Durchschnittspunkten einer Geraden (9) mit der Fläche (1) sind die Coordinaten der Geraden denen der Fläche gleich; wir finden also diese Coordinaten wenn wir x, y und z aus den drei Gleichungen (1) und (9) bestimmen; und da die Gleichung (1) vom zweiten Grade, die Gleichungen (9) aber vom ersten Grade sind, so ergeben sich auf diese Weise im Allgemeinen zwei Durchschnittspunkte, und diese sind die Endpunkte der in Rede stehenden Sehnen. Setzen wir die Ausdrücke von y und z aus den Gleichungen (9) in die Gleichung (1), so erhalten wir, zur Bestimmung von x, die Gleichung

§. 44.

$$\left.\begin{array}{c}(a\beta^2+2c'\alpha\beta+b\alpha^2+2b'\beta+2a'\alpha+c)x^2\\ +2[(a\beta+c'\alpha+b')\beta'+(c'\beta+b\alpha+a')\alpha'+(a''\beta+b''\alpha+c'')]x\\ +a\beta'^2+2c'\alpha'\beta'+b\alpha'^2+2a''\beta'+2b''\alpha'+d\end{array}\right\}=0 .$$

Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gleichung durch x' und x'', und die Coordinaten des Halbirungspunktes der Sehnen durch t, u, v; so haben wir $t = \frac{1}{2}(x'+x'')$, und, in Folge der so eben aufgestellten Gleichung,

$$\tfrac{1}{2}(x'+x'') = t = -\frac{(a\beta+c'\alpha+b')\beta'+(c'\beta+b\alpha+a')\alpha'+a''\beta+b''\alpha+c''}{a\beta^2+2c'\alpha\beta+b\alpha^2+2b'\beta+2a'\alpha+c}.$$

Da nun der Punkt tuv auch in der Geraden (9) liegt, so haben wir ferner

$$u=\alpha t+\alpha' \quad ; \quad v=\beta t+\beta' \quad ,$$

und eliminiren wir die sich von einer Sehne zur anderen verändernden Größen α' und β' zwischen den drei letzten Gleichungen, so kommt

$$(a\beta+c'\alpha+b')v+(c'\beta+b\alpha+a')u+(b'\beta+a'\alpha+c)t+a''\beta+b''\alpha+c''=0 \quad (10)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher demnach eine Ebene ist.

Die Ebene, welche alle, irgend einer bestimmten Richtung parallele Sehnen einer Fläche zweiten Grades halbirt, heißt eine Diametralebene dieser Fläche, und zwar die jener Richtung conjugirte Diametralebene.

Bringen wir die gefundene Gleichung (10) auf die Form

$$\beta(av+c'u+b't+a'')+\alpha(c'v+bu+a't+b'')+(b'v+a'u+ct+c'')=0,$$

so ist ersichtlich, daß sie befriedigt wird, was auch α und β seyn mögen, d. i. welches auch die Richtung der parallelen Sehnen seyn mag, durch diejenigen Werthe von t, u und v, welche die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}av+c'u+b't+a''=0\\ c'v+bu+a't+b''=0\\ b'v+a'u+ct+c''=0\end{array}\right\} \quad (11)$$

befriedigen. Alle Diametralebenen schneiden sich demnach, im Allgemeinen,

§. 44. in einem Punkte, welcher der Mittelpunkt der Fläche ist, weil die Gleichungen (11) mit den Gleichungen (3) des §. 42 übereinstimmen.

Ist aber $abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = 0$, oder, nach der Bezeichnung in §. 42, $D = 0$, so hat die Fläche keinen Mittelpunkt. Alsdann schneiden sich die, durch die Gleichungen (11) ausgedrückten Ebenen in parallelen Geraden (§. 8. Aufg. 14), und die durch die Gleichung (10) ausgedrückte Diametralebene ist, was auch α und β seyn mögen, der Richtung dieser Geraden, die wir die Achsenrichtung nennen wollen, parallel.

Es ist leicht einzusehen, daß jede Ebene, welche durch den Mittelpunkt gehet, oder welche, wenn ein solcher nicht vorhanden, der Achsenrichtung parallel ist, eine Diametralebene seyn wird.

§. 45.

Es mag nun die Gleichung

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (1)$$

ein Ellipsoid, ein Hyperboloid oder ein Paraboloid ausdrücken, so können wir auf der Fläche immer einen Punkt annehmen und an demselben eine Tangentialebene legen. Nehmen wir diesen Punkt zum Anfangspunkte der Coordinaten, so wird die Gleichung der Fläche, da sie nun von den Werthen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ befriedigt werden muß, kein constantes Glied enthalten, und daher wird die Gleichung (1) durch diese Transformation die Form

$$Az^2+By^2+Cx^2+2A'xy+2B'xz+2C'yz+2A''z+2B''y+2C''x = 0 \quad (2)$$

annehmen. Die Gleichung der Tangentialebene im neuen Anfangspunkte der Coordinaten wird nun, wie wir aus der Gleichung (8) des vor. §. finden, wenn wir darin $a = A$, $b = B$, 2c. ... $d = 0$, und $x' = y' = z' = 0$ setzen,

$$A''z + B''y + C''x = 0 \quad (3)$$

seyn. Verwandeln wir die Coordinaten in der Gleichung (2) wiederum und zwar so, daß die eben genannte Tangentialebene des, auf der Fläche liegenden Anfangspunktes die Ebene der neuen xy wird, so gehet die Gleichung dieser Tangentialebene in $z = 0$ über, woraus denn folgt, daß, bei der jetzigen Lage des Coordinatensystems, die Coefficienten B'' und C'' gleich Null seyn müssen, und daß also die Gleichung der Fläche, durch diese Transformation, die Form

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz + 2A''z = 0 \quad (4)$$

annehmen wird, wo die Coefficienten A, B, 2c. andere Werthe als die

Coefficienten A, B, ꝛc. in der Gleichung (2) haben. Legen wir durch die Fläche eine, der genannten Tangentialebene, d. i. der jetzigen Ebene der xy parallele Ebene, deren Gleichung §. 45.

$$z = h \qquad (5)$$

seyn mag, so erhalten wir, durch Elimination von z zwischen den Gleichungen (4) und (5),

$$By^2 + 2A'xy + Cx^2 + 2C'hy + 2B'hx + Ah^2 + 2A''h = 0 \quad (6)$$

als die Gleichung der Projection der Durchschnittscurve. Welches nun auch diese Curve zweiten Grades seyn mag, so können wir immer durch bloße Veränderung der Lage der Achsen der x und der y, und ohne den Anfangspunkt dieser Achsen zu verändern, das zweite Glied aus der Gleichung (6) fortschaffen (I. §. 30), so daß diese die Form

$$By^2 + Cx^2 + 2C'hy + 2B'hx + Ah^2 + 2A''h = 0 \quad (7)$$

bekommt. Hieraus folgt, daß wenn wir in der genannten Tangentialebene die Achsen der x und der y wie angegeben verändern, die Gleichung (4) sich auf

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2B'xz + 2C'yz + 2A''z = 0 \quad (8)$$

reduciren werde, wo wiederum A, B, ꝛc. andere Größen als vorher bezeichnen. Setzen wir h veränderlich, so drückt das System der beiden Gleichungen (5) und (7) alle, der genannten Tangentialebene, d. i. alle, der Ebene der xy parallele Durchschnitte aus. Die Mittelpunkte dieser Durchschnittscurven haben (I. §. 29)

$$x = -\frac{B'}{C}h \;;\; y = -\frac{C'}{B}h \;;\; z = h \qquad (9)$$

zu Coordinaten, und die Werthe dieser Coordinaten sind immer reell und auch endlich, wenn weder B noch C gleich Null ist. Eliminiren wir h zwischen diesen Gleichungen (9), so erhalten wir

$$\left|\; Cx + B'z = 0 \;;\; By + C'z = 0 \;\right| , \qquad (10)$$

ein Gleichungssystem, welches den Ort der Mittelpunkte aller Durchschnittscurven ausdrückt, deren Ebenen der genannten Tangentialebene, d. i. der Ebene der xy parallel sind. Dieser Ort ist demnach eine gerade Linie, welche, wenn weder B noch C gleich Null ist, die Ebene der xy in dem Anfangspunkte der Coordinaten, d. i. in dem genannten Berührungspunkte schneidet. Nehmen wir diese Gerade zur Achse der z, so sind ihre Gleichungen [$x = 0$; $y = 0$], und es wird also, durch diese neue Transformation, B' und C' in den Gleichungen (10), und folglich auch in der Gleichung (8) verschwinden, so daß diese letztere die Form

§. 45.

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \qquad (11)$$

annimmt. Die Gleichung eines Ellipsoids, Hyperboloids oder Paraboloids kann demnach immer auf die Form (11) gebracht werden, und zwar dadurch, daß man irgend eine Tangentialebene der Fläche zur Ebene der xy, und diejenige Gerade, welche die Mittelpunkte der, dieser Tangentialebene parallelen Durchschnitte enthält, zur Achse der z annimmt, also, da die Tangentialebene beliebig ist, auf unendlich verschiedene Weisen.

Wenn in der Gleichung (8) $B = 0$ oder $C = 0$ ist, kann die Gleichung der Fläche nicht nach der angegebenen Art auf die Form (11) gebracht werden, weil die Gerade (10) alsdann nicht die Ebene der xy schneidet, sondern in derselben liegt, und also nicht zur Achse der z genommen werden kann. Aber in diesem Falle ist auch die Fläche weder ein Ellipsoid noch ein Hyperboloid noch ein Paraboloid, sondern ein Kegel. Dies erhellet sowohl daraus, daß für die Gleichung (8), wenn wir darin B oder C gleich Null setzen, derjenige Ausdruck, den wir in §. 43 mit Δ' bezeichnet haben, gleich Null wird, als auch noch leichter dadurch, daß sich die Gleichung (8) dann auf eine der beiden Formen:

$$A + C\left(\frac{x}{z}\right)^2 + 2\left(\frac{B'x + C'y + A''}{z}\right) = 0 \quad ;$$

$$A + B\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 2\left(\frac{B'x + C'y + A''}{z}\right) = 0$$

bringen läßt. Und wenn in der Gleichung (8) $B = 0$ und $C = 0$ ist, so ist die Fläche das System zweier Ebenen.

Wir wollen jetzt auch die Gleichung der Kegelfläche zweiten Grades vereinfachen. Legen wir durch den Mittelpunkt (Scheitel) eine Ebene, so wird diese mit der Kegelfläche entweder nur diesen Punkt gemein haben, oder die Kegelfläche in zwei erzeugenden Geraden schneiden, oder endlich diese Fläche in einer Geraden berühren. Nehmen wir irgend eine, durch den Mittelpunkt gehende Ebene, welche die Kegelfläche nicht berührt, zur Ebene der xy und den Mittelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten, so wird diese Fläche durch eine Gleichung von der Form

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B'xz + 2C'yz = 0 \qquad (12)$$

ausgedrückt seyn. Eine, der Ebene der xy parallele Ebene, deren Gleichung

$$z = h \qquad (5)$$

seyn mag, wird die Kegelfläche in einer Curve schneiden, deren Projection

$$By^2 + 2A'xy + Cx^2 + 2C'hy + 2B'hx + Ah^2 = 0 \qquad (13)$$

zur Gleichung hat. Welches nun auch diese Curve seyn mag, so können wir immer durch eine bloße Veränderung in der Lage der Achsen der x und der y, und ohne den Anfangspunkt derselben zu verändern, das zweite Glied aus ihrer Gleichung wegschaffen, so daß diese Gleichung (13) die Form §. 45.

$$By^2 + Cx^2 + 2C'hy + 2B'hx + Ah^2 = 0 \qquad (14)$$

bekommt. Hieraus folgt, daß die Gleichung (12) der Kegelfläche, durch dieselbe Veränderung der Achsen der x und der y, in

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2B'xz + 2C'yz = 0 \qquad (15)$$

übergehen wird. Die Coordinaten des Mittelpunktes der Durchschnittscurve, welche durch das System der beiden Gleichungen (5) und (14) ausgedrückt ist, sind

$$x = -\frac{B'}{C}h \;\; ; \;\; y = -\frac{C'}{B}h \;\; ; \;\; z = h \;, \qquad (16)$$

und diese Werthe sind immer reell und auch endlich, weil weder B noch C gleich Null seyn kann; denn wäre z. B. $B = 0$, und setzen wir, um den Durchschnitt der Ebene der xy mit der Kegelfläche zu finden, in der Gleichung (15) $z = 0$, so käme $Cx^2 = 0$, wodurch die Achse der y ausgedrückt wird, und es hätte die Kegelfläche mit unserer Ebene der xy nur diese Gerade gemein, in welcher sie dann auch von der Ebene der xy berührt würde, was gegen unsere vorher gemachte Annahme ist; wäre aber B und C gleich Null, so würde die Gleichung (15) keine Kegelfläche, sondern das System zweier Ebenen ausdrücken, da sie alsdann in zwei einfache Factoren nämlich in $(Az + 2B'x + 2C'y)z = 0$ zerlegbar wäre. — Eliminiren wir zwischen den Gleichungen (16) das h, so kommt

$$\left\{ \; Cx + B'z = 0 \;\; ; \;\; By + C'z = 0 \; \right\} , \qquad (17)$$

ein Gleichungssystem, welches den Ort der Mittelpunkte aller Durchschnittscurven ausdrückt, deren Ebenen der Ebene der xy parallel sind. Dieser Ort ist demnach eine gerade Linie, welche, da B und C, wie wir gezeigt haben, nicht gleich Null seyn können, nicht in der Ebene der xy liegt. Nehmen wir diese Gerade zur Achse der z, so sind ihre Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$, und es wird also durch diese neue Transformation B' und C' in den Gleichungen (17), und folglich auch in der Gleichung (15) verschwinden, so daß diese letztere die Form

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 = 0 \qquad (18)$$

annimmt. Diese Gleichung (18) ist als in der Gleichung (11) einbegriffen anzusehen, da sie aus dieser letztern hervorgehet wenn wir $A'' = 0$ setzen.

§. 45. Das bisher Gefundene zeigt uns, daß das Ellipsoid, die Hyperboloiden, die Paraboloiden und die Kegelfläche des zweiten Grades sich immer durch Gleichungen von der Form

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \qquad (11)$$

ausdrücken lassen.

§. 46.

Wenn keine von den drei Größen A, B, C in der Gleichung (11) des vorigen §. gleich Null ist, hat die Fläche zweiten Grades einen Mittelpunkt. Dies erhellet sowohl daraus, daß der in §. 43 mit D bezeichnete Ausdruck für die eben genannte Gleichung (11) gleich ABC, und also unter der jetzt angegebenen Voraussetzung nicht gleich Null ist, als auch daraus, daß die Gleichung (11), indem wir $z - \frac{A''}{A}$ für z setzen, sich in

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 = K \qquad (1)$$

verwandelt (wenn wir, zur Abkürzung, $\frac{A''^2}{A}$ durch $-K$ bezeichnen) und dann die ersten Potenzen von x, y und z nicht enthält. Die Gleichungen des Ellipsoids, der Hyperboloiden und der Kegelfläche des zweiten Grades lassen sich also, da diesen Flächen ein Mittelpunkt zukommt, und zwar durch unzählig verschiedene Transformationen, auf die Form (1) bringen.

Da sowohl z als y als x aus der Gleichung (1) zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe erhält, so halbirt jede der drei Coordinatenebenen, auf welche diese Gleichung (1) bezogen ist, die Sehnen, welche der Richtung der Durchschnittslinie der beiden anderen Coordinatenebenen parallel gezogen werden. Solche drei Diametralebenen heißen **conjugirte Diametralebenen**, ihre Durchschnittslinien werden **conjugirte Durchmesser** genannt, und eine Diametralebene ist einem Durchmesser **conjugirt**, wenn sie zwei Durchmesser enthält, welche jenem conjugirt sind. (Vergl. die Bemerk. zur Aufgabe 65 im §. 44.)

Wenn wir in der Gleichung (1) x und y, x und z, y und z gleich Null setzen, finden wir

$$z = \pm\sqrt{\frac{K}{A}} \;;\quad y = \pm\sqrt{\frac{K}{B}} \;;\quad x = \pm\sqrt{\frac{K}{C}}$$

Die Größen

$$2\sqrt{\frac{K}{A}} \;;\quad 2\sqrt{\frac{K}{B}} \;;\quad 2\sqrt{\frac{K}{C}} \;;$$

oder

$$2\sqrt{\frac{K}{A}}\cdot\sqrt{-1}\ ;\ 2\sqrt{\frac{K}{B}}\cdot\sqrt{-1}\ ;\ 2\sqrt{\frac{K}{C}}\cdot\sqrt{-1}\ ,$$

je nachdem die einen oder die anderen dieser Ausdrücke reell sind, heißen die Längen der conjugirten Durchmesser.

Da die Gleichung der genannten Flächen auf unzählig verschiedene Weisen auf die Form (1) gebracht werden kann, so giebt es unzählig viele Systeme conjugirter Durchmesser. Unter diesen giebt es ein System von, auf einander senkrechten Durchmessern, welche die Achsen der Fläche genannt werden. Um die Existenz desselben nachzuweisen, verfahren wir folgendermaßen.

Nehmen wir drei beliebige, durch den Mittelpunkt der Fläche (1) gehende Sehnen derselben an, deren Gleichungen

$$\left\{\begin{matrix} z = m_1 x \\ y = n_1 x \end{matrix}\right\} ; \left\{\begin{matrix} z = m_2 x \\ y = n_2 x \end{matrix}\right\} ; \left\{\begin{matrix} z = m_3 x \\ y = n_3 x \end{matrix}\right\}$$

seyn mögen, so sind die Gleichungen der drei, diesen Sehnen conjugirten Diametralebenen (§. 44, Aufg. 65) respective

$$Am_1z+Bn_1y+Cx = 0\ ;\ Am_2z+Bn_2y+Cx = 0\ ;\ Am_3z+Bn_3y+Cx = 0.$$

Sollen jene drei Sehnen conjugirte Durchmesser seyn, so muß die erste derselben mit der Durchschnittslinie der zweiten und dritten Diametralebene, die zweite mit der Durchschnittslinie der ersten und dritten, und die dritte mit der Durchschnittslinie der ersten und zweiten Diametralebene zusammen fallen. Dies giebt uns die drei Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{matrix} Am_1m_2 + Bn_1n_2 + C = 0\ ;\ Am_1m_3 + Bn_1n_3 + C = 0\ ; \\ Am_2m_3 + Bn_2n_3 + C = 0 \end{matrix}\right\}\ (2)$$

zwischen den sechs Größen m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, und es können also drei derselben beliebig angenommen werden, woraus wir von Neuem sehen, daß es in einer Fläche zweiten Grades (1) unzählig viele Systeme conjugirter Durchmesser giebt. Sollen aber jene drei Sehnen Achsen der Fläche seyn, und also senkrecht auf einander stehen, so müssen noch folgende drei Bedingungsgleichungen (§. 9, G. 3)

$$\left.\begin{matrix} m_1m_2+n_1n_2+1+(m_1n_2+m_2n_1)\bar{x}+(m_1+m_2)\bar{y}+(n_1+n_2)\bar{z} = 0 \\ m_1m_3+n_1n_3+1+(m_1n_3+m_3n_1)\bar{x}+(m_1+m_3)\bar{y}+(n_1+n_3)\bar{z} = 0 \\ m_2m_3+n_2n_3+1+(m_2n_3+m_3n_2)\bar{x}+(m_2+m_3)\bar{y}+(n_2+n_3)\bar{z} = 0 \end{matrix}\right\}\ (3)$$

Statt finden, wenn wir die Coordinatenwinkel durch $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, und, zur Abkürzung, $\cos\hat{x}$, $\cos\hat{y}$, $\cos\hat{z}$ respective durch $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ bezeichnen. Diese sechs

§. 46. Gleichungen (2 u. 3) geben uns die drei Paare unbekannter Größen m_1 und n_1, m_2 und n_2, m_3 und n_3. Da diese aber symmetrisch in den sechs Gleichungen vorkommen, sind wir berechtigt zu schließen, daß je drei Größen m_1, m_2, m_3 und n_1, n_2, n_3 von einer und derselben Gleichung dritten Grades abhängen werden, was die folgende Rechnung bestätigen wird. Wenn wir die erste und zweite Gleichung (2) respective mit m_3 und m_2, und wenn wir sie mit n_3 und n_2 multipliciren und die Differenzen der Producte nehmen, so erhalten wir

$$B(n_2m_3 - n_3m_2)n_1 + C(m_3 - m_2) = 0 \quad , \tag{4}$$
$$A(n_2m_3 - n_3m_2)m_1 + C(n_2 - n_3) = 0 \quad ; \tag{5}$$

und wenn wir eben so mit der ersten und zweiten Gleichung (3) verfahren

$$(n_1 + m_1\bar{x} + \bar{z})(n_2m_3 - n_3m_2) + (1 + m_1\bar{y} + n_1\bar{z})(m_3 - m_2) = 0 \quad , \tag{6}$$
$$(n_1\bar{x} + m_1 + \bar{y})(n_2m_3 - n_3m_2) + (1 + m_1\bar{y} + n_1\bar{z})(n_2 - n_3) = 0 \quad . \tag{7}$$

Eliminiren wir nun $(m_3 - n_2)$ zwischen den Gleichungen (4) und (6), und $(n_2 - n_3)$ zwischen den Gleichungen (5) und (7), so geht $(n_2m_3 - n_3m_2)$ von selbst fort, und wir haben

$$C(n_1 + m_1\bar{x} + \bar{z}) = Bn_1(1 + m_1\bar{y} + n_1\bar{z}) \quad , \tag{8}$$
$$C(n_1\bar{x} + m_1 + \bar{y}) = Am_1(1 + m_1\bar{y} + n_1\bar{z}) \quad . \tag{9}$$

Verfahren wir auf ähnliche Weise mit den ersten und dritten Gleichungen, und auch mit den zweiten und dritten Gleichungen (2) und (3), so erhalten wir statt des Systems der Gleichungen (8) und (9), welches zur Bestimmung der beiden Größen m_1 und n_1 dient, zwei andere Gleichungssysteme, welche respective die Größen m_2 und n_2, und die Größen m_3 und n_3 bestimmen. Da aber die dritten Gleichungen (2) und (3) aus den zweiten Gleichungen (2) und (3) entstehen, wenn wir m_2 und n_2 respective für m_1 und n_1, und da sie ferner aus den ersten Gleichungen (2) und (3) hervorgehen, wenn wir m_3 und n_3 respective für m_1 und n setzen, so folgt, daß wir die beiden Gleichungssysteme, welche m_2 und n_2, m_3 und n_3 bestimmen, erhalten werden, wenn wir in dem Gleichungssysteme (8) und (9) diese Größen nach einander an die Stelle von m_1 und n_1 setzen. — Aus der Gleichung (9) können wir n_1 leicht entwickeln und erhalten dadurch einen Ausdruck, welcher eine rationale Function von m_1 ist; setzen wir diesen in die Gleichung (8), so haben wir diejenige Gleichung, welche m_1 bestimmt und die, wie wir sehr leicht finden, vom dritten Grade ist. Vertauschen wir in dieser Gleichung des dritten Grades m_1 nach einander mit m_2 und m_3, so erhalten wir, wie aus dem vorher Gesagten klar ist, diejenigen Gleichungen, welche m_2 und m_3 bestimmen. Daraus folgt, daß wenn wir eine

Wurzel der genannten Gleichung des dritten Grades für den Werth von m_1 nehmen, die beiden anderen Wurzeln dieser Gleichung die Werthe von m_2 und m_3 seyn werden. Nun ist aber wenigstens eine Wurzel der genannten Gleichung, da diese vom dritten Grade ist, reell, und wenn wir eben diese reelle Wurzel für m_1 nehmen, so erhält auch n_1 einen reellen Werth, weil, wie wir schon gesehen haben, n_1 eine rationale Function von m_1 ist. Daß aber auch m_2 und m_3, und folglich auch n_2 und n_3 reelle Werthe erhalten, davon können wir uns überzeugen ohne die Gleichung des dritten Grades darzustellen; denn setzen wir die reellen Werthe von m_1 und n_1, deren Existenz wir erwiesen haben, in die ersten und auch in die zweiten Gleichungen (2) und (3), so erhalten wir zwei Paar Gleichungen, von denen das eine nur noch die Unbekannten m_2 und n_2, und das andere nur noch die Unbekannten m_3 und n_3 enthält, und die in Beziehung auf diese Größen nur vom ersten Grade sind, diese Größe also auf reelle Weise bestimmen.

Da m_1, n_1, m_2, n_2, m_3 und n_3 immer reelle Werthe erhalten, so folgt, daß einer jeden, durch die Gleichung (1) ausgedrückten Fläche, welches auch immer die Coordinatenwinkel seyn mögen, drei conjugirte Durchmesser, die auf einander senkrecht sind, d. i. drei Achsen zukommen.

Zwischen den Längen der drei Achsen, den Längen von irgend drei conjugirten Durchmessern und den Winkeln, welche diese letzteren mit einander machen, finden gewisse Relationen Statt, zu welchen wir auf folgende Weise gelangen.

Es seyen x', y', z' die Coordinaten eines Endpunktes von einer Achse der Fläche, und $2r$ die Länge derselben Achse. Alsdann haben wir, die eingeführten Bezeichnungen beibehaltend, da dieser Endpunkt auf der genannten Achse, da er auch auf der Fläche (1) liegt, und da ferner diese Achse im Mittelpunkte der Fläche, d. i. im Anfangspunkte der Coordinaten halbirt wird:

$$z' = m_1 x' \quad ; \quad y' = n_1 x'$$
$$z'^2 + y'^2 + x'^2 + 2\bar{z} \cdot x'y' + 2\bar{y} \cdot x'z' + 2\bar{x} \cdot y'z' = r^2 \quad ;$$
$$Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 = K \quad .$$

Eliminiren wir, vermittelst der beiden ersten dieser Gleichungen, y' und z' aus den beiden letzten, so erhalten wir

$$(m_1^2 + n_1^2 + 1 + 2\bar{z}n_1 + 2\bar{y}m_1 + 2\bar{x}m_1 n_1)x'^2 = r^2$$
$$(Am_1^2 + Bn_1^2 + C)x'^2 = K$$

woraus wir wiederum, durch Elimination von x',

§. 46.
$$\left.\begin{array}{l}(Ar^2-K)m_1^2+(Br^2-K)n_1^2+Cr^2-K\\ \quad -2K\bar{x}m_1n_1-2K\bar{y}m_1-2K\bar{z}n_1\end{array}\right\}=0\ ,$$

und endlich, wenn wir vermittelst der Gleichungen (8) und (9) m_1 und n_1 aus dieser Gleichung fortschaffen,

$$\left.\begin{array}{l}ABCr^6-K(AB+AC+BC)r^4+K^2(A\sin^2\hat{z}+B\sin^2\hat{y}+C\sin^2\hat{x})r^2\\ \quad -K^3(1-\cos^2\hat{x}-\cos^2\hat{y}-\cos^2\hat{z}+2\cos\hat{x}\cos\hat{y}\cos\hat{z})\end{array}\right\}=0\ (10)$$

erhalten. Diese Gleichung ist in Beziehung auf r^2 vom dritten Grade und die drei Werthe von r^2, welche sie liefert, sind die Quadrate der drei Halbachsen. Aus dieser Gleichung (10) folgt unmittelbar, daß

die Summe der Quadrate der Halbachsen
$$=\frac{K}{A}+\frac{K}{B}+\frac{K}{C}\ ,$$

die Summe ihrer Producte zu zweien
$$=\frac{K}{A}\cdot\frac{K}{B}\cdot\sin^2\hat{x}+\frac{K}{A}\cdot\frac{K}{C}\cdot\sin^2\hat{y}+\frac{K}{B}\cdot\frac{K}{C}\cdot\sin^2\hat{z}\ ,$$

das Product dieser Quadrate
$$=\frac{K}{A}\cdot\frac{K}{B}\cdot\frac{K}{C}\cdot(1-\bar{x}^2-\bar{y}^2-\bar{z}^2+2\bar{x}\bar{y}\bar{z})\ ,$$

ist. Da nun $\frac{4K}{A}$, $\frac{4K}{B}$, $\frac{4K}{C}$ die Quadrate der conjugirten Durchmesser ausdrücken, welche mit einander die Winkel $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ bilden, so haben wir den folgenden

Lehrsatz [18]. In jeder Fläche zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt hat, ist **erstens** die Summe der Quadrate von jeden drei conjugirten Durchmessern der Summe der Quadrate der drei Achsen, **zweitens** die Summe der Quadrate der Seitenfläche des Parallelepipeds, welches unter irgend drei conjugirten Durchmessern enthalten ist, der Summe der Quadrate der Seitenflächen des unter den drei Achsen enthaltenen rechtwinkligen Parallelepipeds, **drittens** der Inhalt jenes zuerst genannten schiefwinkligen Parallelepipeds dem Inhalte des zuletzt genannten rechtwinkligen gleich.

Wenn also 2a, 2b, 2c die drei Achsen, und 2a′, 2b′, 2c′ irgend drei conjugirte Durchmesser einer und derselben Fläche zweiten Grades bezeichnen, von welchen letzteren 2a′ und 2b′ den Winkel γ, 2a′ und 2c′ den Winkel β, 2b′ und 2c′ den Winkel α bilden, so ist

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2\ .\ ;$$

$$a'^2b'^2\cos^2\gamma + a'^2c'^2\cos^2\beta + b'^2c'^2\cos^2\alpha = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \quad ;$$
$$a'^2b'^2c'^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) = a^2b^2c^2 \quad .$$

Hierbei bemerken wir sogleich, daß einige der Größen a, b, c, a′, b′, c′ imaginair, und ihre Quadrate daher negativ seyn können.

Aus dem bis hieher Gezeigten folgt, daß eine jede Fläche zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt hat, sich auch immer in rechtwinkligen Coordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$Mz^2 + Ny^2 + Px^2 = Q \qquad (11)$$

ausdrücken läßt.

§. 46.

Wenn in der Gleichung (11) des vorigen §. B oder C gleich Null ist, enthält sie augenscheinlich nur zwei von den drei Coordinaten und drückt dann also eine Cylinderfläche aus (§.29), ein Fall, den wir hier nicht weiter zu betrachten brauchen.

Wenn aber, in jener Gleichung (11) des vorigen §., A gleich Null ist, so haben wir

$$By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \quad , \qquad (12)$$

und die durch diese Gleichung ausgedrückten Flächen, welche keinen Mittelpunkt haben, lassen sich auch in rechtwinkligen Coordinaten durch Gleichungen von derselben Form (12) ausdrücken.

Legen wir nämlich in irgend einem Punkt $x_1y_1z_1$ der Fläche (12) eine Tangentialebene, so ist deren Gleichung (§.44, Aufg. 64)

$$A''z + By_1y + Cx_1x + A''z_1 = 0 \quad .$$

Die gerade Linie, welche auf dieser Tangentialebene im Berührungspunkte senkrecht steht, wird, zufolge §.9 (S. 19), durch die folgenden beiden Gleichungen

$$\{A''\sin^2\hat{z} + B(\bar{y}\bar{z}-\bar{x})y_1 + C(\bar{x}\bar{z}-\bar{y})x_1\}(x-x_1)$$
$$= \{A''(\bar{x}\bar{z}-\bar{y}) + B(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})y_1 + C\sin^2\hat{x}\cdot x_1\}(z-z_1) \quad ;$$
$$\{A''\sin^2\hat{z} + B(\bar{y}\bar{z}-\bar{x})y_1 + C(\bar{x}\bar{z}-\bar{y})x_1)\}(y-y_1)$$
$$= \{A''(\bar{y}\bar{z}-\bar{x}) + B\sin^2\hat{y}\cdot y_1 + C(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})x_1\}(z-z_1) \quad .$$

dargestellt. Soll diese Senkrechte der Achse der z parallel seyn, so müssen offenbar die beiden Gleichungen

$$A''(\bar{x}\bar{z}-\bar{y}) + B(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})y_1 + C\sin^2\hat{x}\cdot x_1 = 0$$
$$A''(\bar{y}\bar{z}-\bar{x}) + B\sin^2\hat{y}\cdot y_1 + C(\bar{x}\bar{y}-\bar{z})x_1 = 0$$

§. 46. Statt finden, woraus wir

$$x_1 = \frac{A''}{C} \cos \hat{y} \quad ; \quad y_1 = \frac{A''}{B} \cos \hat{x}$$

erhalten. Da der Punkt $x_1 y_1 z_1$ auf der Fläche (12) liegen soll, so haben wir auch

$$By_1^2 + Cx_1^2 + 2A''z_1 = 0 \quad , \tag{13}$$

und wenn wir in diese Gleichung die so eben für x_1 und y_1 gefundenen Ausdrücke setzen, ergiebt sich

$$z_1 = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{A''}{C} \cos^2 \hat{y} + \frac{A''}{B} \cos^2 \hat{x}\right) \quad .$$

Da nun die für x_1, y_1 und z_1 gefundenen Werthe reell und endlich sind, so giebt es in der, durch die Gleichung (12) dargestellten Fläche immer einen Punkt, in welchem die Tangentialebene auf der zur Achse der z genommenen Geraden senkrecht stehet.

Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach diesem Punkte $x_1 y_1 z_1$, indem wir in die Gleichung (12) $x + x_1$, $y + y_1$ und $z + z_1$ respective für x, y und z setzen, und dabei die Gleichung (13) berücksichtigen, so kommt

$$By^2 + Cx^2 + 2A''z + 2By_1 y + 2Cx_1 x = 0 \quad . \tag{14}$$

Die Tangentialebene in diesem neuen Anfangspunkte hat, wenn sie in den jetzigen Coordinaten ausgedrückt wird, zur Gleichung

$$A''z + By_1 y + Cx_1 x = 0 \quad . \tag{15}$$

Nehmen wir nun wieder ein anderes Coordinatensystem $x'y'z'$ und in diesem die so eben genannte Tangentialebene zur Ebene der $x'y'$, die Ebenen der xz und der yz aber zu Ebenen der $x'z'$ und der $y'z'$; so ist die Gleichung der erwähnten Tangentialebene

$$z' = 0 \quad , \tag{16}$$

und die Gleichungen (15) und (16) zeigen uns, daß

$$A''z + By_1 y + Cx_1 x = \lambda z' \quad . \tag{17}$$

ist, wo λ einen Coefficienten bedeutet, den wir nicht zu bestimmen brauchen. Da die Ebene der xz mit der Ebene der $x'z'$, und die Ebene der yz mit der Ebene der $y'z'$ coincidirt, so sind die Winkel, welche wir in der Aufgabe (31) des §. 13 durch (z', yz), (z', xz), (y', yz) und (x', xz) bezeichnet haben, offenbar rechte Winkel und ihre Cosinus daher gleich Null. Deshalb ziehen sich die ersten beiden Gleichungen (1) des §. 13 für unseren jetzigen Fall auf

$$x \cos(x, yz) = x' \cos(x', yz) \quad ; \quad y \cos(y, xz) = y' \cos(y', xz) \tag{18}$$

zurück. Wenden wir nun die Gleichungen (17) und (18) zur Transformation der Gleichung (14) an, so verwandelt sich diese in eine Gleichung von der Form §. 46.

$$Dy'^2 + Ex'^2 + 2Tz' = 0 \qquad (19)$$

Diese Gleichung bezieht sich also auf ein Coordinatensystem, in welchem die Achse der z' senkrecht auf der Ebene der $x'y'$ steht. Schneiden wir die Fläche (19) durch eine, der Ebene der $x'y'$ parallele Ebene, deren Gleichung $z' = h$ ist, so erhalten wir für die Projection der Durchschnittscurve

$$Dy'^2 + Ex'^2 + 2Th = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, welche ihre Form nicht ändert, wenn wir diese Durchschnittscurve auf ihre Achsen beziehen. Nehmen wir also diese Achsen der Curve zu Achsen der x und der y, so ändert auch die Gleichung (19) ihre Form nicht, und die Fläche (12) ist alsdann in rechtwinkligen Coordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$Ry^2 + Sx^2 + 2Tz = 0 \qquad (20)$$

ausgedrückt, was wir zeigen wollten.

Diejenige gerade Linie, welche in den Gleichungen (14), (19) und (20) als Achse der z genommen worden ist, heißt die Achse der Fläche.

§. 47.

Alle Formen, welche die, auf drei conjugirte Durchmesser bezogene Gleichung (1) des vorigen §., durch die Verschiedenheit der Vorzeichen ihrer Constanten, annehmen kann, sind, wie leicht einzusehen ist, in folgenden vier Fällen begriffen:

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 = K \quad , \qquad (1)$$
$$Az^2 + By^2 - Cx^2 = K \quad , \qquad (2)$$
$$Az^2 - By^2 - Cx^2 = K \quad , \qquad (3)$$
$$Az^2 + By^2 + Cx^2 = -K \quad , \qquad (4)$$

wenn wir unter A, B, C und K absolute Größen verstehen, die auch zum Theil gleich Null seyn können. Wir wollen nun eine jede dieser Formen besonders betrachten.

Die Form (1) ist die Gleichung eines Ellipsoids. Denn es ist, wenn wir diese Gleichung (1) mit der Gleichung (1) im §. 42 vergleichen, $D = ABC$, $\Delta' = -ABCK$ und $C' = -AB$; also $D > 0$, $\Delta' < 0$ und $C' < 0$. — Wenn $K = 0$, degenerirt das Ellipsoid in einen Punkt.

Die Form (2) ist die Gleichung eines hyperbolischen Hyperboloids. Denn wir haben hier $D = -ABC$, $\Delta' = ABCK$, $C' = -AB$; also

§. 47. $D < 0$, $\Delta' > 0$, $C' < 0$. — Wenn $K = 0$, degenerirt das hyperbolische Hyperboloid in einen Kegel.

Die Form (3) ist die Gleichung eines elliptischen Hyperboloids. Denn hier ist $D = ABC$, $\Delta' = -ABCK$, $C' = AB$; also $D > 0$, $\Delta' < 0$, $C' > 0$. — Wenn $K = 0$, degenerirt das elliptische Hyperboloid in einen Kegel.

Die Form (4) hat keine geometrische Bedeutung, oder, mit anderen Worten, die Gleichung (4) drückt eine imaginaire Fläche aus. Wenn $K = 0$, stellt sie einen Punkt, den Anfangspunkt der Coordinaten, dar.

Alle Formen, welche die Gleichung (12) des vorigen §. durch die Verschiedenheit der Vorzeichen ihrer Constanten annehmen kann, sind in folgenden zwei Fällen begriffen:

$$By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \quad , \tag{5}$$

$$By^2 - Cx^2 + 2A''z = 0 \quad , \tag{6}$$

wenn wir unter B, C und A'' absolute Größen verstehen; denn die Formen $By^2 + Cx^2 - 2A''z = 0$ und $By^2 - Cx^2 - 2A''z = 0$ sind in den genannten enthalten, indem wir in diesen nur $-z$ für z zu setzen brauchen, um sie auf jene zu bringen.

Die Form (5) ist die Gleichung eines elliptischen Paraboloids.

Die Form (6) ist die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids.

Beides ergiebt sich aus §. 42; namentlich aus der in der dortigen Tafel enthaltenen Zusammenstellung, wenn wir nach der daselbst gemachten Bemerkung, weil der Coefficient von z^2 hier gleich Null ist, in der Gleichung (1) des §. 42, a mit b und a' mit b' gegenseitig vertauschen.

Setzen wir in den Gleichungen (1), (2), (3)

$$\frac{K}{A} = c^2 \;\; ; \;\; \frac{K}{B} = b^2 \;\; ; \;\; \frac{K}{C} = a^2 \quad ,$$

so erhalten wir als Gleichung

des Ellipsoids:

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \quad , \tag{7}$$

des hyperbolischen Hyperboloids:

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \quad , \tag{8}$$

des

des elliptischen Hyperboloids

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad \text{oder} \quad a^2b^2z^2-a^2c^2y^2-b^2c^2x^2=a^2b^2c^2 \quad . \tag{9}$$

Setzen wir aber in den Gleichungen (2) und (3)

$$K=0 \quad \text{und} \quad A:B:C=\frac{1}{c^2}:\frac{1}{b^2}:\frac{1}{a^2} \quad ,$$

so erhalten wir als Gleichung des Kegels vom zweiten Grade die eine oder die andere der beiden folgenden Formen

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0 \quad ; \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0 \quad , \tag{10}$$

welche in einander übergehen, wenn wir x und z, und zugleich a und c gegenseitig mit einander vertauschen.

Wir wollen hier sogleich bemerken, daß die Gleichung (8), wenn wir darin x und z, und auch a und c gegenseitig mit einander vertauschen, in

$$a^2b^2z^2-a^2c^2y^2-b^2c^2x^2=-a^2b^2c^2 \tag{11}$$

übergehet, eine Gleichung, deren erster Theil mit dem ersten Theile der Gleichung (9) identisch ist, woraus denn sogleich folgt, das wir das elliptische und hyperbolische Hyperboloid und die Kegelfläche zweiten Grades durch die eine Gleichung

$$a^2b^2z^2-a^2c^2y^2-b^2c^2x^2=\lambda a^2b^2c^2 \tag{12}$$

ausdrücken können, wenn wir nach einander $\lambda=+1$, $\lambda=-1$ und $\lambda=0$ setzen.

Um die geometrische Bedeutung der Größen a, b, c zu finden, setzen wir in den Gleichungen (7), (8), (9) nach einander y und z, x und z, x und y gleich Null, und finden dann

für das Ellipsoid

$$x=\pm a \quad ; \quad y=\pm b \quad ; \quad z=\pm c \quad ,$$

für das hyperbolische Hyperboloid

$$x=\pm a\sqrt{-1} \quad ; \quad y=\pm b \quad ; \quad z=\pm c \quad ,$$

für das elliptische Hyperboloid

$$x=\pm a\sqrt{-1} \quad ; \quad y=\pm b\sqrt{-1} \quad ; \quad z=\pm c \quad ;$$

es drücken demnach $2a$, $2b$, $2c$ die Längen der conjugirten Durchmesser oder, falls die Coordinaten rechtwinklig sind, der Achsen der drei genannten Flächen aus.

§. 47. Das Ellipsoid (7) wird von den Coordinatenebenen in Ellipsen geschnitten, deren Gleichungen respective

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad ; \quad a^2z^2 + c^2x^2 = a^2c^2 \quad ; \quad b^2z^2 + c^2y^2 = b^2c^2 \quad (13)$$

sind. Ueberhaupt bildet jeder ebene Schnitt in einem Ellipsoid eine Ellipse.

Die sechs Endpunkte der Achsen eines Ellipsoids heißen die Scheitel dieser Fläche.

Sind zwei Achsen eines Ellipsoids einander gleich, so wird es Rotationsellipsoid oder Sphäroid genannt. Sind in der Gleichung (7) die Coordinaten rechtwinklig und zwei Achsen, z. B. 2c, 2b, einander gleich, so geht diese Gleichung in

$$a^2z^2 + c^2y^2 + c^2x^2 = a^2c^2 \qquad (14)$$

über, welches die Gleichung eines Rotationsellipsoids ist. Alle, der Ebene der xy parallelen Durchschnitte dieses Sphäroids sind durch die Gleichung

$$y^2 + x^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - h^2) \quad ,$$

in welcher h die Entfernung der Durchschnittsebene von der Ebene der xy bezeichnet, ausgedrückt, und demnach, wenn $h < c$ d. i. wenn sie reell sind, Kreise. Der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise, d. i. die Achse z, heißt die Rotationsachse.

Sind alle drei Achsen des Ellipsoids einander gleich, so geht die Gleichung (7), wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, in

$$z^2 + y^2 + x^2 = a^2 \quad ,$$

das Ellipsoid also in eine Kugelfläche über.

Das hyperbolische Hyperboloid (8) wird von den Coordinatenebenen in drei Curven geschnitten, deren Gleichungen

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2 \quad ; \quad a^2z^2 - c^2x^2 = a^2c^2 \quad ; \quad b^2z^2 + c^2y^2 = b^2c^2 \quad , \quad (15)$$

und von welchen also die beiden ersten Hyperbeln sind, und die dritte eine Ellipse ist.

Eine Ebene, welche der Ebene der xy parallel ist und $z = h$ zur Gleichung hat, schneidet das hyperbolische Hyperboloid in einer Curve, deren Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}(c^2 - h^2) \quad , \qquad (16)$$

und die also eine Hyperbel, oder in dem besonderen Falle, in welchem

$h = \pm c$, das System zweier geraden Linien ist. Sind die Coordinaten rechtwinklig, so liegt die Hauptachse der Hyperbel (16) in der Ebene der xz wenn $h^2 > c^2$, in der Ebene der yz aber wenn $h^2 < c^2$. §. 47.

Eine Ebene, welche der Ebene der xz parallel und deren Gleichung $y = h$ ist, schneidet das hyperbolische Hyperboloid in einer Curve, deren Gleichung

$$a^2z^2 - c^2x^2 = \frac{a^2c^2}{b^2}(b^2 - h^2) \quad ,$$

und die also wieder eine Hyperbel, oder in dem besonderen Falle, in welchen $h^2 = b^2$, das System zweier Geraden ist.

Eine Ebene, welche der Ebene der yz parallel, und deren Gleichung $x = h$ ist, schneidet das hyperbolische Hyperboloid in einer Curve, deren Gleichung

$$b^2z^2 + c^2y^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}(a^2 + h^2) \quad ,$$

und die folglich, was auch h seyn mag, immer reell und zwar eine Ellipse ist.

Die vier Endpunkte der reellen Achsen, 2b, 2c, heißen die Scheitel des hyperbolischen Hyperboloids.

Sind die beiden reellen Achsen einander gleich, so heißt diese Fläche ein hyperbolisches Rotationshyperboloid. Sind in der Gleichung (8) die Coordinaten rechtwinklig und die beiden Achsen 2c, 2b einander gleich, so geht diese Gleichung in

$$a^2z^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = a^2c^2 \qquad (17)$$

über, welches die Gleichung eines hyperbolischen Rotationshyperboloids ist. Alle der Ebene der yz parallelen Durchschnitte sind dann Kreise und der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise, d. i. die Achse der x, heißt die Rotationsachse.

Setzen wir in der Gleichung (9) des elliptischen Hyperboloids nacheinander z, y und x gleich Null, so kommt

$$a^2y^2 + b^2x^2 = -a^2b^2 \;;\; a^2z^2 - c^2x^2 = a^2c^2 \;;\; b^2z^2 - c^2y^2 = b^2c^2 \;. \qquad (18)$$

Von diesen drei Gleichungen drückt die erste eine imaginaire Curve aus, und die beiden letzten stellen Hyperbeln dar. Das elliptische Hyperboloid (9) wird also von der Ebene der xy nicht getroffen, hingegen von den Ebenen der xz und der yz in Hyperbeln geschnitten.

Eine Ebene, deren Gleichung $z = h$ ist, schneidet das genannte Hyperboloid in einer Curve, deren Gleichung

§. 47.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}(h^2 - c^2) \quad , \qquad (19)$$

und die also imaginair wenn $h^2 < c^2$, ein Punkt wenn $h^2 = c^2$ und eine Ellipse wenn $h^2 > c^2$ ist. Hieraus sehen wir, daß diese Fläche aus zwei, von einander abgesonderten Theilen bestehet *).

Eine Ebene, deren Gleichung $y = h$ ist, schneidet das elliptische Hyperboloid in einer Curve, deren Gleichung

$$a^2z^2 - c^2x^2 = \frac{a^2c^2}{b^2}(b^2+h^2) \quad ,$$

und eine Ebene, deren Gleichung $x = h$ ist, schneidet dasselbe in einer Curve, deren Gleichung

$$b^2z^2 - c^2y^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}(a^2 + h^2)$$

ist. Diese Curven sind, wie wir sehen, reell und zwar Hyperbeln, welche Werthe h auch haben mag.

Die zwei Endpunkte der reellen Achse, 2c, heißen die Scheitel des elliptischen Hyperboloids.

Sind die beiden imaginairen Achsen einander gleich, so heißt die Fläche (9) ein elliptisches Rotationshyperboloid, dessen Gleichung demnach in rechtwinkligen Coordinaten

$$a^2z^2 - c^2y^2 - c^2x^2 = a^2c^2 \qquad (20)$$

ist. Alle der Ebene der xy parallelen Durchschnitte dieses Hyperboloids (20) sind, wenn sie reell, Kreise. Der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise, d.i. die Achse der z, heißt die Rotationsachse.

Die Gleichung der Kegelfläche (10) verwandelt sich, wenn wir für $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ respective $tg\,a$ und $tg\,b$ setzen, in die Gleichung

$$\left(\frac{y}{tg\,b}\right)^2 + \left(\frac{x}{tg\,a}\right)^2 = z^2 \quad , \qquad (21)$$

welches, wenn wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen, die Gleichung (11) des §. 34 ist. Die Durchschnitte der, den Coordinatenebenen paralle-

*) Deshalb wird das elliptische Hyperboloid auch Hyperboloid mit zwei Schalen, und das hyperbolische Hyperboloid hingegen Hyperboloid mit einer Schale genannt, wie wir schon in §. 43 angegeben haben.

len Ebenen und der Kegelfläche haben wir in diesem §. 34 bereits betrachtet, wo wir auch die Gleichung des Rotationskegels aufgestellt haben. §. 47.

Da die beiden Hyperboloiden und die Kegelfläche zweiten Grades sowohl in Ellipsen als in Hyperbeln geschnitten werden können, so folgt, daß diese drei Flächen auch in Parabeln zu schneiden sind.

Aufgabe [66]. Die Gleichung eines Hyperboloids oder eines Kegels vom zweiten Grade ist gegeben. Man soll die Lage einer Ebene finden, welche von dem Mittelpunkte jener Fläche eine gegebene Entfernung hat, und welche sie in einer Parabel schneidet.

Wir können die in der Aufgabe genannten Flächen durch die, auf rechtwinklige Achsen bezogene Gleichung

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\lambda$$

darstellen, welche ein hyperbolisches Hyperboloid wenn $\lambda=+1$, ein elliptisches wenn $\lambda=-1$ und einen Kegel ausdrückt wenn $\lambda=0$ ist, was wir oben schon gesehen haben (S. 12). Wir bemerken hierbei noch, daß der eben genannte Kegel der Asymptotenkegel des hyperbolischen und des elliptischen Hyperboloids ist (§. 43).

Eine Ebene, welche vom Anfangspunkte der Coordinaten die gegebene Entfernung p hat, ist durch die Gleichung

$$\cos\gamma\, z+\cos\beta\, y+\cos\alpha\, x=p$$

auszudrücken (§. 10, S. 13). Wenn diese Ebene die genannte Fläche in einer Parabel schneidet, so wird auch die Projection dieser Durchschnittscurve eine Parabel seyn, denn eine jede Curve liegt mit ihrer Projection in dem projicirenden Cylinder und steht folglich mit ihr in der Verwandtschaft der Affinität (§. 30, Lehrs. 13). Für eine Projection der Durchschnittscurve finden wir aber, durch Elimination von z,

$$(b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma)a^2y^2+2a^2b^2\cos\alpha\cos\beta\, xy+(a^2\cos^2\alpha-c^2\cos^2\gamma)b^2x^2$$
$$-2a^2b^2p(\cos\beta\cos\gamma\, y+\cos\alpha\cos\gamma\, x)+a^2b^2(p^2-\lambda c^2\cos^2\gamma)=0.$$

Soll nun diese Gleichung eine Parabel ausdrücken, so muß die Bedingungsgleichung

$$a^4b^4\cos^2\alpha\cos^2\beta-a^2b^2(a^2\cos^2\alpha-c^2\cos^2\gamma)(b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma)=0$$

erfüllt werden, welche sich von selbst auf

$$c^2\cos^2\gamma+b^2\cos^2\beta-a^2\cos^2\alpha=0.$$

§. 47. reducirt, und neben welcher wir noch die Bedingungsgleichung

$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1$$

haben. Da also nur zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Größen α, β, γ existiren, so giebt es unendlich viele Ebenen, welche von dem Mittelpunkte der Fläche die gegebene Entfernung haben und welche die Fläche in Parabeln schneiden. — Die Gleichungen des Perpendikels p sind

$$\cos\gamma\,x = \cos\alpha\,z \quad ; \quad \cos\gamma\,y = \cos\beta\,z \quad .$$

Eliminiren wir zwischen diesen beiden Gleichungen und der ersten Bedingungsgleichung α und β, so geht γ von selbst fort, und wir haben

$$c^2z^2 + b^2y^2 - a^2x^2 = 0$$

als Gleichung des Ortes aller jener Perpendikel, welcher, wie wir sehen, eine Kegelfläche zweiten Grades ist. Diese Kegelfläche nun hat die Eigenschaft, daß alle Ebenen, welche die erzeugenden Geraden derselben senkrecht schneiden, auf der gegebenen Fläche Durchschnitte bilden, welche Parabeln sind.

Wir können aber die gesuchte Lage der, die gegebene Fläche in Parabeln schneidenden Ebenen auch noch auf eine andere Art bestimmen. Legen wir nämlich durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine Ebene, welche einer der Ebenen von der verlangten Lage parallel ist, so wird sie durch die Gleichung

$$\cos\gamma\,z + \cos\beta\,y + \cos\alpha\,x = 0$$

ausgedrückt seyn; und wenn wir, durch Elimination von z, eine Projection des Durchschnitts dieser Ebene und der gegebenen Fläche suchen, so finden wir

$$(b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)a^2y^2 + 2a^2b^2\cos\alpha\cos\beta\,xy + (a^2\cos^2\alpha - c^2\cos^2\gamma)b^2x^2$$
$$-\lambda a^2b^2c^2\cos^2\gamma = 0 \; .$$

Dieser Gleichung können wir, vermittelst der vorher gefundenen ersten Bedingungsgleichung, die Form

$$a^4\cos^2\alpha\,y^2 + 2a^2b^2\cos\alpha\cos\beta\,xy + b^4\cos^2\beta\,x^2 - \lambda a^2b^2c^2\cos^2\gamma = 0$$

geben, und sie nun in zwei Factoren, nämlich in

$$(a^2\cos\alpha y + b^2\cos\beta x + abc\cos\gamma\sqrt{\lambda})(a^2\cos\alpha y + b^2\cos\beta x - abc\cos\gamma\sqrt{\lambda}) = 0$$

zerlegen. Ist also $\lambda = +1$, so ist die gesuchte Projection, folglich auch der Durchschnitt selbst, das System von zwei parallelen Geraden; ist $\lambda = -1$, so ist die Projection, folglich auch der Durchschnitt selbst, imaginair; ist endlich $\lambda = 0$, so fallen die zuerst genannten beiden parallelen Geraden in eine einzige Gerade zusammen. Wir sehen hieraus, daß die auf diese Weise durch den Mittelpunkt der Flächen gelegten Ebenen das hyper-

bolische Hyperboloid in zwei parallelen Geraden, daß sie das elliptische Hy- §. 47.
perboloid gar nicht schneiden, und daß sie den Asymptotenkegel berühren.
Das so eben erhaltene Resultat können wir folgendermaßen ausdrücken:
Legt man durch den Mittelpunkt eines Hyperboloids eine Ebene, welche
dessen Asymptotenkegel berührt, so schneidet sie das Hyperboloid, wenn es
ein hyperbolisches, in zwei parallelen Geraden, wenn es aber ein elliptisches
ist, nur in unendlicher Entfernung; legt man ferner einer solchen Tangen-
tialebene des Asymptotenkegels eine Ebene in beliebiger Entfernung parallel,
so schneidet diese die beiden Hyperboloiden und den Asymptotenkegel in
Parabeln.

Aus dem eben ausgesprochenen Ergebniß folgt leicht, daß wenn auf
einem hyperbolischen Hyperboloid irgend zwei parallele Gerade gezogen wer-
den, die Ebene dieser Geraden durch den Mittelpunkt der Fläche geht; und
umgekehrt, daß wenn eine durch den Mittelpunkt eines hyperbolischen Hy-
perboloids gehende Ebene diese Fläche in zwei Geraden schneidet, diese Li-
nien parallel laufen.

§. 48.

Setzen wir in den Gleichungen (5) und (6) des vorigen §.

$$\frac{A''}{B} = \frac{b^2}{-p} \quad ; \quad \frac{A''}{C} = \frac{a^2}{-p} \quad ,$$

so erhalten wir als Gleichung

des elliptischen Paraboloids:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 2\frac{z}{p} \quad \text{oder} \quad a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{2a^2b^2}{p}z \quad , \qquad (1)$$

des hyperbolischen Paraboloids:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2\frac{z}{p} \quad \text{oder} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = \frac{2a^2b^2}{p}z \quad . \qquad (2)$$

Wir setzen nun in der Gleichung (1) nacheinander x, y und z gleich
Null, wodurch wir

$$py^2 = 2b^2z \quad ; \quad px^2 = 2a^2z \quad ; \quad a^2y^2 + b^2x^2 = 0$$

erhalten. Daraus sehen wir, daß die beiden Coordinatenebenen der yz und
der xz das elliptische Paraboloid (1) in Parabeln schneiden, und daß die
Coordinatenebene der xy diese Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten
berührt. Wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, wird dieser Anfangspunkt
der **Scheitel** des elliptischen Paraboloids genannt, welcher also derjenige

§. 48. Punkt der Fläche ist, in welchem sie von ihrer Achse (§. 46) geschnitten wird.

Schneiden wir das elliptische Paraboloid durch irgend eine Ebene, welche der Achsenrichtung parallel ist, und deren Gleichung

$$y = mx + n$$

seyn mag, so erhalten wir, durch Elimination von y,

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2mna^2x + n^2a^2 = \frac{2a^2b^2}{p}z$$

als Gleichung der Projection der Durchschnittscurve. Diese Projection und folglich auch die Durchschnittscurve selbst, als eine ihr affine Curve, ist demnach eine Parabel. Schneiden wir aber das elliptische Paraboloid durch eine Ebene, welche der Achsenrichtung nicht parallel ist, und deren Gleichung

$$z = gy + hx + k$$

seyn mag, so erhalten wir, durch Elimination von z,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{2a^2b^2}{p}(gy + hx + k)$$

als Projection der Durchschnittscurve. Diese Projection und folglich auch die Durchschnittscurve selbst ist demnach eine (reelle oder imaginaire) Ellipse.

Wenn in der Gleichung (1) die Coordinaten rechtwinklig sind und a = b ist, so heißt die Fläche ein Rotationsparaboloid, dessen Gleichung demnach in rechtwinkligen Coordinaten

$$y^2 + x^2 = 2\frac{a^2}{p}z \qquad (3)$$

ist. Jede auf der Achse der Fläche, der Rotationsachse, senkrechte Ebene schneidet das Rotationsparaboloid in einem (reellen oder imaginairen) Kreise.

Wir setzen jetzt auch in der Gleichung (2) nach einander x, y und z gleich Null, wodurch wir

$$py^2 = 2b^2z \;;\; px^2 = -2a^2z \;;\; a^2y^2 - b^2x^2 = 0$$

erhalten. Daraus sehen wir, daß die beiden Coordinatenebenen der yz und der xz das hyperbolische Paraboloid in Parabeln, und daß die Ebene der xy diese Fläche in zwei geraden Linien schneidet. Diese beiden Geraden durchkreuzen sich im Anfangspunkte der Coordinaten, und diesen nennen wir, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind, den Scheitel des hyperbolischen Paraboloids,

welches also derjenige Punkt ist, in welchem die Fläche von ihrer Achse geschnitten wird *). §. 48.

Schneiden wir das hyperbolische Paraboloid durch eine Ebene, welche der Achse parallel ist, und deren Gleichung

$$y = mx + n$$

seyn mag, so erhalten wir, durch Elimination von y,

$$(a^2m^2 - b^2)x^2 + 2mna^2x + n^2a^2 = \frac{2a^2b^2}{p}z$$

als Gleichung einer Projection der Durchschnittscurve. Diese Projection und folglich auch die Durchschnittscurve selbst ist eine Parabel wenn $a^2m^2 - b^2 \gtrless 0$, d. i. wenn $m \lessgtr \frac{b}{a}$, und sie ist eine gerade Linie wenn $m = \pm\frac{b}{a}$. Schneiden wir aber das hyperbolische Paraboloid durch eine Ebene, welche der Achsenrichtung nicht parallel ist, und deren Gleichung

$$z = gy + hx + k$$

seyn mag, so erhalten wir, durch Elimination von z,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = \frac{2a^2b^2}{p}(gy + hx + k)$$

als Gleichung der Projection der Durchschnittscurve. Diese Projection und folglich die Durchschnittscurve selbst ist eine Hyperbel, die in zwei gerade Linien degenerirt wenn $k = \frac{1}{2p}(a^2h^2 - b^2g^2)$, in welchem Falle sich die eben gefundene Gleichung der Projection in zwei Factoren, nämlich in

$$\left\{ay + bx + \frac{ab}{p}(ah - bg)\right\}\left\{ay - bx - \frac{ab}{p}(ah + bg)\right\} = 0$$

zerlegen läßt.

Wenn in der Gleichung (2) die Coordinaten rechtwinklig sind und a = b ist, so nennen wir die Fläche ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid, dessen Gleichung demnach in rechtwinkligen Coordinaten

$$y^2 - x^2 = 2\frac{a^2}{p}z \qquad (4)$$

---

*) Die Auszeichnung dieses Punktes durch eine besondere Benennung ist nicht allgemein eingeführt, und er ist auch in der That nicht der Endpunkt einer größten oder kleinsten Ordinate, wie es die Scheitel aller anderen Flächen zweiten Grades sind, wenn man die Kegelfläche ausschließt; indessen ist er der Durchschnittspunkt einer Achse der Fläche, und kann durch dieselbe geometrische Construction in dem hyperbolischen Paraboloid aufgefunden werden, welche in dem elliptischen Paraboloid den Scheitel giebt.

§. 48. ist. Jede auf der Achse der Fläche senkrechte Ebene schneidet das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel.

Verlegen wir die Ebene der xz und der yz so, daß diese Ebenen in ihrer neuen Lage die Winkel halbiren, welche sie in ihrer ursprünglichen Lage bildeten, indem wir $\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot(x+y)$ für y und $\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot(x-y)$ für x setzen, so verwandelt sich, wenn wir noch $\frac{a^2}{p}$ durch c bezeichnen, die Gleichung (4) in

$$xy = cz \quad , \qquad (5)$$

eine Gleichung, welche das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid wiederum in rechtwinkligen Coordinaten darstellt.

§. 49.

Aufgabe [67]. Eine gegebene Ellipse dreht sich um eine ihrer Achsen; es soll die Gleichung der von der Ellipse erzeugten Fläche gefunden werden.

Es sey

$$a^2z^2 + c^2x^2 = a^2c^2$$

die Gleichung einer, in der Ebene der xz liegende Ellipse in rechtwinkligen Coordinaten. Wird die Ebene dieser Ellipse um die Achse der z gedreht, so beschreibt ein jeder Punkt $x'z'$ derselben offenbar einen Kreis, welcher der Ebene der xy in der Entfernung z' parallel ist, dessen Mittelpunkt in der Achse der z liegt und dessen Radius gleich x' ist. Dieser Kreis ist demnach durch das System der beiden Gleichungen

$$y^2 + x^2 = x'^2 \quad ; \quad z = z'$$

ausgedrückt. Liegt nun der Punkt $x'z'$ in der rotirenden Ellipse, so ist

$$a^2z'^2 + c^2x'^2 = a^2c^2 \quad .$$

Eliminiren wir x' und z' zwischen den eben genannten drei Gleichungen, so kommt

$$a^2z^2 + c^2y^2 + c^2x^2 = a^2c^2$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche demnach ein Rotationsellipsoid oder Sphäroid ist (§. 47). Wenn die Rotationsachse die kleinere Achse der rotirenden Ellipse, d. i. wenn $c < a$ ist, heißt das Sphäroid ein abgeplattetes, wenn sie die größere Achse jener Curve, d. i. wenn $c > a$ ist, ein verlängertes. Die rotirende Ellipse wird die Meridiancurve, und die von den verschiedenen Punkten dieser Ellipse beschriebenen Kreise werden die Parallelkreise der Fläche genannt.

Aufgabe [68]. Zwei gegebene Hyperbeln, in welchen die Hauptachse der einen die Nebenachse der anderen ist und welche dieselben Asymptoten haben, drehen sich sammt diesen Asymptoten um jene Hauptachse. Es sollen die Flächen gefunden werden, welche von diesen Hyperbeln und von den Asymptoten erzeugt werden. §. 49.

Es seyen

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=+1 \quad ; \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1 \quad ; \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$$

respective die Gleichungen der in der Ebene der xz liegenden Hyperbeln und ihrer Asymptoten in rechtwinkligen Coordinaten. Sämmtliche drei Linien zweiten Grades sind durch die eine Gleichung

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\lambda$$

ausgedrückt, wenn wir unter λ der Reihe nach $+1$, -1 und 0 verstehen. Wird die Ebene dieser Linie um die Achse der z gedreht, so beschreibt ein jeder Punkt $x'z'$ derselben einen Kreis, welcher, wie in der vorigen Aufgabe, durch das Gleichungssystem

$$y^2+x^2=x'^2 \quad ; \quad z=z'$$

dargestellt wird. Soll nun der Punkt $x'z'$ ein Punkt der genannten Linien zweiten Grades seyn, so haben wir

$$\frac{z'^2}{c^2}-\frac{x'^2}{a^2}=\lambda \quad ,$$

und wenn wir x' und z' zwischen den eben aufgestellten drei Gleichungen eliminiren

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=\lambda \quad \text{oder} \quad a^2z^2-c^2y^2-c^2x^2=a^2c^2\lambda \quad .$$

Setzen wir wieder λ nach einander gleich $+1$, gleich -1 und gleich Null, so kommen

$$a^2z^2-c^2y^2-c^2x^2=a^2c^2 \;;\; a^2z^2-c^2y^2-c^2x^2=-a^2c^2 \;;\; a^2z^2-c^2y^2-c^2x^2=0$$

als Gleichungen der erzeugten Flächen, welche demnach respective ein elliptisches Rotationshyperboloid, ein hyperbolisches Rotationshyperboloid und ein Rotationskegel sind.

Die rotirenden Hyperbeln werden die Meridiancurven der von ihnen erzeugten Hyperboloiden genannt.

Aufgabe [69]. Auf der Ebene einer gegebenen Ellipse in einer ihrer beiden Achsen ist eine senkrechte Ebene errichtet und in derselben

§. 49. **eine, jener Achse parallele Gerade gezogen. Das System der beiden, mit einander fest verbundenen Ebenen dreht sich um diese Gerade. Es soll die von der Ellipse erzeugte Fläche gefunden werden.**

Wir nehmen die genannte Gerade zur Achse der z, und es sey, bei der ursprünglichen Lage der beiden Ebenen,

$$a^2z^2 + c^2x^2 = a^2c^2 \quad ; \quad y = h$$

das Gleichungssystem, welches die gegebene Ellipse in rechtwinkligen Coordinaten ausdrückt. Wird die Ebene der yz und die mit ihr verbundene Ebene der Ellipse um die Achse der z gedreht, so beschreibt jeder Punkt $x'y'z'$ der Ellipse, dessen Coordinaten die Gleichungen

$$a^2z'^2 + c^2x'^2 = a^2c^2 \quad ; \quad y' = h$$

befriedigen müssen, einen Kreis, dessen Ebene der Ebene der xy in der Entfernung z' parallel ist, dessen Mittelpunkt in der Achse der z liegt und dessen Radius gleich $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ ist. Dieser Kreis ist demnach durch das Gleichungssystem

$$y^2 + x^2 = y'^2 + x'^2 \quad ; \quad z = z'$$

ausgedrückt. Eliminiren wir zwischen den letzten vier Gleichungen x', y' und z', so kommt

$$a^2z^2 + c^2y^2 + c^2x^2 = c^2(a^2 + h^2)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche demnach ein Rotationsellipsoid ist. Die beiden ungleichen Achsen des Sphäroids, welche auch die Achsen der Meridiancurve sind, werden durch

$$2\sqrt{a^2 + h^2} \quad \text{und} \quad 2\frac{c}{a}\sqrt{a^2 + h^2}$$

ausgedrückt. Das Sphäroid ist also ein abgeplattetes oder ein verlängertes je nachdem, absolut genommen, $c < a$ oder $c > a$ ist. Wenn $c = a$, d. i. wenn nicht eine Ellipse sondern ein Kreis die angegebene Drehung macht, so ist die erzeugte Fläche eine Kugel. Wir bemerken, daß das Verhältniß der ungleichen Achsen des Sphäroids $= c : a$, also dasselbe als das Verhältniß der Achsen der erzeugenden Ellipse ist, und daß dieses Verhältniß, da es unabhängig von h, immer dasselbe ist, in welcher Entfernung die Rotationsachse von der erzeugenden Ellipse auch angenommen seyn mag. Hieraus folgt, daß die verschiedenen Sphäroide, welche eine und dieselbe Ellipse, bei der angegebenen Bewegung, in verschiedenen Entfernungen von der Rotationsachse erzeugen kann, alle einander ähnlich sind. Ferner bemerken wir, daß, in Folge der Gleichung $a^2z'^2 + c^2x'^2 = a^2c^2$, für keinen

reellen Punkt der erzeugenden Ellipse $z' > c$ oder $z' < -c$ seyn könne, §. 49.
und daß, da $z = z'$, auch z zwischen den Grenzen $+c$ und $-c$ enthalten seyn müsse. Da nun aber in dem gefundenen Sphäroide der Werth von z zwischen den, weiter von einander entfernten Grenzen $c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}$ und $-c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}$ enthalten ist, so folgt, daß nur derjenige Theil des gefundenen Sphäroids von der Ellipse erzeugt wird, welcher von den beiden Ebenen, deren Gleichungen $z = c$ und $z = -c$ sind, begrenzt wird. Die nicht zwischen diesen Ebenen enthaltenen Abschnitte der Fläche dürften als von imaginairen Punkten der Ellipse erzeugt angesehen werden können.

Uebrigens ist es leicht einzusehen, daß schon die eine Hälfte der Ellipse das Ellipsoid erzeugt und daß diese Fläche von der ganzen Ellipse doppelt erzeugt wird.

Aufgabe [70]. Zwei Hyperbeln, in welchen die Hauptachse der einen die Nebenachse der andern ist, und welche dieselben Asymptoten haben, sind gegeben. Auf ihrer gemeinschaftlichen Ebene, in jener Hauptachse ist eine zweite Ebene senkrecht errichtet, und in dieser eine der genannten Hauptachse parallele Gerade gezogen. Das System der beiden mit einander fest verbundenen Ebenen dreht sich um diese Gerade. Es sollen die, von den beiden Hyperbeln und den Asymptoten erzeugten Flächen gefunden werden.

Wir nehmen die genannte Gerade zur Achse der z; und, bei der ursprünglichen Lage beider Ebenen, sey

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2} = \lambda \quad ; \quad y = h$$

das Gleichungssystem, welches die gegebenen Linien in rechtwinkligen Coordinaten ausdrückt, wenn wir der Reihe nach $\lambda = +1$, $\lambda = -1$ und $\lambda = 0$ setzen. Bezeichnen wir die Coordinaten eines Punktes dieser Linien während der Drehung durch x', y', z', so haben wir, auf ähnliche Weise wie in der vorigen Aufgabe,

$$a^2z'^2 - c^2x'^2 = \lambda a^2c^2 \quad ; \quad y' = h \quad ;$$
$$y^2+x^2 = y'^2+x'^2 \quad ; \quad z = z' \quad ;$$

und durch Elimination von x', y' und z' finden wir

$$a^2z^2 - c^2y^2 - c^2x^2 = c^2(\lambda a^2 - h^2) \quad ,$$

so daß, indem wir dem λ der Reihe nach die angegebenen Werthe beilegen,

§. 49.
$$a^2z^2 - c^2y^2 - c^2x^2 = c^2(a^2 - h^2) \quad ,$$
$$a^2z^2 - c^2y^2 - c^2x^2 = -c^2(a^2 + h^2) \quad ,$$
$$a^2z^2 - c^2y^2 - c^2x^2 = -c^2h^2$$

die Gleichungen der gesuchten Flächen sind. Die erste dieser Flächen ist ein elliptisches oder ein hyperbolisches Rotationshyperboloid oder ein Rotationskegel, je nachdem, absolut genommen, $a > h$, oder $a < h$ oder $a = h$ ist. Die zweite und dritte Fläche ist ein hyperbolisches Rotationshyperboloid. Sämmtliche gefundenen Flächen haben die darunter genannte Kegelfläche zu ihrem Asymptotenkegel. — Wir müssen wieder bemerken, daß die zuerst genannte Hyperbel das elliptische Rotationshyperboloid nicht gänzlich erzeugt; diejenigen Stücke dieser Fläche, welche zwischen den beiden durch die Gleichungen $z = c$ und $z = -c$ ausgedrückten Ebenen liegen, werden nämlich nicht von den reellen Punkten jener Hyperbel erzeugt.

Wir bemerken ferner, daß das hyperbolische Rotationshyperboloid, welches die Asymptoten der rotirenden Hyperbeln erzeugen, gänzlich sowohl von der einen als von der andern dieser Asymptoten beschrieben wird, und daß demnach die obige Erzeugungsart die Fläche auf doppelte Weise hervorbringt; und wir haben zugleich den folgenden Satz: „Ist eine Gerade B mit einer festen Geraden A, die nicht von ihr geschnitten wird, verbunden und dreht sich die Linie B um die Gerade A wie um eine Achse, so beschreibt diese Gerade B ein hyperbolisches Rotationshyperboloid."

Aufgabe [71]. Auf der Ebene einer gegebenen Parabel ist in ihrer Achse eine senkrechte Ebene errichtet und in dieser eine, jener Achse parallele Gerade gezogen. Das System der beiden mit einander verbundenen Ebenen drehet sich um diese Gerade. Es soll die von der Parabel erzeugte Fläche gefunden werden.

Nehmen wir die feste Gerade zur Achse der z und ist, bei der ursprünglichen Lage der beiden Ebenen,
$$x^2 = pz \quad ; \quad y = h$$
das Gleichungssystem der gegebenen Parabel, so haben wir, auf ähnliche Weise wie in den beiden vorigen Aufgaben,
$$x'^2 = pz' \quad ; \quad y' = h \quad ;$$
$$y^2 + x^2 = y'^2 + x'^2 \quad ; \quad z = z' \quad ;$$
und die Elimination von x', y' und z' giebt uns
$$y^2 + x^2 = pz + h^2$$
als die Gleichung der erzeugten Fläche, welche demnach ein Rotationspara-

boloid ist. Derjenige Abschnitt der Fläche, welcher zwischen den beiden, §. 49. durch die Gleichungen $z = 0$ und $z = -\frac{h^2}{p}$ ausgedrückten Ebenen enthalten ist, wird von keinem reellen Punkte der Parabel erzeugt.

§. 50.

Wir haben im vorigen §. gesehen, wie die Gleichung einer Rotationsfläche des zweiten Grades aus der Gleichung der Meridiancurve gefunden werden kann, wenn die Rotationsachse, die immer eine Achse der Meridiancurve ist, als eine der drei Coordinatenachsen gegeben ist. Es kann aber gefragt werden, welches die allgemeine Form der Gleichung derjenigen Fläche sey, die von einer, sich um ihre Achse drehenden Linie zweiten Grades erzeugt wird, wenn diese Achse irgend eine gegebene Lage im Raume hat. Deshalb lösen wir jetzt die folgende

Aufgabe [72]. Ein Scheitel und die Lage der durch ihn gehenden Achse einer bestimmten Linie zweiten Grades ist, in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, gegeben. Es soll die, auf dasselbe Coordinatensystem bezogene Gleichung der Fläche gefunden werden, welche diese Curve beschreibt, wenn sie sich um jene Achse dreht.

Es seyen x', y', z' die gegebenen Coordinaten des Scheitels der in der Aufgabe genannten Meridiancurve, und α, β, γ die gegebenen Winkel, welche die Rotationsachse mit den Coordinatenachsen bildet. Diese Gerade ist nun durch das Gleichungssystem

$$\cos\gamma(x-x') = \cos\alpha(z-z') \quad ; \quad \cos\gamma(y-y') = \cos\beta(z-z')$$

ausgedrückt. Zur Vereinfachung der Rechnung verlegen wir die Coordinatenachsen parallel mit sich selbst und ihren Anfangspunkt in den gegebenen Punkt $x'y'z'$, und dann wird die Rotationsachse durch

$$\cos\gamma x = \cos\alpha z \quad ; \quad \cos\gamma y = \cos\beta z$$

dargestellt. In der Ebene der rotirenden Curve nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem tu an, und zwar machen wir die, in dieser Ebene liegende Rotationsachse, d. i. eine Achse der Curve, zur Achse der t und den gegebenen Punkt $x'y'z'$, also einen Scheitel der Curve, oder, was dasselbe ist, den Anfangspunkt der neuen xyz zum Anfangspunkte der t,u. Während der Drehung beschreibt ein jeder Punkt tu der genannten Ebene einen Kreis, dessen Ebene auf der Rotationsachse senkrecht ist und von dem Anfangspunkte der neuen x y z die Entfernung t hat, dessen Radius aber gleich u ist. Nennen wir die Coordinaten des Mittelpunktes dieses Kreises a, b, c, so haben wir für jeden Punkt seiner Peripherie die beiden Gleichungen

§. 50.
$$(z-c)^2+(y-b)^2+(x-a)^2 = u^2 \quad , \qquad (1)$$
$$\cos\gamma\, z+\cos\beta\, y+\cos\alpha\, x = t \quad , \qquad (2)$$
von welchen die letzte, für sich allein betrachtet, die Kreisebene ausdrückt; und für die Coordinaten des Mittelpunktes haben wir zugleich
$$c = \cos\gamma\, t \;\; ; \;\; b = \cos\beta\, t \;\; ; \;\; a = \cos\alpha\, t \;\; ; \qquad (3)$$
neben welchen Gleichungen noch die Gleichung
$$\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\alpha = 1 \qquad (4)$$
Statt findet. Welches nun auch die Meridiancurve seyn mag, so ist sie, da ihr Scheitel im Anfangspunkte der tu und ihre Achse in der Achse der t liegt, immer durch die Gleichung
$$u^2 = mt^2+pt \qquad (5)$$
auszudrücken; und wenn wir nun die fünf Größen a, b, c, t und u zwischen den sechs Gleichungen (1), (2), (3) und (5) eliminiren, dabei aber die Gleichung (4) berücksichtigen; so erhalten wir, indem wir, um ein wenig abzukürzen, $-n$ statt $1+m$ setzen,
$$z^2+y^2+x^2+n(\cos\gamma z+\cos\beta y+\cos\alpha x)^2+p(\cos\gamma z+\cos\beta y+\cos\alpha x) = 0$$
als die Gleichung der erzeugten Fläche in den neuen Coordinaten ausgedrückt. Verlegen wir den Anfangspunkt wieder in seine ursprüngliche Lage, so erhalten wir als die gesuchte Gleichung
$$\left.\begin{array}{l}(z-z')^2+(y-y')^2+(x-x')^2 \\ +n\left\{\cos\gamma(z-z')+\cos\beta(y-y')+\cos\alpha(x-x')\right\}^2 \\ +p\left\{\cos\gamma(z-z')+\cos\beta(y-y')+\cos\alpha(x-x')\right\}\end{array}\right\} = 0 \;, \qquad (6)$$
woneben noch die Gleichung
$$\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\alpha = 1 \qquad (7)$$
bestehet.

Das gefundene Resultat setzt uns in den Stand, die Bedingungen zu finden, unter welchen die allgemeine Gleichung des zweiten Grades
$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \;, \qquad (8)$$
wenn sie sich auf rechtwinklige Coordinaten bezieht, eine Rotationsfläche ausdrückt. Soll nämlich diese Gleichung eine Rotationsfläche darstellen, so muß sie mit der Gleichung (6), nachdem diese mit einem constanten Factor λ multiplicirt ist, identisch werden können. Dies giebt uns zehn Gleichungen, von welchen nur die letzten vier die Größen x', y', z' und p enthalten. Die ersten sechs Gleichungen, welche diese Größen nicht enthalten, sind

λ

§. 50.

$$\left.\begin{array}{lcl} \lambda + \lambda n \cos^2\gamma = a & ; & \lambda n \cos\alpha\cos\beta = a' \; , \\ \lambda + \lambda n \cos^2\beta = b & ; & \lambda n \cos\alpha\cos\gamma = b' \; , \\ \lambda + \lambda n \cos^2\alpha = c & ; & \lambda n \cos\beta\cos\gamma = c' \; . \end{array}\right\} \quad (9)$$

Die Gleichungen der zweiten Columne geben uns

$$\cos^2\gamma = \frac{b'c'}{\lambda n a'} \quad ; \quad \cos^2\beta = \frac{a'c'}{\lambda n b'} \quad ; \quad \cos^2\alpha = \frac{a'b'}{\lambda n c'} \; ; \quad (10)$$

und setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen der ersten Columne, so kommt

$$\lambda + \frac{b'c'}{a'} = a \quad ; \quad \lambda + \frac{a'c'}{b'} = b \quad ; \quad \lambda + \frac{a'b'}{c'} = c \quad .$$

Durch Elimination von λ finden wir

$$a'b'(a-b) = c'(b'^2-a'^2) \; ; \; a'c'(a-c) = b'(c'^2-a'^2) \; ; \; b'c'(b-c) = a'(c'^2-b'^2), \quad (11)$$

drei Gleichungen, von welchen jede eine Folge der beiden übrigen ist. Zwei dieser Gleichungen drücken daher die Bedingung aus, unter welcher die Gleichung (8) eine Rotationsfläche ist, und wenn sie befriedigt werden, ergiebt sich die Richtung der Rotationsachse aus den Gleichungen (10). Setzen wir nämlich die Ausdrücke (10) in die Gleichung (7), so erhalten wir

$$\lambda n = a'b'c' \left\{\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}\right\} \; ,$$

und demnach ist

$$\left.\begin{array}{l} \cos\gamma = \dfrac{\frac{1}{a'}}{\sqrt{\left[\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}\right]}} \; ; \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{\frac{1}{b'}}{\sqrt{\left[\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}\right]}} \; ; \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{c'}}{\sqrt{\left[\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}\right]}} \; . \end{array}\right. \quad (12)$$

In Hinsicht der Bedingungsgleichungen (11) haben wir noch Folgendes zu bemerken.

Erstens. Wenn in der Gleichung (8) nur eins von den Gliedern fehlt, welche die Producte xy, xz, yz enthalten, kann diese Gleichung keine

§. 50. Rotationsfläche darstellen. Denn wenn z. B. $a' = 0$ ist, reduciren sich die beiden ersten Gleichungen (11) auf $c'b'^2 = 0$ und $b'c'^2 = 0$ und werden nicht befriedigt wenn nicht auch eine der Größen b', c' gleich Null ist.

Zweitens. Wenn in der Gleichung (8) zwei von den genannten Gliedern fehlen, werden zwar die Gleichungen (11) anscheinend befriedigt, indessen drückt die Gleichung (8), wenn sie nur eins von den genannten drei Gliedern enthält, keinesweges immer eine Rotationsfläche aus, sondern es muß dann noch eine Bedingungsgleichung erfüllt werden, wenn jene Gleichung eine Rotationsfläche darstellen soll. Multipliciren wir die einzelnen Theile von je zwei der Gleichungen (11) in einander, so kommt

$$(a-b)(a-c) = a'^2 - b'^2 - c'^2 + \frac{b'^2c'^2}{a'^2} ,$$

$$(b-a)(b-c) = b'^2 - a'^2 - c'^2 + \frac{a'^2c'^2}{b'^2} ,$$

$$(c-a)(c-b) = c'^2 - a'^2 - b'^2 + \frac{a'^2b'^2}{c'^2} .$$

Setzen wir hierin je zwei von den drei Größen a', b', c' gleich Null, so finden wir, daß

$$\left.\begin{array}{l} \text{wenn } a' = 0 \text{ und } b' = 0, \text{ zugleich auch } (c-a)(c-b) = c'^2 , \\ \text{wenn } a' = 0 \text{ und } c' = 0, \text{ zugleich auch } (b-a)(b-c) = b'^2 , \\ \text{wenn } b' = 0 \text{ und } c' = 0, \text{ zugleich auch } (a-b)(a-c) = a'^2 \end{array}\right\} (13)$$

seyn müsse, damit die Gleichung (8) eine Rotationsfläche ausdrücken kann.

Wir sehen, daß die Ausdrücke (12) in den eben in Rede stehenden Fällen eine unbestimmte Form annehmen; deshalb gehen wir wieder zu den Gleichungen (9) zurück, und finden aus ihnen, mit Hülfe der Gleichung (7),

wenn $a' = b' = 0$:

$$\cos\alpha = 0 \;;\; \lambda = c \;;\; \cos^2\beta = \frac{b-c}{a-2c+b} \;;\; \cos^2\gamma = \frac{a-c}{a-2c+b} \;;$$

wenn $a' = c' = 0$:

$$\cos\beta = 0 \;;\; \lambda = b \;;\; \cos^2\alpha = \frac{c-b}{a-2b+c} \;;\; \cos^2\gamma = \frac{a-b}{a-2b+c} \;;$$

wenn $b' = c' = 0$:

$$\cos\gamma = 0 \;;\; \lambda = a \;;\; \cos^2\alpha = \frac{c-a}{b-2a+c} \;;\; \cos^2\beta = \frac{b-a}{b-2a+c} .$$

Hieraus sehen wir, daß, in den in Rede stehenden Fällen, die Rotationsachse in einer der Coordinatenebenen liegt.

Drittens. Wenn in der Gleichung (8) die drei genannten Glieder

fehlen, wenn also $a' = b' = c' = 0$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (9), daß dann zwei von den Größen a, b, c einander gleich seyn müssen, falls die Gleichung (8) eine Rotationsfläche ausdrücken soll. Wird diese Bedingung erfüllt, so sind zwei von den Winkeln α, β, γ rechte Winkel und der dritte ist gleich Null, d. i. die Rotationsachse ist dann einer der Coordinatenachsen parallel. §. 50.

§. 51.

Es sey

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \qquad (1)$$

die Gleichung eines Ellipsoids in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Von den drei Achsen dieser Fläche sey 2a die größte und 2c die kleinste, so daß also $a > b > c$ sey.

Legen wir durch die Fläche (1) zwei Ebenen, deren Gleichungen respective

$$a\sqrt{b^2 - c^2} \cdot z - c\sqrt{a^2 - b^2} \cdot x = 0 \qquad (2)$$

$$a\sqrt{b^2 - c^2} \cdot z + c\sqrt{a^2 - b^2} \cdot x = 0 \qquad (2')$$

sind, so schneidet eine jede derselben die Fläche (1) in einem Kreise. Denn diese Ebenen enthalten die Achse der y; die Achse 2b des Ellipsoids ist also ein Durchmesser der Durchschnittscurve; ferner enthalten diese Ebenen respective die Geraden, deren Gleichungen

$$\left\{ a\sqrt{b^2 - c^2} \cdot z - c\sqrt{a^2 - b^2} \cdot x = 0 \quad ; \quad y = 0 \right\} \qquad (3)$$

$$\left\{ a\sqrt{b^2 - c^2} \cdot z + c\sqrt{a^2 - b^2} \cdot x = 0 \quad ; \quad y = 0 \right\} \qquad (3')$$

sind, und diese Geraden schneiden das Ellipsoid in den Punkten $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$, $x'_1y'_1z'_1$ und $x'_2y'_2z'_2$, deren Coordinaten, wie wir durch die Elimination finden,

$$\left(\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \; ; \; y_1 = 0 \; ; \; z_1 = \dfrac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \\ x_2 = -\dfrac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \; ; \; y_2 = 0 \; ; \; z_2 = -\dfrac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} x'_1 = -\dfrac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \; ; \; y'_1 = 0 \; ; \; z'_1 = \dfrac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \\ x'_2 = \dfrac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \; , \; y'_2 = 0 \; ; \; z'_2 = -\dfrac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \end{array} \right)$$

sind. Setzen wir diese Werthe in die Ausdrücke

§. 51. $(z_1-z_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2$ und $(z'_1-z'_2)^2+(y'_1-y'_2)^2+(x'_1-x'_2)^2$, so ergiebt sich, daß die Entfernung der Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$, so wie diejenige der Punkte $x'_1y'_1z'_1$ und $x'_2y'_2z'_2$ gleich $2b$ ist. Die Gerade (3) ist aber offenbar der conjugirte Durchmesser des vorher genannten in der ersten Durchschnittscurve, auf welchem er senkrecht steht, und eben so verhält es sich mit der Geraden (3') in der zweiten Durchschnittscurve. Da nun also die genannten Durchmesser auf einander senkrecht und gleich sind, so sind beide Durchschnittscurven Kreise.

Wir können uns auch auf folgende einfache Weise von der Richtigkeit unserer Behauptung überzeugen. Die Gleichung der Kugelfläche, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Ellipsoids coincidirt, und deren Radius gleich b, ist

$$z^2+y^2+x^2=b^2 \quad .$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit a^2c^2 und subtrahiren das Product von der Gleichung (1), so kommt

$$a^2(b^2-c^2)z^2-c^2(a^2-b^2)x^2=0 \quad ;$$

und diese Gleichung zerfällt in zwei Factoren, nämlich in

$$\left\{a\sqrt{b^2-c^2}\cdot z-c\sqrt{a^2-b^2}\cdot x\right\}\left\{a\sqrt{b^2-c^2}\cdot z+c\sqrt{a^2-b^2}\cdot x\right\}=0 \quad ;$$

sie drückt demnach das System von zwei Ebenen aus, welche die Durchschnittscurven der Kugel und des Ellipsoids enthalten. Diese Ebenen sind die oben genannten (2) und (2'), und diese schneiden also das Ellipsoid in denselben Curven, in welchen sie die Kugel schneiden, d. i. in zwei Kreisen.

Legen wir den Ebenen (2) und (2') parallele Ebenen, so schneiden diese die Fläche (1) gleichfalls in Kreisen; weil parallele Ebenen eine Fläche zweiten Grades in ähnlichen Curven schneiden (§. 44). Der Ort der Mittelpunkte aller dieser Kreise bestehet aus zwei Geraden, zwei Durchmessern der Fläche, deren Gleichungen

$$\left\{ a\sqrt{a^2-b^2}\cdot z+c\sqrt{b^2-c^2}\cdot x=0 \quad ; \quad y=0 \right\}$$
$$\left\{ a\sqrt{a^2-b^2}\cdot z-c\sqrt{b^2-c^2}\cdot x=0 \quad ; \quad y=0 \right\}$$

sind. Diese Geraden schneiden das Ellipsoid in vier Punkten, deren Coordinaten folgende Werthe haben

$$x_I=\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \quad ; \quad y_I=0 \quad ; \quad z_I=-\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \quad ,$$

$$x_{II}=-\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \quad ; \quad y_{II}=0 \quad ; \quad z_{II}=\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \quad ,$$

$$x'_{I} = -\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \;;\; y'_{I} = 0 \;;\; z'_{I} = -\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \,,$$

§. 51.

$$x'_{II} = \frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \;;\; y'_{II} = 0 \;;\; z'_{II} = \frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \,.$$

Das Resultat der gegenwärtigen Untersuchung ist, daß es in jedem Ellipsoid, im Allgemeinen, zwei Systeme paralleler Ebenen giebt, welche die Fläche in Kreisen schneiden, und daß sich darunter vier Ebenen befinden, welche sie in den zuletzt angegebenen vier Punkten berühren. Diese Punkte sind als Kreise zu betrachten, deren Radius gleich Null ist, und wir nennen sie daher die vier Kreispunkte des Ellipsoids. Diese vier Punkte liegen immer in der Ebene der größten und kleinsten Achse.

Wenn zwei Achsen des Ellipsoids einander gleich sind, wenn also $a = b$ oder wenn $b = c$ ist, fallen die beiden Ebenen (2) und (2′) in eine einzige zusammen. Alsdann ist die Fläche ein Rotationsellipsoid; es giebt in diesem nur ein System paralleler Ebenen, welche die Fläche in Kreisen schneiden, und statt der vier Kreispunkte existiren nur zwei, welche mit den Scheiteln der dritten Achse zusammenfallen.

Wenn alle drei Achsen des Ellipsoids einander gleich sind, wenn also $a = b = c$ ist, werden die beiden Gleichungen (2) und (2′) unbestimmt. Alsdann ist die Fläche eine Kugel, welche von jeder Ebene in einem Kreise geschnitten wird und auf welcher jeder Punkt ein Kreispunkt ist.

Die Gleichung

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = \lambda a^2b^2c^2 \qquad (4)$$

drückt, wie wir in §. 47 gesehen haben, ein elliptisches Hyperboloid, ein hyperbolisches Hyperboloid oder eine Kegelfläche aus, je nachdem $\lambda = +1$, $\lambda = -1$ oder $\lambda = 0$ ist. Wir nehmen an, daß die Coordinaten rechtwinklig sind, und daß von den beiden Größen a, b, welche wenn $\lambda = +1$ die beiden imaginairen Achsen des elliptischen Hyperboloids, wenn $\lambda = -1$ die beiden reellen Achsen des hyperbolischen Hyperboloids messen, a die größere, also immer, absolut genommen, $a > b$ sey.

Schneiden wir die Fläche (4) durch eine Ebene, welche einer oder der anderen der beiden, durch die Gleichungen

$$b\sqrt{a^2+c^2}\cdot z - c\sqrt{a^2-b^2}\cdot y = 0 \qquad (5)$$

$$b\sqrt{a^2+c^2}\cdot z + c\sqrt{a^2-b^2}\cdot y = 0 \qquad (5')$$

§. 51. ausgedrückten Ebenen parallel ist, so findet sich, daß die Durchschnittscurve eine Kreislinie ist. Der Ort der Mittelpunkte aller dieser Kreise besteht aus zwei Geraden, zwei Durchmessern der Fläche, deren Gleichungen

$$\left\{ b\sqrt{a^2-b^2}\cdot z - c\sqrt{a^2+c^2}\cdot y = 0 \quad ; \quad x = 0 \right\}$$
$$\left\{ b\sqrt{a^2-b^2}\cdot z + c\sqrt{a^2+c^2}\cdot y = 0 \quad ; \quad x = 0 \right\}$$

sind. Suchen wir die Durchschnittspunkte dieser Geraden und der Fläche (4), so ergeben sich für die Coordinaten derselben folgende Ausdrücke:

$$x_I = 0 \;;\; y_I = \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{\lambda} \;;\; z_I = \frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{\lambda} \;;$$
$$x_{II} = 0 \;;\; y_{II} = -\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{\lambda} \;;\; z_{II} = -\frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{\lambda} \;;$$
$$x'_I = 0 \;;\; y'_I = \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{\lambda} \;;\; z'_I = -\frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{\lambda} \;;$$
$$x'_{II} = 0 \;;\; y'_{II} = -\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{\lambda} \;;\; z'_{II} = \frac{c\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot\sqrt{\lambda} \,.$$

Wenn $\lambda = +1$, sind alle diese Ausdrücke reell; wenn $\lambda = -1$, sind sie sämmtlich imaginair; und wenn $\lambda = 0$, verschwinden sie sämmtlich. Die in Rede stehenden Durchschnittspunkte nennen wir die **Kreispunkte** der Fläche (4); und aus dem eben Gezeigten ergiebt sich, daß das elliptische Hyperboloid, die Kegelfläche zweiten Grades und das hyperbolische Hyperboloid von zwei Systemen paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten wird; daß die erste dieser Flächen, das elliptische Hyperboloid, vier Kreispunkte hat, daß die zweite nur einen Kreispunkt hat, welcher der Mittelpunkt (Scheitel) der Kegelfläche ist, und daß der dritten Fläche, dem hyperbolischen Hyperboloid, kein Kreispunkt zukommt.

Wenn $a = b$ ist, wenn also die Fläche (4) eine Rotationsfläche ist, fallen die Ebenen (5) und (5′) beide mit der Ebene der xy zusammen, und es existirt dann nur ein System paralleler Ebenen, welche die Fläche in Kreisen schneiden. Statt der vier Kreispunkte des elliptischen Hyperboloids existiren alsdann nur zwei, welche mit den Scheiteln dieser Fläche zusammen fallen.

Da jeder Kegel zweiten Grades in einem Kreise geschnitten werden kann, nennt man diesen zuweilen auch Kreiskegel, und zwar wenn er kein Rotationskegel ist, einen **schiefen Kreiskegel**.

Schneiden wir ein elliptisches Paraboloid, dessen Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten §. 51.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{2a^2b^2}{p}z \qquad (6)$$

sey, und bei welcher wir voraussetzen, daß $a > b$ ist, durch eine Ebene, welche einer oder der anderen der beiden, durch die Gleichungen

$$bz - \sqrt{a^2-b^2}\cdot y = 0 \quad (7) \quad ; \quad bz + \sqrt{a^2-b^2}\cdot y = 0 \quad (7')$$

ausgedrückten Ebenen parallel ist, so findet sich, daß die Durchschnittscurve eine Kreislinie ist. Der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise besteht aus zwei Geraden, zwei Durchmessern der Fläche, deren Gleichungen

$$\begin{Bmatrix} py = b\sqrt{a^2-b^2} & ; & x = 0 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} py = -b\sqrt{a^2-b^2} & ; & x = 0 \end{Bmatrix}$$

sind. Suchen wir die Durchschnittspunkte dieser Geraden und der Fläche (6), welche wir die **Kreispunkte** der Fläche nennen, so ergeben sich für die Coordinaten derselben folgende Ausdrücke

$$x_I = 0 \quad ; \quad y_I = \frac{b}{p}\sqrt{2(a^2-b^2)} \quad ; \quad z_I = \frac{a^2-b^2}{2p} \quad ;$$
$$x'_I = 0 \quad ; \quad y'_I = -\frac{b}{p}\sqrt{2(a^2-b^2)} \quad ; \quad z'_I = \frac{a^2-b^2}{2p} \quad .$$

Das elliptische Paraboloid wird also von zwei Systemen paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten, und diese Fläche hat zwei Kreispunkte.

Wenn $a = b$ ist, wenn also die Fläche (6) ein Rotationsparaboloid ist, so fallen die beiden Ebenen (7) und (7') mit der Ebene der xy zusammen; alsdann giebt es nur **ein** System paralleler Ebenen, welche die Fläche in Kreisen schneidet, und statt zwei Kreispunkte existirt nur ein solcher Punkt, welcher der Scheitel des Paraboloids ist.

§. 52.

Aufgabe [73]. Ein Punkt und eine Ebene sind gegeben; es soll der Ort desjenigen Punktes gefunden werden, dessen Entfernungen von jenem Punkte und von dieser Ebene in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Wir nehmen den gegebenen Punkt zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten und es sey, in Beziehung auf ein solches Coordinatensystem,

$$az + by + cx + 1 = 0$$

§. 52. die Gleichung der gegebenen Ebene; ferner drücke $1 : n$ das gegebene Verhältniß aus. Die Entfernung eines Punktes xyz vom Anfangspunkte der Coordinaten ist, nach §. 2, $\sqrt{z^2+y^2+x^2}$, und diejenige von der gegebenen Ebene, zufolge §. 11 (S. 4), $\frac{az+by+cx+1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Daher ist, der Bedingung der Aufgabe gemäß,

$$n\sqrt{z^2+y^2+x^2} = \frac{az+by+cx+1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad ,$$

oder, wenn wir quadriren und den Nenner fortschaffen;

$$n^2(a^2+b^2+c^2)(z^2+y^2+x^2) = (az+by+cx+1)^2 \quad , \quad (1)$$

oder auch

$$\left.\begin{matrix}[n^2(a^2+b^2+c^2)-a^2]z^2+[n^2(a^2+b^2+c^2)-b^2]y^2+[n^2(a^2+b^2+c^2)-c^2]x^2 \\ -2abyz-2acxz-2bcxy-2az-2by-2cx-1\end{matrix}\right\} = 0 \quad (2)$$

die Gleichung des gesuchten Ortes, welcher demnach eine Fläche des zweiten Grades ist.

Nehmen wir die Coordinatenachsen so an, daß die Ebene der xy der gegebenen Ebene parallel, und diese letztere daher durch die Gleichung

$$z+q = 0$$

ausgedrückt ist; so finden wir statt der Gleichungen (1) oder (2),

$$n^2(z^2+y^2+x^2) = (z+q)^2 \quad , \quad (3)$$

oder

$$(n^2-1)z^2+n^2(y^2+x^2)-2qz-q^2 = 0 \quad . \quad (4)$$

Die Fläche ist also, wie wir jetzt erkennen, eine Rotationsfläche, deren Achse mit der jetzigen Achse der z coincidirt, und zwar, je nachdem $n<1$, $n>1$ oder $n=1$, ein elliptisches Hyperboloid, ein verlängertes Sphäroid oder ein elliptisches Paraboloid. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein Brennpunkt der Meridiancurve der Fläche, und dieser Punkt heißt **Brennpunkt der Rotationsfläche.**

Das Rotationsparaboloid hat nur diesen einen Brennpunkt; hingegen haben das elliptische Rotationshyperboloid und das verlängerte Sphäroid zwei Brennpunkte, welche in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkte dieser Flächen liegen. — Es leuchtet von selbst ein, daß bei dem elliptischen Rotationshyperboloide die Differenz, und bei dem verlängerten Sphäroide die Summe der beiden Leitstrahlen, welche von den beiden Brennpunkten nach einem Punkte der Fläche gezogen werden, eine **constante** Größe, und zwar der Hauptachse oder der größeren Achse der Meridiancurve gleich sey.

Wenn $q = 0$ und $n < 1$, wenn also der gegebene Punkt in der gegebenen Ebene liegt, reducirt sich die Gleichung (4) auf §. 52.

$$n^2(y^2 + x^2) = (1 - n^2)z^2 \quad ,$$

und der in Rede stehende Ort ist alsdann ein Rotationskegel.

Alle diese Resultate hätten leicht vorhergesehen werden können.

Führen wir in die Gleichung (3) den Radius vector $u = \sqrt{z^2 + y^2 + x^2}$ ein, so kommt

$$nu = \pm (z + q) \quad , \qquad (5)$$

eine Gleichung, die wir unmittelbar aus der Bedingung der Aufgabe hätten aufstellen können, und welche besonders deshalb bemerkenswerth ist, weil sie den Radius vector eines verlängerten Sphäroids, eines elliptischen Rotationshyperboloids oder eines Rotationsparaboloids als eine lineare Function der Abscisse z darstellt.

Aufgabe [74]. Ein Punkt und eine Gerade sind gegeben; es soll der Ort desjenigen Punktes gefunden werden, dessen Entfernungen von jenem Punkte und von dieser Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Wir nehmen den gegebenen Punkt zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten, und es seyen, in Beziehung auf ein solches Coordinatensystem,

$$c(x - \alpha) = a(z - \gamma) \quad ; \quad c(y - \beta) = b(z - \gamma)$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden. Wir finden nun aus der Bedingung der Aufgabe, und zufolge des §. 2 und §. 9,

$$n\sqrt{z^2+y^2+x^2} = \frac{\sqrt{[a(z-\gamma)-c(x-\alpha)]^2+[b(z-\gamma)-c(y-\beta)]^2+[a(y-\beta)-b(x-\alpha)]^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \, ,$$

oder, wenn wir rational machen,

$$n^2(a^2+b^2+c^2)(z^2+y^2+x^2) = [a(z-\gamma) - c(x-\alpha)]^2 + [b(z-\gamma) - c(y-\beta)]^2 + [a(y-\beta) - b(x-\alpha)]^2$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher demnach eine Fläche zweiten Grades ist.

Nehmen wir die, durch den Anfangspunkt gehende und der gegebenen Geraden parallele Linie zur Achse der x, und lassen die Achse der z jene gegebene Gerade schneiden, so daß also die Gleichungen dieser Geraden

$$z + q = 0 \quad ; \quad y = 0$$

sind; so finden wir statt der erhaltenen Gleichung, oder aus dieser, indem wir darin $b = c = 0$, $\alpha = \beta = 0$ und $\gamma = -q$ setzen,

$$n^2(z^2 + y^2 + x^2) = (z + q)^2 + y^2 \quad ,$$

§. 52. oder, was dasselbe ist,

$$(n^2-1)(z^2+y^2)+n^2x^2-2qz-q^2=0 \quad . \qquad (6)$$

Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach demjenigen Punkte der Achse der z, dessen Abscisse $\frac{q}{n^2-1}$ ist, indem wir $z+\frac{q}{n^2-1}$ für z sezzen, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$(n^2-1)(z^2+y^2)+n^2x^2-\frac{n^2}{n^2-1}q^2=0 \quad . \qquad (7)$$

Der gesuchte Ort ist also, im Allgemeinen, eine Rotationsfläche zweiten Grades, deren Achse der gegebenen Geraden parallel ist, und welche von dem gegebenen Punkte die Entfernung $\frac{q}{n^2-1}$, also von der gegebenen Geraden die Entfernung $\frac{n^2q}{n^2-1}$ hat. Die Hauptdurchschnitte dieser Fläche sind durch die Gleichungen

$$(n^2-1)^2(z^2+y^2) = n^2q^2$$
$$(n^2-1)^2z^2+n^2(n^2-1)x^2 = n^2q^2$$
$$(n^2-1)^2y^2+n^2(n^2-1)x^2 = n^2q^2$$

ausgedrückt; und diese Fläche ist daher wenn $n<1$ ein hyperbolisches Hyperboloid, und wenn $n>1$ ein Sphäroid und zwar ein abgeplattetes, da alsdann $(n^2-1)^2 < n^2(n^2-1)$ und die Achse der x die Rotationsachse ist. — Wenn aber $n=1$ ist, kann die zuletzt angegebene Transformation nicht vollzogen werden; die Gleichung (6) reducirt sich dann von selbst auf

$$n^2x^2 = 2qz+q^2 \qquad (8)$$

und drückt keine Rotationsfläche sondern einen parabolischen Cylinder aus.

Aufgabe [75]. *Es sind zwei, nicht in einer Ebene liegende Gerade gegeben; man soll den Ort desjenigen Punktes finden, dessen Entfernungen von diesen beiden Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen.*

Wir nehmen diejenige Gerade, welche die beiden gegebenen rechtwinklig schneidet, zur Achse der z, den Halbirungspunkt der Entfernung jener Linien nehmen wir zum Anfangspunkte, durch welchen wir zwei Gerade den gegebenen parallel ziehen; wir halbiren durch zwei neue Gerade die Winkel dieser eben gezogenen; diese beiden neuen Geraden, welche offenbar sowohl auf einander als auf der Achse der z senkrecht stehen, nehmen wir zu Achsen der x

und der y. In Beziehung auf dieses Coordinatensystem sind die beiden §. 52. gegebenen Geraden durch die Gleichungssysteme

$$\left| \begin{array}{lll} z = q & ; & \cos\alpha\, y - \sin\alpha\, x = 0 \end{array} \right|$$
$$\left| \begin{array}{lll} z = -q & ; & \cos\alpha\, y + \sin\alpha\, x = 0 \end{array} \right|$$

darzustellen, und dann haben wir für die Perpendikel, welche von einem Punkte xyz auf diese Geraden gefällt werden, zufolge §. 9, die Ausdrücke

$$\sqrt{\left\{\cos^2\alpha(z-q)^2 + \sin^2\alpha(z-q)^2 + (\cos\alpha\, y - \sin\alpha\, x)^2\right\}} \quad ,$$
$$\sqrt{\left\{\cos^2\alpha(z+q)^2 + \sin^2\alpha(z+q)^2 + (\cos\alpha\, y + \sin\alpha\, x)^2\right\}} \quad .$$

Daher erhalten wir, wenn $1 : n$ das gegebene Verhältniß ist, in Folge der Bedingung der Aufgabe,

$$n^2(z-q)^2 + n^2(\cos\alpha\, y - \sin\alpha\, x)^2 = (z+q)^2 + (\cos\alpha\, y + \sin\alpha\, x)^2$$

oder, was dasselbe ist,

$$z^2 + \cos^2\alpha\, y^2 + \sin^2\alpha\, x^2 + 2\frac{1+n^2}{1-n^2}\cos\alpha\sin\alpha\, xy + 2\frac{1+n^2}{1-n^2}qz + q^2 = 0 \quad (9)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Dieser Ort ist also, wenn $n \gtrless 1$, ein hyperbolisches Hyperboloid. Wenn aber $n = 1$ ist, reducirt sich die Gleichung (9) von selbst auf

$$\cos\alpha\sin\alpha \cdot xy + q \cdot z = 0 \quad , \qquad (10)$$

und der gesuchte Ort ist alsdann ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid; denn wenn wir die rechten Winkel, welche die Achse der y mit der Achse der x bildet, durch zwei Gerade halbiren, diese Linien zu neuen Coordinatenachsen nehmen, also $\sqrt{\tfrac{1}{2}}(x+y)$ und $\sqrt{\tfrac{1}{2}}(x-y)$ respective für y und x setzen, so verwandelt sich die Gleichung (10) in

$$y^2 - x^2 = \frac{q}{\sin 2\alpha} \cdot z \quad , \qquad (11)$$

eine Gleichung, welche mit der Gleichung (4) im §. 48 dieselbe Form hat.

§. 53.

Aufgabe [76]. Es ist eine Anzahl Ebenen gegeben. Eine gerade Linie bewegt sich einer gegebenen Richtung parallel, und auf derselben bewegt sich ein Punkt P so, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Durchschnittspunkten der Geraden und der gegebenen Ebenen eine gegebene constante Größe q^2 sey. Es soll der Ort des Punktes P gefunden werden.

§. 53. Wir nehmen die Achse der z der gegebenen Richtung parallel und die Coordinaten rechtwinklig. Die Gleichungen der gegebenen Ebenen seyen

$$z = m_1 y + n_1 x + p_1 \quad ; \quad z = m_2 y + n_2 x + p_2 \quad ;$$
$$z = m_3 y + n_3 x + p_3 \quad ; \quad z = m_4 y + n_4 x + p_4 \quad .$$

Da die sich bewegende Gerade der Achse der z parallel ist, so haben ihre Durchschnittspunkte mit den gegebenen Ebenen dieselben Abscissen x und y als der auf dieser Geraden befindliche Punkt P. Bezeichnen wir die Ordinaten des Punktes P, und der eben genannten Durchschnittspunkte respective durch z, z_1, z_2, z_3, z_4, so ist die gegebene Summe der Quadrate der genannten Entfernungen

$$q^2 = (z - z_1)^2 + (z - z_2)^2 + (z - z_3)^2 + (z - z_4)^2 .$$

Es ist aber auch, in Folge der Gleichungen der gegebenen Ebenen,

$$z_1 = m_1 y + n_1 x + p_1 \quad ; \quad z_2 = m_2 y + n_2 x + p_2 \; ;$$
$$z_3 = m_3 y + n_3 x + p_3 \quad ; \quad z_4 = m_4 y + n_4 x + p_4 \; ;$$

und wenn wir diese Ausdrücke in die vorige Gleichung substituiren und, der Kürze wegen,

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = A \; ; \; n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = B \; ; \; p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = K$$
$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 + m_4 n_4 = C \; ; \; n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = -D \; ; \; m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = -E$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = -F \; ; \; m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + m_4 p_4 = G \; ; \; n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4 = H$$

setzen, so ergiebt sich

$$4z^2 + Ay^2 + Bx^2 + 2Cxy + 2Dxz + 2Eyz + 2Fz + 2Gy + 2Hx + K - q^2 = 0$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher demnach eine Fläche vom zweiten Grade ist.

Obgleich wir nur vier gegebene Ebenen in der Rechnung angenommen haben, so ist doch leicht zu übersehen, daß die Form des Resultats für eine größere Anzahl gegebener Ebenen dieselbe ist.

Aufgabe [77]. Eine gerade Linie bewegt sich dergestalt, daß drei gegebene Punkte derselben, die wir durch A, B, C bezeichnen, respective auf drei gegebenen, sich in einem Punkte schneidenden Ebenen bleiben. Es soll der Ort eines vierten gegebenen Punktes P derselben Geraden gefunden werden.

Es seyen die constanten Entfernungen AP, BP, CP respective gleich a, b, c. Wir nehmen die drei gegebenen Ebenen zu Coordinatenebenen, bezeichnen die veränderlichen Coordinaten des Punktes P durch x, y, z, und die laufenden Coordinaten der beweglichen geraden Linie durch t, u, v.

Diese Gerade kann alsdann durch die Gleichungen

§. 53.

$$t-x = m(v-z) \quad ; \quad u-y = n(v-z)$$

ausgedrückt werden, aus welchen

$$n(t-x) = m(u-y)$$

folgt. Ist nun für den Durchschnittspunkt dieser selbigen Geraden

mit der Ebene der xy , $t = x_1$; $u = y_1$; $v = 0$,
mit der Ebene der xz , $t = x_2$; $u = 0$; $v = z_2$,
mit der Ebene der yz , $t = 0$; $u = y_3$; $v = z_3$,

so haben wir, da die Coordinaten dieser Durchschnittspunkte die Gleichungen der Geraden befriedigen müssen,

$$x_1 - x = -mz \quad ; \quad x_2 - x = -\frac{m}{n}y \quad ; \quad y_3 - y = -\frac{n}{m}x \quad ;$$

$$y_1 - y = -nz \quad ; \quad z_2 - z = -\frac{1}{n}y \quad ; \quad z_3 - z = -\frac{1}{m}x \quad .$$

Ferner ist, zufolge der Bedingung der Aufgabe,

$$z^2+(y_1-y)^2+(x_1-x)^2-2z(y_1-y)\cos\hat{x}-2z(x_1-x)\cos\hat{y}+2(y_1-y)(x_1-x)\cos\hat{z} = a^2,$$
$$(z_2-z)^2+y^2+(x_2-x)^2-2(z_2-z)y\cos\hat{x}+2(z_2-z)(x_2-x)\cos\hat{y}-2y(x_2-x)\cos\hat{z} = b^2,$$
$$(z_3-z)^2+(y_3-y)^2+x^2+2(z_3-z)(y_3-y)\cos\hat{x}-2(z_3-z)x\cos\hat{y}-2(y_3-y)x\cos\hat{z} = c^2;$$

und setzen wir in diese Gleichungen die Ausdrücke für die Coordinatendifferenzen, welche wir so eben gefunden haben, so kommt

$$\{1+n^2+m^2+2n\cos\hat{x}+2m\cos\hat{y}+2mn\cos\hat{z}\}z^2 = a^2 \quad ,$$
$$\{1+n^2+m^2+2n\cos\hat{x}+2m\cos\hat{y}+2mn\cos\hat{z}\}\frac{y^2}{n^2} = b^2 \quad ,$$
$$\{1+n^2+m^2+2n\cos\hat{x}+2m\cos\hat{y}+2mn\cos\hat{z}\}\frac{x^2}{m^2} = c^2 \quad .$$

Dividiren wir die erste Gleichung nach einander durch die zweite und die dritte, so erhalten wir

$$n^2 = \frac{a^2y^2}{b^2z^2} \quad ; \quad m^2 = \frac{a^2x^2}{c^2z^2} \quad ,$$

daraus ferner

$$n = \frac{ay}{bz} \quad ; \quad m = \frac{ax}{cz} \quad ,$$

zwei Ausdrücke, welche mit denjenigen Zeichen zu nehmen sind, die den Quotienten a : b und a : c zukommen. Setzen wir diese Werthe von n und m in irgend eine der zuletzt gefundenen drei Gleichungen, so kommt

§. 53.

$$\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{x}{c}\right)^2+2\cos\hat{z}\frac{x}{c}\frac{y}{b}+2\cos\hat{y}\frac{x}{c}\frac{z}{a}+2\cos\hat{x}\frac{y}{b}\frac{z}{a}=1 \quad (1)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher folglich ein Ellipsoid ist, dessen Mittelpunkt in dem Durchschnittspunkte der drei gegebenen Ebenen liegt. Wenn diese Ebenen senkrecht auf einander sind, so geht die gefundene Gleichung, indem sie sich nun auch auf rechtwinklige Coordinaten bezieht, in

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1 \quad (2)$$

über; und alsdann sind die Durchschnitte jener Ebenen die Achsen des Ellipsoids, deren Länge gleich 2a, 2b und 2c ist. — Wenn außerdem der Punkt P so auf der beweglichen Geraden liegt, daß er die Entfernung BC halbirt und daher $c = -b$, also $c^2 = b^2$ ist, so reducirt sich die letzte Gleichung auf

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad , \quad (3)$$

und der in Rede stehende Ort ist dann ein Rotationsellipsoid.

Aus der Lösung dieser Aufgabe ergiebt sich unmittelbar die Lösung der folgenden

Aufgabe [78]. *Eine gerade Linie bewegt sich dergestalt, daß ein gegebener Punkt A derselben auf einer festen Ebene e, und ein zweiter gegebener Punkt B dieser Geraden auf einer festen Geraden d, welche die Ebene e schneidet, bleibt. Es soll der Ort eines gegebenen dritten Punktes P jener beweglichen Geraden gefunden werden.*

Nehmen wir die gegebene Ebene e und zwei beliebige Ebenen, die sich in der gegebenen Geraden d schneiden, zu Coordinatenebenen, so bleiben die Punkte A und B fortwährend, wie in der vorigen Aufgabe, auf den Coordinatenebenen, und es sind die, in der vorigen Aufgabe mit B und C bezeichneten Punkte in einem einzigen Punkte B vereinigt, so daß BP = CP also $b = c$ ist. Aus der Gleichung (1) erhalten wir demnach unmittelbar

$$\left(\frac{z}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{x}{b}\right)^2+2\cos\hat{z}\frac{x}{b}\frac{y}{b}+2\cos\hat{y}\frac{x}{b}\frac{z}{a}+2\cos\hat{x}\frac{y}{b}\frac{z}{a}=1 \quad (4)$$

als die Gleichung des jetzt gesuchten Ortes, welcher demnach ebenfalls ein Ellipsoid ist. — Steht die gegebene feste Gerade d auf der Ebene e senkrecht, und nehmen wir die beiden anderen Coordinatenebenen rechtwinklig an, so geht die Gleichung (4) in

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$ §. 53.

über, und der in Rede stehende Ort ist derselbe als der in der vorigen Aufgabe gefundene Ort (3). — Wenn ferner der Punkt P so gegeben ist, daß er die Entfernung AB halbirt und demnach $b = -a$ ist, so reducirt sich die Gleichung (5) auf

$$z^2 + y^2 + x^2 = a^2 \quad , \qquad (6)$$

und der Ort des Halbirungspunktes P einer Geraden AB, von welcher ein Endpunkt A sich in einer Ebene, der andere Endpunkt B sich in einer, auf dieser Ebene senkrechten Geraden bewegt, ist demnach eine Kugelfläche.

Aufgabe [79]. *Eine gerade Linie bewegt sich so, daß zwei gegebene Punkte, A, B, derselben auf zwei festen Geraden bleiben. Es soll der Ort eines gegebenen dritten Punktes P jener Geraden gefunden werden.*

Wir nehmen diejenige gerade Linie, welche die beiden festen Geraden rechtwinklig schneidet, zur Achse der z. Heißen nun die Durchschnittspunkte dieser festen Geraden mit der Achse der z respective A′ und B′, so nehmen wir denjenigen Punkt P′ dieser Achse, für welchen $AP : BP = A'P' : B'P'$ ist, zum Anfangspunkte der Coordinaten, und diejenigen beiden Geraden, welche durch diesen Anfangspunkt den gegebenen festen Geraden parallel laufen, zu Achsen der x und der y. Sind die constanten Entfernungen $AP = a$, $BP = b$ und das Verhältniß von $AB : A'B'$ durch $1 : \lambda$ ausgedrückt, so ist $A'P' = \lambda a$ und $B'P' = \lambda b$, und die Gleichungssysteme der beiden festen Geraden sind daher, wenn wir ihre laufenden Coordinaten durch t, u, v bezeichnen,

$$\left\{ v = -\lambda a \quad ; \quad t = 0 \right\} ,$$
$$\left\{ v = -\lambda b \quad ; \quad u = 0 \right\} .$$

Nennen wir die Coordinaten des Punktes P, in Beziehung auf das angegebene Coordinatensystem, x, y, z, und die Gleichungen der beweglichen Geraden, deren laufende Coordinaten wir ebenfalls durch t, u, v bezeichnen,

$$\left\{ t - x = m(v - z) \quad ; \quad u - y = n(v - z) \right\} ,$$

so haben wir, wenn $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ die Durchschnittspunkte der beweglichen geraden Linie mit den beiden festen Geraden sind,

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = -\lambda a \; ; \; x_1 = 0 \; ; \; x_1 - x = m(z_1 - z) \; ; \; y_1 - y = n(z_1 - z) \; ; \\ z_2 = -\lambda b \; ; \; y_2 = 0 \; ; \; x_2 - x = m(z_2 - z) \; ; \; y_2 - y = n(z_2 - z) \; . \end{array}\right\} (7)$$

§. 53. Wir haben aber ferner, indem $AP = a$, $BP = b$, $\cos\hat{x} = 0$, $\cos\hat{y} = 0$ ist,

$$(z_1 - z)^2 + (y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2 + 2(x_1 - x)(y_1 - y)\cos\hat{z} = a^2 \quad ,$$
$$(z_2 - z)^2 + (y_2 - y)^2 + (x_2 - x)^2 + 2(x_2 - x)(y_2 - y)\cos\hat{z} = b^2 \quad ,$$

oder, wenn wir für $(x_1 - x)$, $(y_1 - y)$, $(x_2 - x)$, $(y_2 - y)$ die, in Folge der vorigen Gleichungen, ihnen gleichen Ausdrücke setzen,

$$\left.\begin{aligned} (z_1 - z)^2\{1 + n^2 + m^2 + 2mn\cos\hat{z}\} &= a^2 \quad , \\ (z_2 - z)^2\{1 + n^2 + m^2 + 2mn\cos\hat{z}\} &= b^2 \quad , \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

woraus sich $b(z_1 - z) = a(z_2 - z)$; und da $bz_1 = -\lambda ab$ und auch $az_2 = -\lambda ab$, wie vorher gefunden wurde, endlich

$$z = 0$$

ergiebt. Hieraus folgt, daß der Punkt P in der Ebene der xy liegt. Die Gleichungen (7) geben uns, wenn wir darin $z = 0$ setzen,

$$z_1 = -\lambda a \quad ; \quad x = m\lambda a \quad ; \quad z_2 = -\lambda b \quad ; \quad y = n\lambda b \quad ;$$

und wenn wir vermittelst dieser Gleichungen m, n und z_1 aus der ersten, oder m, n und z_2 aus der zweiten Gleichung (8) eliminiren, so erhalten wir

$$a^2y^2 + 2abxy + b^2x^2 = a^2b^2(1 - \lambda^2) \quad . \qquad (9)$$

Der gesuchte Ort ist demnach, wenn $1 > \lambda$, d. i. wenn die Entfernung AB größer ist als die Entfernung der beiden festen Geraden, eine in der Ebene der xy liegende Ellipse. Wenn $1 < \lambda$, d. i. wenn die zuerst genannte Entfernung die kleinere ist, so ist die Curve (9) imaginair. (Vergl. I. §. 33. Aufg. 55).

§. 54.

Aufgabe [80]. Von einem Punkte P sind Perpendikel auf die Seitenebenen eines gegebenen Tetraeders gefällt. Das Verhältniß des Rechtecks unter zwei dieser Perpendikel zu dem Rechtecke unter den beiden übrigen ist gegeben. Es soll der Ort des Punktes P gefunden werden.

Es seyen

$$\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x + k = 0 \quad ; \quad \cos\gamma' z + \cos\beta' y + \cos\alpha' x + k' = 0$$
$$\cos\gamma'' z + \cos\beta'' y + \cos\alpha'' x + k'' = 0 \quad ; \quad \cos\gamma''' z + \cos\beta''' y + \cos\alpha''' x + k''' = 0$$

die gegebenen Gleichungen der Seitenebenen des Tetraeders in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und es sey $1 : n$ das gegebene Verhältniß. Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes P durch x', y', z', und

und die Resultate der Substitution von x', y', z' in den gegebenen Glei- §. 54.
chungen respective durch $A = 0, A' = 0, A'' = 0, A''' = 0$, so sind die Längen der genannten Perpendikel respective gleich A, A', A'', A'''. Zufolge der Aufgabe soll nun

$$A \cdot A' = n \cdot A'' \cdot A'''$$

seyn, daher ist, wenn wir die jetzt nicht mehr nöthigen Accente von x', y', z' weglassen,

$$(\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x + k)(\cos\gamma' z + \cos\beta' y + \cos\alpha' x + k')$$
$$= n(\cos\gamma'' z + \cos\beta'' y + \cos\alpha'' x + k'')(\cos\gamma''' z + \cos\beta''' y + \cos\alpha''' x + k''')$$

die Gleichung des gesuchten Ortes. Dieser Ort ist demnach eine Fläche des zweiten Grades, welche, wie wir sehen, die Durchschnitte der ersten und dritten, der ersten und vierten, der zweiten und dritten, und der zweiten und vierten Seitenebene des Tetraeders enthält, woraus zugleich folgt, daß sie eine geradlinige Fläche ist.

Aufgabe [81]. Von einem Punkte P sind Perpendikel auf die sechs Seitenebenen eines Parallelepipeds gefällt. Das Product der drei Perpendikel, welche auf drei bestimmte, in einer Ecke zusammentreffende Seitenebenen gefällt sind, ist dem Producte der übrigen gleich; es soll der Ort des Punktes P gefunden werden.

Es sey der Mittelpunkt des Parallelepipeds der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, und es seyen

$$\cos\gamma z+\cos\beta y+\cos\alpha x+k=0\ ;\ \cos\gamma' z+\cos\beta' y+\cos\alpha' x+k'=0\ ;\ \cos\gamma'' z+\cos\beta'' y+\cos\alpha'' x+k''=0$$

die Gleichungen von drei, in einer Ecke zusammentreffenden Seitenebenen, daher ferner

$$\cos\gamma z+\cos\beta y+\cos\alpha x-k=0\ ;\ \cos\gamma' z+\cos\beta' y+\cos\alpha' x-k'=0\ ;\ \cos\gamma'' z+\cos\beta'' y+\alpha'' x-k''=0$$

die Gleichungen der drei übrigen Seitenebenen. Aus der Bedingung der Aufgabe erhalten wir, auf ähnliche Weise, wie in der vorigen Aufgabe,

$$(\cos\gamma z+\cos\beta y+\cos\alpha x+k)(\cos\gamma' z+\cos\beta' y+\cos\alpha' x+k)(\cos\gamma'' z+\cos\beta'' y+\cos\alpha'' x+k) =$$
$$(\cos\gamma z+\cos\beta y+\cos\alpha x-k)(\cos\gamma' z+\cos\beta' y+\cos\alpha' x-k)(\cos\gamma'' z+\cos\beta'' y+\cos\alpha'' x-k)$$

oder, wenn wir die Parenthesen aufheben,

$$k''(\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x)(\cos\gamma' z + \cos\beta' y + \cos\alpha' x)$$
$$+ k'(\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x)(\cos\gamma'' z + \cos\beta'' y + \cos\alpha'' x)$$
$$+ k(\cos\gamma' z + \cos\beta' y + \cos\alpha' x)(\cos\gamma'' z + \cos\beta'' y + \cos\alpha'' x) + kk'k'' = 0$$

als die Gleichung des gesuchten Ortes.

Nehmen wir, statt rechtwinkliger Coordinatenebenen, diejenigen Ebenen, welche durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds den Seitenebenen parallel

§. 54. laufen, zu Coordinatenebenen an, so sind drei in einer Ecke zusammentreffende Seitenebenen respective durch die Gleichungen

$$z = a \quad ; \quad y = b \quad ; \quad x = c \quad ,$$

und die ihnen gegenüber liegenden durch die Gleichungen

$$z = -a \quad ; \quad y = -b \quad ; \quad x = -c$$

auszudrücken. Die Geraden, welche von einem Punkte $x'y'z'$ mit den Coordinatenachsen parallel nach den erst genannten Seitenebenen geführt werden, sind respective gleich

$$z' - a \quad ; \quad y' - b \quad ; \quad x' - c \quad ,$$

und ihre Verlängerungen, von dem Punkte $x'y'z'$ an, bis zu den gegenüber liegenden Ebenen

$$z' + a \quad ; \quad y' + b \quad ; \quad x' + c \quad .$$

Die sechs Perpendikel sind daher gleich

$$\lambda(z' - a) \quad ; \quad \mu(y' - b) \quad ; \quad \nu(x' - c) \quad ,$$
$$\lambda(z' + a) \quad ; \quad \mu(y' + b) \quad ; \quad \nu(x' + c) \quad ,$$

wo λ, μ, ν gewisse constante Coefficienten bedeuten, deren Werthe wir nicht zu bestimmen brauchen werden. Der Bedingung der Aufgabe gemäß finden wir nun durch Multiplication der zuletzt angegebenen Ausdrücke, und wenn wir die, jetzt nicht mehr nöthigen Accente weglassen,

$$(z + a)(y + b)(x + c) = (z - a)(y - b)(x - c) \quad , \qquad (1)$$

und, wenn wir die Parenthesen aufheben,

$$cyz + bxz + axy + abc = 0 \quad , \qquad (2)$$

oder auch

$$\frac{y}{b}\frac{z}{a} + \frac{x}{c}\frac{z}{a} + \frac{x}{c}\frac{y}{b} + 1 = 0 \qquad (3)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Dieser Ort ist demnach ein hyperbolisches Hyperboloid (§. 43. S. 31 und 32), dessen Mittelpunkt im Mittelpunkte des Parallepipeds liegt.

Bezeichnen wir den Eckpunkt des Parallelepipeds,

für welchen $z = a$, $y = +b$, $x = +c$ durch A ,
für welchen $z = a$, $y = +b$, $x = -c$ durch B ,
für welchen $z = a$, $y = -b$, $x = -c$ durch C ,
für welchen $z = a$, $y = -b$, $x = +c$ durch D ,

und die, diesen Eckpunkten diametral entgegengesetzten respective durch A′, B′, C′, D′; so ist das Gleichungssystem

der Kante BC $\left\{ z = +a \;;\; x = -c \right\}$,
der Kante CD $\left\{ z = +a \;;\; y = -b \right\}$,
der Kante DB′ $\left\{ y = -b \;;\; x = +c \right\}$,
der Kante B′C′ $\left\{ z = -a \;;\; x = +c \right\}$,
der Kante C′D′ $\left\{ z = -a \;;\; y = +b \right\}$,
der Kante D′B $\left\{ y = +b \;;\; x = -c \right\}$.

Es wird aber die Gleichung (1), folglich auch die Gleichung (2) und (3) durch jedes der genannten Gleichungssysteme befriedigt, folglich liegt jede der genannten sechs Kanten, und somit auch das schiefe Sechseck BCDB′C′D′B auf dem hyperbolischen Hyperboloide (3). Die übrigen sechs Kanten und auch die beiden Eckpunkte A, A′ des Parallelepipeds liegen nicht auf der Fläche (3).

Die Gleichungen derjenigen geraden Linie, welche die, nicht auf dem Hyperboloid liegenden Eckpunkte A, A′ verbindet, sind

$$\frac{x}{c} = \frac{z}{a} \;;\; \frac{y}{b} = \frac{z}{a} \;.$$

Suchen wir die Gleichung der Diametralebene, welche diesem Durchmesser AA′ conjugirt ist, so finden wir, nach §. 44,

$$\frac{z}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 0 \;,$$

und es zeigt sich nun leicht, daß diese Diametralebene die sechs Seiten des vorhergenannten schiefen Sechsecks halbirt.

Die Gleichung des Hyperboloids (3) bekommt eine andere Gestalt, wenn wir andere Coordinatenachsen annehmen. Wählen wir die Diagonalen des Vierecks, in welchem die bisherige Ebene der xy das Parallelepiped schneidet, und das wir mit XY bezeichnen wollen, zur Achse der x und der y, und diejenige Diagonale des Parallelepipeds, welche die beiden Eckpunkte C, C′ verbindet, in denen sich die der Ebene der xy parallelen Seiten des Sechsecks schneiden, zur Achse der z; bezeichnen wir jene Diagonalen des Vierecks durch 2α, 2β, und die Diagonale CC′ des Parallelepipeds durch 2γ, so finden wir leicht als Gleichung

der Ebene ABCD $\quad z - \gamma = 0$,

der Ebene AC′B′D $\quad \frac{z}{\gamma} - \frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha} + 1 = 0$,

der Ebene ABD′C′ $\quad \frac{z}{\gamma} - \frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} + 1 = 0$,

§. 54. der Ebene A'B'C'D' $z+\gamma = 0$,

der Ebene A'CBD' $\frac{z}{\gamma} - \frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha} - 1 = 0$,

der Ebene A'B'DC $\frac{z}{\gamma} - \frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} - 1 = 0$.

Und nun erhalten wir als Gleichung der gesuchten Fläche, auf dieselbe Weise wie vorher,

$$\left(\frac{z}{\gamma} - 1\right)\left(\frac{z}{\gamma} - \frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{z}{\gamma} - \frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} + 1\right)$$
$$= \left(\frac{z}{\gamma} + 1\right)\left(\frac{z}{\gamma} - \frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{z}{\gamma} - \frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} - 1\right) ,$$

oder, wenn wir die Parenthesen aufheben,

$$\frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 .$$

Wir sehen hieraus, daß die Diagonalen des vorher genannten Vierecks und die Diagonale CC' des Parallelepipeds drei conjugirte Durchmesser sind. Da wir nun aber auch die Diagonalen des Vierecks XZ, in welchem die frühere Ebene der xz das Parallelepiped schneidet, und die Diagonale DD' des Parallelepipeds, ferner die Diagonale des, durch die frühere Ebene der yz in dem Parallelepiped gebildeten Vierecks YZ und die Diagonale BB' dieses Körpers zu Coordinatenachsen hätten nehmen können, und dann offenbar zu ähnlichen Resultaten gekommen wären; so folgt, daß die Diagonalen des Vierecks XY und die Gerade CC', dann die Diagonalen des Vierecks XZ und die Gerade DD', ferner die Diagonalen des Vierecks YZ und die Gerade BB' drei Systeme conjugirter Durchmesser des Hyperboloids (3) sind.

Es ergiebt sich uns nun zugleich Folgendes: Nehmen wir in einem hyperbolischen Hyperboloide irgend drei conjugirte Durchmesser und legen durch die auf dem Hyperboloide befindlichen Endpunkte eines derselben zwei Ebenen der Ebene der beiden anderen Durchmesser parallel, so schneiden sie das Hyperboloid (indem sie es zugleich berühren) in zwei mal zwei Graden, welche respective einander parallel sind; nun können wir durch jeden der, ebenfalls auf dem Hyperboloide befindlichen, Endpunkte des zweiten Durchmessers eine gerade Linie ziehen, welche gänzlich auf der Fläche liegt und zwei von den vorhergenannten vier Geraden trifft. Sämmtliche sechs Geraden bilden ein, auf dem Hyperboloide befindliches schiefes Sechseck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind. Die Ebenen, welche von je zwei an einander liegenden Seiten dieses Sechsecks bestimmt sind, begrenzen ein

Parallelepiped, von welchem sechs Eckpunkte, nämlich die Ecken des Sechsecks, auf dem Hyperboloide, die übrigen zwei Eckpunkte A, A′ nicht auf auf dem Hyperboloide liegen. Dieses Parallelepiped, das wir durch AA′ bezeichnen wollen, hat die Eigenschaft, daß das Product der drei Perpendikel, welche von irgend einem Punkte des Hyperboloids auf die im Punkte A zusammentreffenden Seitenebenen herabgelassen werden, dem Producte der drei Perpendikel, welche von demselben Punkte auf die im Punkte A′ zusammentreffenden Seitenebenen gefällt werden, gleich ist. — Verbinden wir die Endpunkte der vorher genannten drei conjugirten Durchmesser durch zwölf gerade Linien, so sind diese die Kanten eines Octaeders, welches offenbar dem dritten Theile des Parallelepipeds AA′, und dem sechsten Theile des unter jenen drei conjugirten Durchmessern enthaltenen Parallelepipeds gleich ist. Da nun das letztere constant, und dem rechtwinkligen, unter den Achsen des Hyperboloids enthaltenen Parallelepiped gleich ist (§. 46. Lehrs. 18), so folgt: Welches auch die zuerst angenommenen conjugirten Durchmesser seyn mögen, der Inhalt des Parallelepipeds AA′ ist constant und der Hälfte des unter den Achsen des Hyperboloids enthaltenen, rechtwinkligen Parallelepipeds gleich. §. 54.

Aufgabe [82]. Es sind drei feste gerade Linien gegeben, von welchen nicht zwei in einer Ebene liegen, eine vierte Gerade bewegt sich so, daß sie fortwährend die drei gegebenen schneidet. Es soll die von der beweglichen Geraden erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir legen durch eine jede der drei festen Geraden zwei Ebenen bezüglich den beiden anderen Geraden parallel. Diese sechs Ebenen begrenzen ein Parallelepiped, durch dessen Mittelpunkt wir drei Ebenen seinen Seitenebenen parallel legen. Diese drei Ebenen nehmen wir zu Coordinatenebenen, und alsdann sind die drei gegebenen Geraden durch drei Gleichungssysteme von folgender Form

$$\left\{ \begin{array}{l} z = +a \\ x = -c \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{l} z = -a \\ y = +b \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{l} y = -b \\ x = +c \end{array} \right\}$$

ausgedrückt. Sollen nun

$$\{ x = \alpha z + \gamma \;;\; y = \beta z + \delta \}$$

die Gleichungen der beweglichen Geraden seyn, so müssen die Coefficienten in diesen Gleichungen, da diese Gerade eine jede der drei gegebenen schneiden soll, zufolge des §. 8. (Aufg. 13), folgende Bedingungsgleichungen befriedigen:

$$c + \alpha a + \gamma = 0 \;;\; b + \beta a + \delta = 0 \;;\; (b + \delta)\alpha + (c - \gamma)\beta = 0$$

§ 54. Eliminiren wir zwischen den letzten fünf Gleichungen die vier Größen α, β, γ und δ, so erhalten wir dieselbe Gleichung wie in der vorigen Aufgabe, nämlich

$$cyz + bxz + axy + abc = 0 \quad , \tag{2}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{yz}{ba} + \frac{xz}{ca} + \frac{xy}{cb} + 1 = 0 \tag{3}$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche demnach ein hyperbolisches Hyperboloid ist, auf dem sich die drei gegebenen Geraden befinden.

Hätten wir diejenigen drei Geraden, deren Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} z = -a \\ x = +c \end{array}\right\} ; \quad \left\{\begin{array}{l} z = +a \\ y = -b \end{array}\right\} ; \quad \left\{\begin{array}{l} y = +b \\ x = -c \end{array}\right\}$$

sind, und welche ebenfalls Kanten des erwähnten Parallelepipeds bilden, als die drei festen Geraden angenommen, so würden wir dasselbe Hyperboloid (3) gefunden haben, weil die Gleichung (3) sich durch Veränderung der Vorzeichen von a, b, c nicht ändert. Hieraus folgt, daß ein und dasselbe hyperbolische Hyperboloid auf zweierlei Weise durch eine Gerade erzeugt werden kann.

Wir können also ein hyperbolisches Hyperboloid als ein System von geraden Linien ansehen, und zwar auf doppelte Weise, je nachdem wir diesen Geraden die Lage, welche der einen oder der andern Erzeugungsart entspricht, geben. Es ist leicht einzusehen, daß jede Gerade des einen Systems keine andere Gerade desselben Systems, wohl aber alle Geraden des andern Systems schneidet, und umgekehrt; ferner, daß von den beiden Geraden, welche durch jeden Punkt des Hyperboloids auf dieser Fläche gezogen werden können, die eine zu dem einen und die andere zu dem andern Systeme gehört. Wir bemerken noch, daß diejenigen beiden parallelen Geraden, in welchen jede den Asymptotenkegel berührende Ebene das hyperbolische Hyperboloid schneidet (§. 47. Aufg. 66), ebenfalls zu zwei verschiedenen Systemen gehören. Da diese beiden Geraden auch der Linie parallel sind, in welcher die genannte Ebene den Asymptotenkegel berührt, und diese Linie mit den beiden Focallinien Winkel bildet, deren Summe und Differenz constant ist (§. 34), so folgt: In einem hyperbolischen Hyperboloid bildet eine jede erzeugende Gerade mit den beiden Focallinien Winkel, deren Summe und Differenz constant ist.

Aufgabe [83]. *Es sind zwei feste, nicht in einer Ebene liegende gerade Linien, und eine sie schneidende Ebene gegeben. Eine dritte*

Gerade bewegt sich so, daß sie fortwährend die gegebenen Linien schneidet, und der gegebenen Ebene parallel bleibt. Es soll die von der sich bewegenden Geraden erzeugte Fläche gefunden werden. §. 54.

Um ein Coordinatensystem zu erhalten, gegen welches die gegebenen Stücke eine symmetrische Lage haben, verbinden wir die Punkte, in welchen die gegebenen Geraden die gegebene Ebene schneiden, durch eine gerade Linie. Diese nehmen wir zur Achse der x, und ihren Halbirungspunkt A zum Anfangspunkte der Coordinaten. Wir ziehen durch den Punkt A zwei Gerade g', g'' den gegebenen festen Geraden parallel; diese bestimmen eine Ebene E, deren Durchschnitt mit der gegebenen Ebene wir zur Achse der z nehmen. Nun ziehen wir in der Ebene E irgend eine Gerade der Achse der z parallel, welche die Geraden g', g'' in zwei Punkten p', p'' schneiden wird; wir halbiren $p'p''$ in B, und nehmen die Verbindungslinie AB zur Achse der y. Die gegebene Ebene ist somit die Ebene der xz, und die Ebene E, welche den beiden festen Geraden parallel ist, die Ebene der yz. Die Gleichungen der beiden gegebenen festen Geraden, in Beziehung auf dieses Coordinatensystem, haben die Formen

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c \\ y = nz \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{l} x = -c \\ y = -nz \end{array} \right\} ,$$

und die Gleichungen einer, der gegebenen Ebene, d. i. der Ebene der xz parallelen Geraden sind durch

$$\{ y = \delta \ ; \ x = \alpha z + \gamma \}$$

darzustellen. Soll diese Gerade die gegebenen schneiden, so haben wir, nach §. 8. (Aufg. 13), die Bedingungsgleichungen

$$nc = \alpha\delta + n\gamma \ ; \ nc = \alpha\delta - n\gamma \ ,$$

woraus

$$\gamma = 0 \ ; \ nc = \alpha\delta$$

folgt, und eliminiren wir, vermittelst dieser letzten Gleichungen, α, γ und δ zwischen den angenommenen Gleichungen der erzeugenden geraden Linie, so kommt

$$xy = ncz \qquad (4)$$

als Gleichung der gesuchten Fläche, welche somit ein hyperbolisches Paraboloid ist.

Hätten wir diejenigen beiden Geraden, deren Gleichungen in Beziehung auf das angegebene Coordinatensystem

$$\left\{ \begin{array}{l} y = c \\ x = nz \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{l} y = -c \\ x = -nz \end{array} \right\}$$

§. 54. sind, als die zu schneidenden festen Linien, und die Ebene E als diejenige angenommen, welcher die erzeugende Gerade parallel seyn soll, so würden deren Gleichungen

$$\left\{ x = \delta \quad ; \quad y = \alpha z + \delta \right\}$$

gewesen seyn, woraus sich denn dieselbe Gleichung (4) für die erzeugte Fläche ergeben hätte, weil diese Gleichung sich durch Vertauschung von x und y nicht ändert. Hieraus folgt, daß ein und dasselbe hyperbolische Paraboloid auf zweierlei Weise durch eine Gerade erzeugt werden kann.

Wir können also ein hyperbolisches Paraboloid als ein System von geraden Linien ansehen, und zwar auf doppelte Weise, indem wir diesen Geraden die Lage geben, welche der einen oder welche der andern Erzeugungsart entspricht. Es ist leicht einzusehen, daß jede Gerade des einen Systems keine andere Gerade desselben Systems, wohl aber alle Geraden des andern Systems schneidet, und umgekehrt; ferner, daß durch jeden Punkt des hyperbolischen Paraboloids zwei auf dieser Fläche liegende Gerade gezogen werden können, von welchen die eine zu dem einen und die andere zu dem anderen Systeme gehört.

§. 55.

Aufgabe [84]. *Es sind zwei nicht in einer Ebene liegende Gerade g, g′, und auf jeder derselben zwei feste Punkte A, B und A′, B′ gegeben. Eine dritte Gerade l bewegt sich, indem sie fortwährend die Geraden g, g′ schneidet, dergestalt, daß, wenn C und C′ die Durchschnittspunkte bezeichnen, immer* $\frac{A'C'}{B'C'} = n \cdot \frac{AC}{BC}$ *sey, wo n eine gegebene constante Zahl bedeutet. Es soll die von der Geraden l erzeugte Fläche gefunden werden.*

Wir verbinden A und A′ durch eine Gerade, welche wir in O halbiren, ziehen durch O den Geraden g und g′ die Parallelen OG und OG′. Wir nehmen AA′ zur Achse der z, OG zur Achse der x und OG′ zur Achse der y. Die Längen von AA′, A′B′ und AB bezeichnen wir respective durch 2a, b und c.

Die Gleichungen der Geraden g, g′ sind nun

$$\left\{ z = +a \quad ; \quad y = 0 \right\} ,$$
$$\left\{ z = -a \quad ; \quad x = 0 \right\} ,$$

und, wenn wir die veränderlichen Längen von AC und A′C′ bezüglich durch x′ und y′ bezeichnen, so sind

die Coordinaten des Punktes C $\left\{ x = x' \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = +a \right\}$,

die Coordinaten des Punktes C' $\{ x = 0 \;;\; y = y' \;;\; z = -a \}$; §. 55.
ferner ist $\overline{BC} = x' - c$ und $\overline{B'C'} = y' - b$. Zufolge der Bedingung der Aufgabe muß

$$\frac{y'}{y'-b} = \frac{nx'}{x'-c}$$

oder, was dasselbe ist,

$$y'(x'-c) = nx'(y'-b) \qquad (1)$$

seyn. Die erzeugende Gerade aber ist, da sie die beiden Punkte C, C', deren Coordinaten wir angegeben haben, enthält, durch die Gleichungen

$$x = \frac{x'}{2a}(a+z) \;;\; y = \frac{y'}{2a}(a-z)$$

ausgedrückt, aus welchen wir

$$x' = \frac{2ax}{a+z} \;;\; y' = \frac{2ay}{a-z} \qquad (2)$$

erhalten. Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (1), so kommt

$$2a(n-1)xy + nbxz + cyz + acy - nabx = 0 \qquad (3)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche demnach ein hyperbolisches Hyperboloid ist.

In dem besonderen Falle, in welchem $n = 1$ ist, reducirt sich die gefundene Gleichung (3) auf

$$bxz + cyz + acy - abx = 0 \,, \qquad (4)$$

und dann ist die erzeugte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid, was sich auch aus der Lösung der vorigen Aufgabe hätte herleiten lassen.

In jedem Falle enthält die erzeugte Fläche die vier Seiten des schiefen Vierecks $AA'B'B$.

Aufgabe [85]. Es finden dieselben Voraussetzungen wie in der vorigen Aufgabe Statt, nur bewege sich die Gerade l so, daß $\overline{A'C'} = n \cdot \overline{AC}$.

Nehmen wir das Coordinatensystem wie in der vorigen Aufgabe an, so haben wir, statt der Bedingungsgleichung (1), die Gleichung

$$y' = nx' \,, \qquad (5)$$

aus welcher wir, vermittelst der Gleichungen (2), die Gleichung

$$yz + nxz + ay - nax = 0 \qquad (6)$$

der erzeugten Fläche finden, welche also ein hyperbolisches Paraboloid ist.

§. 55. **Aufgabe [86].** Es finden dieselben Voraussetzungen, wie in der vorigen Aufgabe Statt, nur bewege sich die Gerade l so, daß das Product $\overline{AC} \cdot \overline{A'C'}$ einer constanten Größe q^2 gleich sey.

Bei demselben Coordinatensysteme, haben wir hier die Bedingungsgleichung

$$y'x' = q^2 \quad , \qquad (7)$$

woraus wir, vermittelst der Gleichungen (2),

$$q^2z^2 + 4a^2xy - a^2q^2 = 0 \qquad (8)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche finden, welche demnach ein hyperbolisches Hyperboloid ist.

Aufgabe [87]. Es sind zwei gerade Linien gegeben; um eine jede dieser Linien, wie um eine Achse, dreht sich eine Ebene, so aber daß diese beiden Ebenen fortwährend auf einander senkrecht sind. Es soll der Ort der Durchschnittslinie der beiden Ebenen gefunden werden.

Wir nehmen diejenige Gerade, welche die beiden gegebenen senkrecht schneidet, zur Achse der z, und legen durch den Halbirungspunkt dieser kürzesten Entfernung eine, auf ihr senkrechte Ebene, in welcher wir die Achse der x und die Achse der y senkrecht auf einander annehmen. Nennen wir die kürzeste Entfernung der gegebenen Geraden 2a, so sind diese Linien durch die Gleichungssysteme

$$\left\{ \begin{array}{l} z = +a \\ y = mx \end{array} \right\} \; ; \; \left\{ \begin{array}{l} z = -a \\ y = nx \end{array} \right\}$$

auszudrücken. Zwei Ebenen, welche diese Geraden enthalten, stellen wir durch die Gleichungen

$$z - a + \lambda(y - mx) = 0 \quad ; \quad z + a + \lambda'(y - nx) = 0 \qquad (9)$$

oder, was dasselbe ist, durch die Gleichungen

$$z + \lambda y - \lambda mx - a = 0 \quad ; \quad z + \lambda' y - \lambda' nx + a = 0$$

dar, wo λ, λ' zwei willkürliche constante Factoren bedeuten. Sollen diese Ebenen auf einander senkrecht stehen, so muß, indem die Coordinaten rechtwinklig sind,

$$1 + (1 + mn)\lambda\lambda' = 0 \qquad (10)$$

seyn. Eliminiren wir λ und λ' zwischen den Gleichungen (9) und (10), so kommt

$$(1 + mn)z^2 + y^2 + mnx^2 - (m + n)xy - (1 + mn)a^2 = 0 \quad (11)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Dieser Ort ist demnach, im Allgemei-

nen, ein hyperbolisches Hyperboloid; in dem speciellen Falle, in welchem die beiden gegebenen Geraden auf einander senkrecht sind, und somit $1 + mn = 0$ ist, verschwindet das erste und letzte Glied der Gleichung (11), welche alsdann in zwei Factoren

$$(y - mx)(y - nx) = 0$$

zerlegbar ist, und zwei Ebenen ausdrückt, die die kürzeste Entfernung jener Geraden enthalten und auf einander senkrecht stehen.

§. 55.

Hätten wir die Achse der x der ersten gegebenen Geraden parallel gezogen, so würde $m = 0$ seyn, wodurch sich die Gleichung (11) auf

$$z^2 + y^2 - nxy - a^2 = 0 \tag{12}$$

reducirt. Schneiden wir nun die Fläche durch eine, auf der ersten gegebenen Geraden senkrechte Ebene, für welche $x = c$ ist, so erhalten wir für die orthogonale Projection der Durchschnittscurve die Gleichung

$$z^2 + y^2 - ncy - a^2 = 0 \quad .$$

Diese Projection, und folglich die Durchschnittscurve selbst, ist demnach ein Kreis; und es ist nun ohne Weiteres klar, daß jeder auf der zweiten gegebenen Geraden senkrecht geführte Durchschnitt der Fläche ebenfalls ein Kreis ist.

Nehmen wir diejenigen Geraden, welche die Winkel der gegebenen halbiren, zu Achsen der x und der y, so ist $n = -m$, wodurch die Gleichung (11) in

$$(1 - m^2)z^2 + y^2 - m^2x^2 = (1 - m^2)a^2 \tag{13}$$

übergeht. Die jetzigen Coordinatenachsen sind demnach die Achsen des Hyperboloids.

Endlich bemerken wir noch, daß, wenn die gegebenen Geraden sich schneiden, $a = 0$ ist, wodurch sich die Gleichung (13) auf

$$(1 - m^2)z^2 + y^2 - m^2x^2 = 0 \quad , \tag{14}$$

und das Hyperboloid folglich, auf seinen Asymptotenkegel reducirt.

§. 56.

Drei Flächen zweiten Grades schneiden sich, im Allgemeinen, in acht Punkten, welche auch zum Theil oder sämmtlich imaginair seyn können. Denn da diese Flächen durch drei Gleichungen vom zweiten Grade zwischen x, y, z auszudrücken sind, und da es, im Allgemeinen, acht Systeme von Werthen von x, y, z giebt, von welchen ein jedes diese drei Gleichungen gleichzeitig befriedigt, so giebt es, im Allgemeinen, acht Punkte, von welchen ein jeder zugleich auf den drei Flächen liegt.

§. 56. Eine Fläche vom zweiten Grade ist durch neun Punkte, im Allgemeinen, völlig bestimmt. Denn setzen wir in die Gleichung

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+1 = 0 \quad (1)$$

für x, y und z nach einander die Coordinaten von neun gegebenen Punkten, so erhalten wir neun Gleichungen, welche in Beziehung auf die zu bestimmenden neun Größen a, b, c, a′, b′, c′, a″, b″, c″ vom ersten Grade und zur Bestimmung derselben, im Allgemeinen, hinreichend sind. Wir sagen im Allgemeinen, denn in besonderen Fällen können durch dieselben gegebenen neun Punkte unendlich viele Flächen zweiten Grades gelegt werden. Um uns hiervon zu überzeugen, wollen wir annehmen, eine Fläche vom zweiten Grade, welche durch die Gleichung (1) ausgedrückt seyn mag, werde von einer andern Fläche desselben Grades, deren Gleichung in Beziehung auf das nämliche Coordinatensystem,

$$\alpha z^2+\beta y^2+\gamma x^2+2\alpha'xy+2\beta'xz+2\gamma'yz+2\alpha''z+2\beta''y+2\gamma''x+1 = 0 \quad (2)$$

ist, geschnitten. Bezeichnen wir die ersten Theile der Gleichungen (1) und (2), der Kürze wegen, durch A und B, so sind die beiden Flächen durch

$$A = 0 \quad \text{und} \quad B = 0$$

auszudrücken. Die Gleichung

$$A + \lambda B = 0 \,, \quad (3)$$

in welcher λ einen willkürlichen constanten Factor bezeichnet, und welche, im Allgemeinen, augenscheinlich vom zweiten Grade ist, drückt ebenfalls eine Fläche zweiten Grades aus. Diese letztere wird offenbar, was auch immer λ für einen Werth haben mag, von allen Werthen von x, y, z befriedigt, welche zu gleicher Zeit den Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ genügen. Diese Coordinatenwerthe gehören aber denjenigen Punkten an, welche beiden Flächen (1) und (2) gemein sind, d. i. den Punkten, welche sich in der Durchschnittscurve der beiden Flächen (1) und (2) befinden. Sind neun oder noch mehr Punkte gegeben, welche sämmtlich in dieser Durchschnittscurve liegen, so werden, wie wir eben gesehen haben, nicht nur die Flächen (1) und (2), sondern es wird auch die Fläche (3) diese Punkte enthalten, und da ferner λ willkürlich ist und demnach, wenn λ variirt wird, die Gleichung (3) nicht nur eine Fläche, sondern immer andere und andere Flächen zweiten Grades ausdrückt, so werden durch jene neun oder noch mehr Punkte unendlich viele Flächen vom zweiten Grade gelegt werden können.

Wenn von neun gegebenen Punkten sechs in einer und derselben Ebene liegen, so drückt die Gleichung (1), in welcher die Coefficienten nach der

oben angegebenen Weise bestimmt worden sind, im Allgemeinen, das System von zwei Ebenen aus. Denn wenn durch die genannten Punkte eine Fläche vom zweiten Grade gelegt werden könnte, deren Gleichung sich nicht in Factoren zerlegen läßt, so würde ihr Durchschnitt mit der genannten Ebene eine Linie zweiten Grades seyn, welche nothwendigerweise die sechs gegebenen Punkte enthalten müßte, was, bei einer willkürlichen Lage dieser Punkte in der Ebene, unmöglich ist, da eine Linie zweiten Grades durch fünf Punkte bestimmt wird.

Wenn von neun gegebenen Punkten drei in einer und derselben Geraden liegen, so drückt die, auf die oben angegebene Weise vermittelst der Coordinaten der neun Punkte bestimmte, Gleichung des zweiten Grades eine geradlinige Fläche aus.

Wenn von neun gegebenen Punkten vier in einer und derselben Geraden liegen, so ist durch sie eine Fläche zweiten Grades nicht völlig bestimmt; denn legen wir durch die fünf übrigen Punkte und durch drei von den in gerader Linie liegenden mehrere Flächen zweiten Grades, so werden alle diese Flächen geradlinig seyn und die genannte gerade Linie, somit auch den vierten in ihr liegenden Punkt, also sämmtliche neun Punkte enthalten.

Wenn von neun gegebenen Punkten sechs in einer Ebene und zwar in einer und derselben Linie zweiten Grades liegen, so ist durch sie eine Fläche vom zweiten Gerade nicht völlig bestimmt. Denn alle Flächen zweiten Grades, welche irgend fünf jener sechs Punkte enthalten, werden die genannte Ebene in einer Linie zweiten Grades schneiden; diese Curve wird die fünf Punkte, und, da sie durch diese Anzahl Punkte völlig bestimmt ist, auch den sechsten Punkt enthalten, welcher somit auch in allen jenen Flächen liegt.

Soll eine Fläche zweiten Grades durch acht gegebene Punkte, von welchen ein jeder auf zwei gegebenen Flächen desselben Grades liegt, und ferner durch irgend einen gegebenen neunten Punkt $x'y'z'$ gehen, so können wir, wenn $A = 0$ und $B = 0$ die gegebenen Gleichungen der zuletzt genannten Flächen bezeichnen, die Gleichung der zuerst genannten Fläche auf folgende Weise bestimmen. Wir setzen in der Gleichung

$$A + \lambda B = 0$$

für x, y, z respective x', y', z', wodurch A und B constante Werthe erhalten, die wir durch A' und B' bezeichnen, so daß

$$A' + \lambda B' = 0$$

§. 56. kommt, woraus wir $\lambda = -\frac{A'}{B'}$ finden. Bezeichnen wir diesen bestimmten Werth von λ durch λ', und setzen ihn in die obige Gleichung, so erhalten wir

$$A + \lambda' B = 0 \quad ,$$

und dieses ist die Gleichung der zuerst genannten Fläche. Denn da A und B gleich Null werden für diejenigen Coordinatenwerthe, welche den, auf beiden Flächen liegenden, acht Punkten angehören, so wird die Gleichung $A + \lambda' B = 0$ von diesen Werthen befriedigt werden; und da ferner die Substitution von x', y', z' für x, y, z in den ersten Theil dieser Gleichung $A' + \lambda' B'$ giebt und $\lambda' = -\frac{A'}{B'}$ ist, so wird auch von diesen Werthen die Gleichung befriedigt.

Lehrsatz [19]. Alle Flächen des zweiten Grades, welche durch dieselben acht Punkte gehen, haben, im Allgemeinen, eine und dieselbe Durchschnittscurve.

Denn wenn $A = 0$ und $B = 0$ die Gleichungen von irgend zwei, durch dieselben acht Punkte gehenden Flächen zweiten Grades sind, so hat jede dritte, durch dieselben acht Punkte gehende Fläche

$$A + \lambda B = 0$$

zur Gleichung, und da diese von den Coordinaten aller Punkte befriedigt wird, welche den Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ zugleich genügen, so folgt, daß diese dritte Fläche alle, den ersten beiden Flächen gemeinsame Punkte, d. i. die Durchschnittscurve dieser Flächen enthält.

Soll eine Fläche zweiten Grades durch sieben gegebene Punkte, von welchen ein jeder auf drei Flächen desselben Grades liegt, und ferner durch irgend zwei andere Punkte $x'y'z'$ und $x''y''z''$ gehen, so können wir, wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die gegebenen Gleichungen der zuletzt genannten Flächen bezeichnen, die zuerst genannte Fläche durch die Gleichung

$$A + \lambda' B + \mu' C = 0$$

ausdrücken, wenn wir λ' und μ' auf folgende Weise bestimmen. Wir setzen in die Gleichung

$$A + \lambda B + \mu C = 0 \qquad (4)$$

für x, y, z nach einander x', y', z' und x'', y'', z'', und erhalten dadurch

$$A' + \lambda B' + \mu C' = 0 \quad \text{und} \quad A'' + \lambda B'' + \mu C'' = 0 \quad ,$$

wo A', B', C' und A'', B'', C'' die Resultate der genannten Substitutionen in A, B, C bezeichnen; aus diesen letzten beiden Gleichungen, in welchen λ und μ die einzigen unbekannten Größen sind, entwickeln wir diese; die einfachen reellen Werthe von λ und μ, welche wir dadurch erhalten, sind es die wir durch λ' und μ' bezeichnen. Daß die aufgestellte Gleichung eine Fläche zweiten Grades ausdrückt, welche durch die genannten neun Punkte gehet, ist leicht einzusehen; denn sie wird von den Coordinaten der zuerst genannten sieben Punkte befriedigt, weil diese Coordinaten die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ befriedigen, und sie wird von den Coordinaten der beiden anderen Punkte befriedigt, weil λ' und μ' dadurch bestimmt worden sind, daß dies Statt findet.

Lehrsatz [20]. *Alle Flächen des zweiten Grades, welche durch dieselben sieben Punkte gehen, haben, im Allgemeinen, außer diesen sieben Punkten noch einen und denselben achten Punkt mit einander gemein* *).

Denn wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen von drei Flächen zweiten Grades sind, welche durch sieben gegebene Punkte gehen, so können wir jede andere Fläche vom zweiten Grade, welche dieselben sieben Punkte enthält, durch eine Gleichung von der Form

$$A + \lambda B + \mu C = 0 \qquad (4)$$

ausdrücken. Nun wird aber diese Gleichung, was auch λ und μ seyn mögen, von allen Werthen von x, y, z befriedigt, welche den Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ zu gleicher Zeit genügen; d. i. alle die Flächen, welche die Gleichung (4) ausdrückt wenn man den Größen λ und μ immer andere und andere Werthe beilegt, enthalten die Durchschnittspunkte der drei Flächen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, also außer den sieben gegebenen Punkten noch einen und denselben achten Punkt.

Aus dem eben bewiesenen Satze fließt der folgende

Lehrsatz [21]. *Wenn man durch beliebige sieben Eckpunkte eines achteckigen und sechsseitigen Körpers irgend eine Fläche zweiten Grades legt, so geht diese auch durch den achten Eckpunkt.*

Denn jede zwei einander gegenüberstehenden Seitenebenen des genannten Körpers können als eine Fläche zweiten Grades, und die acht Eck-

*) Dieser Satz und der vorhergehende ist zuerst von Herrn Plücker aufgestellt und bewiesen worden.

§. 56. punkte desselben können als die Durchschnittspunkte dieser drei Flächen angesehen werden.

Nach diesen Sätzen mag noch der folgende, welcher schon vorher begründet worden, seine Stelle finden.

Lehrsatz [22]. Alle Flächen zweiten Grades, welche durch dieselben fünf, in einer und derselben Ebene liegenden Punkte gehen, schneiden sich in einer und derselben, in der nämlichen Ebene liegenden Linie zweiten Grades.

Ueber die Bestimmung einer Fläche zweiten Grades bemerken wir hier noch Folgendes.

Daß eine Fläche vom zweiten Grade eine gegebene gerade Linie enthalte, gilt für drei Bedingungen. Kömmt zu einer gegebenen Geraden noch eine zweite sie schneidende Gerade hinzu, so giebt dies zwei neue Bedingungen. Daher ist eine Fläche vom zweiten Grade, im Allgemeinen, völlig bestimmt: durch eine Gerade und sechs Punkte, oder durch zwei nicht in einer Ebene liegende Gerade und drei Punkte, oder durch zwei sich schneidende Gerade und vier Punkte, oder durch drei Gerade, von welchen zwei die dritte schneiden, und zwei Punkte, oder durch vier Gerade, welche ein schiefes Viereck bilden, und einen Punkt, oder endlich durch drei sich nicht schneidende Gerade.

Sind

$$az + a'y + a''x + 1 = 0 \quad ; \quad bz + b'y + b''x + 1 = 0$$
$$cz + c'y + c''x + 1 = 0 \quad ; \quad dz + d'y + d''x + 1 = 0$$

die Gleichungen der vier Seitenebenen eines Tetraeders, die wir, der Kürze wegen, durch $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ und $D = 0$ bezeichnen wollen; so können wir jede Fläche vom zweiten Grade, welche die Durchschnittslinie der beiden ersten und diejenige der beiden letzten, d. i. zwei gegenüber stehende Kanten des Tetraeders enthält, durch die Gleichung

$$AC + \lambda AD + \mu BC + \nu BD = 0 \qquad (5)$$

ausdrücken, wo λ, μ und ν willkürliche constante Factoren bedeuten. Denn diese Gleichung (5) wird, was auch λ, μ und ν seyn mögen, sowohl befriedigt wenn $A = 0$ und zugleich $B = 0$, als wenn $C = 0$ und zugleich $D = 0$ ist.

Wir können ferner jede Fläche zweiten Grades, welche die beiden Kanten des Tetraeders, in denen die Ebene $A = 0$ die Ebenen $B = 0$ und $C = 0$

C = 0 schneidet, und welche den der Ebene A = 0 gegenüber liegenden Eckpunkt enthält, durch die Gleichung §. 56.

$$AB + \lambda AC + \mu AD + \nu BC = 0 \qquad (6)$$

ausdrücken. Denn was auch λ, μ und ν seyn mögen, so wird diese Gleichung befriedigt, erstens wenn A = 0 und zugleich B = 0, zweitens wenn A = 0 und zugleich C = 0, drittens wenn gleichzeitig B = 0, C = 0, D = 0 ist.

Die Gleichung

$$AC + \lambda AD + \mu BC = 0 \qquad (7)$$

drückt jede Fläche zweiten Grades aus, welche die durch die Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{c} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\} ; \quad \left\{\begin{array}{c} A = 0 \\ C = 0 \end{array}\right\} ; \quad \left\{\begin{array}{c} C = 0 \\ D = 0 \end{array}\right\}$$

dargestellten drei Geraden enthält. Die zweite dieser Geraden schneidet die erste sowohl als die dritte.

Die Gleichung

$$AB + \lambda CD = 0 \qquad (8)$$

drückt jede Fläche zweiten Grades aus, welche die, durch die Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{c} A = 0 \\ C = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{c} A = 0 \\ D = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{c} B = 0 \\ C = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{c} B = 0 \\ D = 0 \end{array}\right\}$$

dargestellten vier Geraden enthält. Diese vier Linien bilden ein schiefes Viereck.

Die Bestimmung, daß eine Fläche zweiten Grades eine gegebene Linie desselben Grades enthalte, gilt für fünf Bedingungen. Daher ist eine solche Fläche wenn sie durch eine gegebne Linie zweiten Grades und durch vier gegebene Punkte gehen soll, im Allgemeinen, völlig bestimmt. Ist M = 0 die Gleichung der Ebene dieser Curve, und ist ferner N = 0 die Gleichung irgend einer Fläche vom zweiten Grade, welche dieselbe Curve enthält; so lassen sich alle Flächen zweiten Grades, welche diese Linie enthalten, durch die Gleichung

$$(\alpha z + \beta y + \gamma x + \delta)M + N = 0 \qquad (9)$$

ausdrücken, in welcher α, β, γ und δ vier willkürlich zu bestimmende Constanten bedeuten. Denn diese Gleichung ist vom zweiten Grade, indem M vom ersten, N aber vom zweiten Grade ist; und sie wird befriedigt von den Coordinaten aller derjenigen Punkte, welche der Ebene M = 0 und der Fläche N = 0 gemein sind. — Ist die Ebene der in Rede stehenden

§. 56. Linie zweiten Grades die Ebene der xy, so ist $M \equiv z = 0$; und ist ferner die Gleichung dieser Curve, oder, was hier dasselbe ist, die Gleichung der, durch diese Curve gelegten Cylinderfläche $N \equiv Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+1=0$, so sind alle Flächen zweiten Grades, welche die genannte Curve enthalten, durch die Gleichung

$$\alpha z^2 + Ay^2 + Cx^2 + Bxy + \beta yz + \gamma xz + \delta z + Dy + Ex + 1 = 0 \quad (10)$$

auszudrücken, in welcher nun A, B, ... E gegebene, hingegen α, β, γ, δ willkürliche Constanten bezeichnen.

Soll durch zwei gegebene Linien zweiten Grades, welche nicht in einer und derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, eine Fläche zweiten Grades gelegt werden können, so müssen diese beiden Curven sich in zwei (reellen oder imaginairen) Punkten schneiden oder sich in einem Punkte berühren. Denn nehmen wir die eine dieser beiden Ebenen zur Ebene der xy und die andere zur Ebene der xz, und ist, in Beziehung auf ein solches Coordinatensystem,

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+1 = 0$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, welche die beiden Curven enthält, so ergeben sich, indem wir z und y gleich Null setzen,

$$by^2+cx^2+2a'xy+2b''y+2c''x+1 = 0 \quad ,$$
$$az^2+cx^2+2b'xz+2a''z+2c''x+1 = 0$$

als die Gleichungen der beiden genannten Curven, deren Ebenen sich in der Achse der x schneiden. Diese Curven treffen aber die Achse der x, wie wir finden, wenn wir in der Gleichung der ersten $y = 0$, und in der Gleichung der zweiten $z = 0$ setzen, in zwei Punkten, deren Abscissen, für die eine Curve sowohl als für die andere, die Wurzeln der Gleichung

$$cx^2+2c''x+1 = 0 \quad ,$$

und folglich in beiden Curven dieselben sind.

Nachdem wir uns überzeugt haben, daß die Bedingung: die beiden Curven müssen sich in zwei (reellen oder imaginairen) Punkten schneiden oder in einem Punkte berühren, nöthig sey, damit eine Fläche zweiten Grades durch sie gelegt werden könne, wollen wir nachweisen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist. Nehmen wir zu dem Ende die Ebenen von irgend zwei gegebenen Linien zweiten Grades, welche sich in zwei (reellen oder imaginairen) Punkten schneiden, zu Ebenen der xy und der xz, so enthält die Achse der x, welche die Durchschnittslinie der beiden Ebenen ist, die, beiden Curven gemeinschaftlichen Punkte. Die Abscissen dieser Punkte werden die Wurzeln einer bestimmten Gleichung

$$Cx^2 + 2C''x + 1 = 0$$ §. 56.

seyn, und die Gleichungen der beiden gegebenen Curven werden dann nothwendigerweise die Formen

$$By^2 + Cx^2 + 2A'xy + 2B''y + 2C''x + 1 = 0$$
$$Az^2 + Cx^2 + 2B'xz + 2A''z + 2C'x + 1 = 0$$

haben. Die Gleichung

$$Az^2+By^2+Cx^2+2A'xy+2B'xz+2\lambda yz+2A''z+2B''y+2C''x+1=0 \quad (11)$$

stellt aber, welcher Werth dem λ auch beigelegt werden mag, immer eine reelle Fläche zweiten Grades dar, welche durch die beiden gegebenen Curven gehet. Denn sollte sie eine imaginaire Fläche oder einen einzigen Punkt ausdrücken, so müßte sie von keinen reellen Werthen von x, y, z oder nur von einem einzigen Systeme reeller Werthe dieser Größen befriedigt werden können, was nicht der Fall ist, da sie augenscheinlich von $z = 0$ und allen Werthen von x und y, welche der Gleichung der ersten Curve, so wie von $y = 0$ und allen Werthen von x und z, welche der Gleichung der zweiten Curve genügen, befriedigt wird; woraus denn auch zugleich folgt, daß diese reelle Fläche, wie wir gesagt haben, die genannten Curven enthalte. Es lassen sich also durch zwei Linien zweiten Grades, welche in zwei sich schneidenden Ebenen liegen, und die einander in zwei (reellen oder imaginairen) Punkten begegnen oder sich in einem Punkte berühren, immer unendlich viele Flächen zweiten Grades legen.

Die Bestimmung, daß eine Fläche zweiten Grades durch zwei Curven von der genannten Beschaffenheit gehen soll, gilt für acht Bedingungen. Kommt noch die Bestimmung hinzu, daß die Fläche durch einen, nicht in den gegebenen Curven liegenden, Punkt $x'y'z'$ gehen soll, so ist sie völlig bestimmt. Setzen wir in die Gleichung (11) x', y', z' für x, y, z, so haben wir eine Gleichung, welche außer λ nur gegebene Größen enthält, und aus der wir λ bestimmen können.

Soll durch zwei gegebene Linien zweiten Grades, welche sich in parallelen Ebenen befinden, eine Fläche zweiten Grades gelegt werden können, so müssen diese beiden Curven ähnlich seyn und ähnlich liegen, oder sie müssen zwei Hyperbeln seyn, deren Hauptachsen und Nebenachsen in umgekehrtem Verhältnisse stehen (§. 44).

Die bisher betrachteten Bestimmungen lieferten Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung (1), welche immer nur

§. 56. vom ersten Grade waren. Anders verhält es sich, wenn eine Bestimmung die Art der Fläche betrifft.

So ist die Bestimmung, daß eine Fläche vom zweiten Grade eine Kegelfläche sey, zwar nur für eine Bedingung zu zählen, aber die Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der Gleichung (1) der Fläche, welche diese eine Bedingung ausspricht, ist, zufolge §. 43,

$$\Delta' \equiv a''^2(a'^2-bc)+b''^2(b'^2-ac)+c''^2(c'^2-ab)+2a''b''(cc'-a'b')+2a''c''(bb'-a'c') + 2b''c''(aa'-b'c') + abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = 0$$

und somit vom vierten Grade.

So ist ferner die Bestimmung, daß eine Fläche zweiten Grades cylindrisch sey, für zwei Bedingungen zu zählen; es sind aber die Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der Gleichung (1), welche diese beiden Bedingungen aussprechen, beide vom dritten Grade.

§. 57.

Lehrsatz [23]. **Wenn man auf einer geradlinigen Fläche vom zweiten Grade beliebig viele schiefe Vierecke verzeichnet, von welchen ein jedes ein Tetraeder bestimmt, dessen drei erste Seitenebenen durch drei feste, in gerader Linie liegende Punkte gehen; so gehen auch die vierten Seitenebenen aller dieser Tetraeder durch einen und denselben, in der nämlichen Geraden liegenden Punkt.**

Wir nehmen, um diesen Satz, auf eine einfache Art, direct zu erweisen, die genannte Gerade zur Achse der z, auf welcher die drei festen Punkte drei Stücke p_1, p_2, p_3 abschneiden mögen. Die Gleichungen der vier Seitenebenen von irgend einem der genannten Tetraeder sind alsdann

$$z+m_1y+n_1x-p_1=0 \;\; ; \;\; z+m_2y+n_2x-p_2=0 \;\; ;$$
$$z+m_3y+n_3x-p_3=0 \;\; ; \;\; z+m_4y+n_4x-\gamma=0 \;\; .$$

Wenn nun

$$z^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d=0$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades ist, auf welcher sich das genannte Viereck befindet, so kann diese Fläche auch durch die Gleichung

$$(z+m_1y+n_1x-p_1)(z+m_2y+n_2x-p_2)+\lambda(z+m_3y+n_3x-p_3)(z+m_4y+n_4x-\gamma)=0$$

ausgedrückt werden (vor. §.). Identificiren wir diese beiden Gleichungen mit einander, so ergeben sich neun Bedingungsgleichungen zwischen den zehn Größen m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3, m_4, n_4, γ und λ; und wenn wir einer dieser Größen einen bestimmten Werth beilegen, so erhalten demnach die

übrigen ebenfalls bestimmte Werthe. Unter diesen neun Gleichungen nun §. 57. befinden sich die beiden folgenden

$$p_1 + p_2 + \lambda(p_3 + \gamma) + 2(1 + \lambda)a'' = 0 \quad ;$$
$$p_1 p_2 + \lambda p_3 \gamma - (1 + \lambda)d = 0 \quad ;$$

und eliminiren wir zwischen ihnen das λ, so kommt

$$(p_1 p_2 - d)(p_3 + 2a'' + \gamma) + (p_1 + p_2 + 2a'')(d - p_3 \gamma) = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, welche in Beziehung auf γ vom ersten Grade ist, und aus welcher diese Größe einen einzigen bestimmten Werth erhält, der, wie wir sehen, nur von den, als gegeben zu betrachtenden Größen a'', p_1, p_2, p_3 und d abhängt. Da nun γ dasjenige Stück ist, welches die vierte Ebene auf der Achse der z abschneidet, so folgt, daß die vierte Seitenebene des Tetraeders immer durch einen und denselben Punkt gehet, was zu zeigen war.

Lehrsatz [24]. *Wenn man auf einer geradlinigen Fläche vom zweiten Grade beliebig viele schiefe Vierecke verzeichnet, von welchen jedes ein Tetraeder bestimmt, dessen drei erste Seitenebenen drei festen, in einer Ebene liegenden Geraden parallel sind; so sind auch die vierten Seitenebenen aller dieser Tetraeder einer bestimmten, in derselben Ebene liegenden Geraden parallel.*

Wir nehmen die Ebene der genannten drei festen Geraden zur Ebene der xz, und wenn alsdann die Gleichungen dieser drei Linien

$$z + n_1 x + p_1 = 0 \quad ; \quad z + n_2 x + p_2 = 0 \quad ; \quad z + n_3 x + p_3 = 0$$

sind; so sind die Gleichungen der vier Seitenebenen von irgend einem der Tetraeder

$$z + m_1 y + n_1 x + \gamma_1 = 0 \quad ; \quad z + m_2 y + n_2 x + \gamma_2 = 0 \quad ;$$
$$z + m_3 y + n_3 x + \gamma_3 = 0 \quad ; \quad z + \mu y + \nu x + \gamma_4 = 0 \quad .$$

Wenn nun

$$z^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2a''z + 2b''y + 2c''x + d = 0$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades ist, auf welcher sich das genannte Viereck befindet, so kann diese Fläche auch durch die Gleichung

$$(z + m_1 y + n_1 x + \gamma_1)(z + m_2 y + n_2 x + \gamma_2)$$
$$+ \lambda(z + m_3 y + n_3 x + \gamma_3)(z + \mu y + \nu x + \gamma_4) = 0$$

ausgedrückt werden (vor. §.). Identificiren wir diese beiden Gleichungen mit einander, so ergeben sich neun Gleichungen, unter welchen sich die folgenden

$$n_1 n_2 + \lambda n_3 \nu = (1 + \lambda)c \quad ; \quad n_1 + n_2 + \lambda(n_3 + \nu) = 2(1 + \lambda)b' \quad ;$$

befinden. Eliminiren wir λ, so kommt

§. 57. $$(n_1 n_2 - c)(2b' - n_3 - \nu) = (n_1 + n_2 - 2b')(c - n_3 \nu) \quad ,$$

eine Gleichung, welche in Beziehung auf ν nur vom ersten Grade ist, und aus welcher diese Größe einen einzigen bestimmten Werth erhält, der, wie wir sehen, nur von den, als gegeben zu betrachtenden Größen n_1, n_2, n_3, b' und c abhängt und daher constant ist. Die vierte Seitenebene

$$z + \mu y + \nu x + \gamma_4 = 0$$

schneidet die Ebene der xz in einer Geraden, deren Gleichung

$$z + \nu x + \gamma_4 = 0 \quad ,$$

und welche, weil ν constant ist, einer unveränderlichen Richtung parallel läuft, was zu zeigen war.

§. 58.

Aufgabe [88]. *Es sind acht Punkte gegeben; man soll den Ort der Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades finden, welche diese acht Punkte enthalten.*

Sind

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2a''z + 2b''y + 2c''x + 1 = 0$$
$$\alpha z^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 + 2\alpha' xy + 2\beta' xz + 2\gamma' yz + 2\alpha'' z + 2\beta'' y + 2\gamma'' x + 1 = 0$$

die Gleichungen von zwei Flächen zweiten Grades, welche die gegebenen acht Punkte enthalten, so können wir jede andere Fläche dieses Grades, welche durch dieselben acht Punkte geht, durch die Gleichung

$$(a+\lambda\alpha)z^2 + (b+\lambda\beta)y^2 + (c+\lambda\gamma)x^2 + 2(a'+\lambda\alpha')xy + 2(b'+\lambda\beta')xz + 2(c'+\lambda\gamma')yz$$
$$+ 2(a''+\lambda\alpha'')z + 2(b''+\lambda\beta'')y + 2(c''+\lambda\gamma'')x + (1+\lambda) = 0$$

ausdrücken (§. 56). Die Coordinaten des Mittelpunktes dieser letztern Fläche sind durch die Gleichungen

$$(a + \lambda\alpha)z + (b' + \lambda\beta')x + (c' + \lambda\gamma')y + a'' + \lambda\alpha'' = 0$$
$$(b + \lambda\beta)y + (a' + \lambda\alpha')x + (c' + \lambda\gamma')z + b'' + \lambda\beta'' = 0$$
$$(c + \lambda\gamma)x + (a' + \lambda\alpha')y + (b' + \lambda\beta')z + c'' + \lambda\gamma'' = 0$$

bestimmt (§. 42. S. 3). Eliminiren wir das λ zwischen der ersten und zweiten, und zwischen der ersten und dritten dieser Gleichungen, so erhalten wir

$$(az+b'x+c'y+a'')(\beta y+\alpha' x+\gamma' z+\beta'') = (\alpha z+\beta' x+\gamma' y+\alpha'')(by+a'x+c'z+b'') \quad ,$$
$$(az+b'x+c'y+a'')(\gamma x+\alpha' y+\beta' z+\gamma'') = (\alpha z+\beta' x+\gamma' y+\alpha'')(cx+a'y+b'z+c'') \quad ,$$

zwei Gleichungen, welche von den Coordinaten der Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades, welche die acht Punkte enthalten, zu gleicher Zeit befriedigt werden müssen. Diese Mittelpunkte liegen also zugleich auf den beiden, durch diese Gleichungen ausgedrückten Flächen, und folglich auf dem

Durchschnitte derselben. Der Durchschnitt dieser beiden Flächen besteht aber in einer geraden Linie, welche durch das Gleichungssystem §. 58.

$$\left\{ az + b'x + c'y + a'' = 0 \quad ; \quad \alpha z + \beta' x + \gamma' y + \alpha'' = 0 \right\}$$

ausgedrückt ist, und aus einer Curve doppelter Krümmung, deren Projectionen vom dritten Grade sind. Diese Curve von doppelter Krümmung, welche in besonderen Fällen auch in eine ebene Curve degeneriren kann, ist der gesuchte Ort der Mittelpunkte.

Aufgabe [89]. Den Ort der Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades zu finden, welche sich in zwei gegebenen Linien zweiten Grades schneiden.

I. Wir nehmen, wenn die Ebenen der gegebenen Curven sich schneiden, diese Ebenen zu Ebenen der xz und der xy; ferner diejenigen Durchmesser dieser Curven, welche den der Achse der x parallelen Durchmessern conjugirt sind, respective zur Achse der z und der y. Diese gegebenen Curven, welche sich in zwei (reellen oder imaginairen) Punkten schneiden müssen (§. 56), sind alsdann durch die Gleichungssysteme

$$\left\{ \begin{matrix} az^2 + cx^2 + 2a'z + 1 = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} ; \quad \left\{ \begin{matrix} by^2 + cx^2 + 2b'y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\}$$

darzustellen; und jede Fläche vom zweiten Grade, welche diese Linien enthält, kann durch die Gleichung

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2\lambda yz + 2a'z + 2b'y + 1 = 0$$

ausgedrückt werden. Die Gleichungen, welche die Coordinaten des Mittelpunktes dieser Fläche geben, sind nun

$$az + \lambda y + a' = 0 \; ,$$
$$by + \lambda z + b' = 0 \; ,$$
$$cx = 0 \; ,$$

woraus wir, durch Elimination von λ, die beiden Gleichungen

$$az^2 - by^2 + a'z - b'y = 0 \quad ; \quad x = 0$$

erhalten. Diese Gleichungen drücken den gesuchten Ort aus, welcher demnach eine, in der Ebene der yz, d. i. in der Ebene der genannten conjugirten Durchmesser liegende, Linie zweiten Grades ist. Diese Linie gehet, wie wir sehen, durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. i. durch den Halbirungspunkt der, den beiden gegebenen Curven gemeinschaftlichen Sehne; sie geht ferner durch die Punkte, deren Coordinaten

§. 58.

$$\begin{Bmatrix} z = -\frac{a'}{a} & ; & y = 0 & ; & x = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} z = 0 & ; & y = -\frac{b'}{b} & ; & x = 0 \end{Bmatrix}$$

sind, d. i. durch die Mittelpunkte der gegebenen Curven; und ihr Mittelpunkt, dessen Coordinaten

$$z = -\tfrac{1}{2}\frac{a'}{a} \quad ; \quad y = -\tfrac{1}{2}\frac{b'}{b} \quad ; \quad x = 0$$

sind, ist der Halbirungspunkt der Verbindungslinie dieser Mittelpunkte der gegebenen Curven. Uebrigens findet sich leicht, daß

wenn die gegebenen Curven beide Ellipsen oder beide Hyperbeln sind,
so ist der gesuchte Ort eine Hyperbel oder zwei Gerade;

wenn die eine gegebene Curve eine Ellipse und die andere eine Hyperbel ist,
so ist der gesuchte Ort eine Ellipse;

wenn eine der gegebenen Curven eine Parabel ist,
so ist der gesuchte Ort auch eine Parabel;

wenn beide gegebene Curven Parabeln sind,
so ist der gesuchte Ort eine gerade Linie.

II. Wenn aber die Ebenen der gegebenen Curven einander parallel sind, so nehmen wir diejenige, welche ihre Entfernung halbirt, zur Ebene der xy. Die Gleichungen dieser beiden Ebenen sind alsdann

$$z + \alpha = 0 \quad \text{und} \quad z - \alpha = 0 \;.$$

Ist nun

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2a''z + 2b''y + 2c''x + 1 = 0$$

die Gleichung von irgend einer, die beiden gegebenen Curven enthaltenden Fläche zweiten Grades, so wird jede andere Fläche desselben Grades, welche diese Curven enthält, durch die Gleichung

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2a''z + 2b''y + 2c''x + 1 + \lambda(z^2 - \alpha^2) = 0$$

ausgedrückt werden können. Die Gleichungen, welche die Coordinaten des Mittelpunktes dieser Fläche geben, sind

$$az + b'x + c'y + a'' + \lambda z = 0$$
$$by + a'x + c'z + b'' = 0$$
$$cx + a'y + b'z + c'' = 0$$

Die beiden letzten dieser Gleichungen enthalten λ nicht; sie drücken eine gerade Linie aus, welche durch die Mittelpunkte der beiden gegebenen

Curven gehet, und diese Gerade ist, in dem gegenwärtigen Falle, der gesuchte Ort. §. 58.

Aufgabe [90]. Es sind zwei sich schneidende Ebenen, und in einer jeden derselben eine feste Linie vom zweiten Grade gegeben. Es soll der Ort der Mittelpunkte (Scheitel) aller Kegelflächen zweiten Grades gefunden werden, welche die in der ersten Ebene liegende Curve enthalten, und welche von der zweiten Ebene in Curven geschnitten werden, die der in ihr liegenden gegebenen Linie ähnlich sind und ähnlich liegen.

Wir nehmen die gegebenen Ebenen zu Ebenen der xy und der xz, und es seyen, wie in der vorigen Aufgabe,

$$by^2 + cx^2 + 2b'y + 1 = 0 \quad ; \quad az^2 + cx^2 + 2a'z + 1 = 0$$

die Gleichungen von zwei in diesen Ebenen liegenden, gegebenen Curven, welche sich auf der Achse der x schneiden. Soll eine Kegelfläche die erste dieser beiden Curven enthalten, so ist sie, wenn α, β, γ die Coordinaten ihres Mittelpunktes bedeuten, durch die Gleichung

$$b(\beta z - \gamma y)^2 + c(\alpha z - \gamma x)^2 + 2b'(\beta z - \gamma y)(z - \gamma) + (z - \gamma)^2 = 0$$

auszudrücken, wie wir, in Folge der 48. Aufgabe (§. 33), auf der Stelle finden. Setzen wir nun in dieser Gleichung $y = 0$, so ergiebt sich als Gleichung derjenigen Curve, in welcher die Ebene der xz diese Kegelfläche schneidet,

$$(b\beta^2 + c\alpha^2 + 2b'\beta + 1)z^2 + c\gamma^2 x^2 - 2c\alpha\gamma xz - 2(b'\beta + 1)\gamma z + \gamma^2 = 0 \quad .$$

Soll diese Curve nun der zweiten gegebenen Linie ähnlich seyn und ähnlich liegen, so müssen die beiden Gleichungen

$$a\gamma^2 = b\beta^2 + c\alpha^2 + 2b'\beta + 1 \quad \text{und} \quad c\alpha\gamma = 0$$

Statt haben. Und diese beiden Gleichungen stellen den gesuchten Ort dar, wenn wir α, β, γ als dessen laufende Coordinaten betrachten. Da die zweite Gleichung in zwei Factoren zerfällt, so besteht der in Rede stehende Ort aus zwei Curven, von welchen die erste durch das Gleichungssystem

$$\left|\; b\beta^2 + c\alpha^2 + 2b'\beta + 1 = 0 \quad ; \quad \gamma = 0 \;\right|$$

und die zweite durch das System

$$\left|\; a\gamma^2 - b\beta^2 - 2b'\beta - 1 = 0 \quad ; \quad \alpha = 0 \;\right|$$

ausgedrückt ist. Die erste dieser Curven ist augenscheinlich die in der ersten Ebene befindliche, gegebene Curve. Wenn man irgend einen beliebigen Punkt in dieser Curve annimmt, in der zweiten Ebene aber irgend eine Curve ver-

§. 58. zeichnet, welche der, in ihr befindlichen, gegebenen ähnlich und ähnlich liegend ist, sodann eine Gerade sich so bewegen läßt, daß sie fortwährend durch jenen Punkt und durch die verzeichnete Curve gehet; so wird diese Gerade einen Kegel beschreiben, der von der zweiten Ebene so wie es die Aufgabe fordert geschnitten wird, der aber die in der ersten Ebene befindliche Curve nicht enthält, inzwischen doch so beschaffen ist, daß jede erzeugende Gerade desselben durch die eben genannte Curve gehet, und in sofern der Bedingung der Aufgabe genügt. Schließt man nun die durch das erste Gleichungssystem dargestellte Curve aus, so ist der gesuchte Ort die durch das zweite System ausgedrückte Curve. Diese ist eine in der Ebene der yz befindliche Linie zweiten Grades, und zwar unter denselben Bedingungen, welche wir in I. der vorigen Aufgabe gefunden haben, eine Hyperbel, eine Ellipse, eine Parabel oder eine gerade Linie.

Als einen besondern Fall heben wir denjenigen heraus, in welchem die Kegelflächen von der zweiten Ebene in Kreisen geschnitten werden sollen. Alsdann ist $a = c$, und das zweite Gleichungssystem für den Ort der Mittelpunkte

$$\left\{ c\gamma^2 - b\beta^2 - 2b'\beta + 1 = 0 \quad ; \quad \alpha = 0 \right\} ;$$

dieser Ort also respective eine Hyperbel, eine Ellipse oder eine Parabel, je nachdem die feste Curve in der ersten Ebene eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel ist.

Aufgabe [91]. Den Ort der Mittelpunkte (Scheitel) aller Rotationskegel (geraden Kreiskegel) zu finden, welche durch eine gegebene Linie zweiten Grades gehen.

Wir nehmen die Ebene der gegebenen Curve zur Ebene der xy und die Coordinaten rechtwinklig.

Es sey erstens diese gegebene Curve eine Ellipse und ihre Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad , \qquad (1)$$

in welcher $a > b$. Soll nun ein Rotationskegel, welcher durch die Gleichung

$$\left\{ \cos\gamma(z-z') + \cos\beta(y-y') + \cos\alpha(x-x') \right\}^2 = \cos^2\delta \left\{ (z-z')^2 + (y-y')^2 + (x-x')^2 \right\} \quad (2)$$

neben welcher noch die Bedingungsgleichung

$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1 \qquad (3)$$

Statt findet, ausgedrückt ist (§. 34. S. 1 u. 2), die Curve (1) enthalten, so muß die Gleichung (2), wenn wir darin $z = 0$ setzen, der Gleichung (1),

nachdem wir diese mit einem, noch zu bestimmenden, Factor λ multiplicirt haben, identisch seyn. Dies giebt uns folgende sechs Gleichungen §. 58.

$$\cos^2\beta - \cos^2\delta = \lambda a^2 \quad ; \quad \cos\alpha\cos\beta = 0 \quad ; \quad \cos^2\alpha - \cos^2\delta = \lambda b^2 \quad ;$$

$$(\cos^2\beta - \cos^2\delta)y' + \cos\alpha\cos\beta x' + \cos\beta\cos\gamma z' = 0 \quad ;$$

$$(\cos^2\alpha - \cos^2\delta)x' + \cos\alpha\cos\beta y' + \cos\alpha\cos\gamma z' = 0 \quad ,$$

$$\left.\begin{array}{l}(\cos^2\gamma - \cos^2\delta)z'^2 + (\cos^2\beta - \cos^2\delta)y'^2 + (\cos^2\alpha - \cos^2\delta)x'^2 \\ + 2\cos\alpha\cos\beta x'y' + 2\cos\alpha\cos\gamma x'z' + 2\cos\beta\cos\gamma y'z'\end{array}\right\} = -\lambda a^2b^2 \quad .$$

Die zweite dieser sechs Gleichungen giebt entweder $\cos\alpha = 0$ oder $\cos\beta = 0$. Wollten wir nun $\cos\alpha = 0$ setzen, so würden sich die erste und dritte Gleichung auf

$$\cos^2\beta - \cos^2\delta = \lambda a^2 \quad \text{und} \quad -\cos^2\delta = \lambda b^2$$

zurückziehen, und, durch Elimination von δ,

$$\cos^2\beta = \lambda(a^2 - b^2)$$

geben. Wäre alsdann λ eine positive Größe, so würde $\cos^2\delta = -\lambda b^2$ eine negative, also $\cos\delta$ imaginair; wäre aber λ negativ, so würde $\cos^2\beta$ negativ, weil, unserer Voraussetzung zufolge, $a^2 - b^2 > 0$, also $\cos\beta$ imaginair. Wir können demnach nicht $\cos\alpha = 0$, sondern nur

$$\cos\beta = 0$$

setzen. Hierdurch reduciren sich die übrigen fünf Gleichungen auf

$$\cos^2\delta = -\lambda a^2 \quad ; \quad \cos^2\alpha - \cos^2\delta = \lambda b^2$$

$$\cos^2\delta y' = 0 \quad ; \quad (\cos^2\alpha - \cos^2\delta)x' + \cos\alpha\cos\gamma z' = 0 \quad ;$$

$$(\cos^2\gamma - \cos^2\delta)z'^2 - \cos^2\delta y'^2 + (\cos^2\alpha - \cos^2\delta)x'^2 + 2\cos\alpha\cos\gamma x'z' = -\lambda a^2b^2 \quad ;$$

und die Gleichung (3) auf

$$\cos^2\gamma + \cos^2\alpha = 1 \quad .$$

Zwischen diesen sechs Gleichungen haben wir die vier Größen α, γ, δ und λ zu eliminiren. Wir finden durch diese Elimination das Gleichungssystem

$$\left|\ (a^2-b^2)z'^2 - b^2x'^2 = -(a^2-b^2)b^2 \quad ; \quad y' = 0\ \right| \quad . \quad (4)$$

Der gesuchte Ort ist demnach eine Hyperbel, deren Ebene auf der Ebene der gegebenen Ellipse senkrecht steht. Die Hauptachse dieser Hyperbel ist $= 2\sqrt{a^2-b^2}$, ihre Nebenachse $= 2b$; demnach fallen ihre Scheitel mit den Brennpunkten der gegebenen Ellipse zusammen. Die Excentricität der gefundenen Hyperbel ist $= a$; demnach fallen ihre Brennpunkte mit den Scheiteln der gegebenen Ellipse zusammen.

Es sey **zweitens** die gegebene Curve eine Hyperbel, und ihre Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \quad , \quad (5)$$

§. 58. so dürfen wir nur, um den Ort der Mittelpunkte zu finden, in dem vorher erhaltenen Resultate (4), b^2 mit $-b^2$ vertauschen, wodurch wir auf der Stelle

$$\left\{ (a^2+b^2)z'^2 + b^2x'^2 = (a^2+b^2)b^2 \quad ; \quad y' = 0 \right\} \quad (6)$$

erhalten. Dieser Ort ist demnach eine Ellipse, deren größere Achse $= 2\sqrt{a^2+b^2}$ und deren kleinere Achse $= 2b$ ist; also fallen die Scheitel ihrer größern Achse mit den Brennpunkten der gegebenen Hyperbel zusammen. Die Excentricität der gefundenen Ellipse ist $= a$; also fallen ihre Brennpunkte mit den Scheiteln der gegebenen Hyperbel zusammen.

Es sey endlich drittens die gegebene Curve eine Parabel, und ihre Gleichung

$$y^2 - px = 0 \quad . \quad (7)$$

Verfahren wir wie bei der gegebenen Ellipse, so ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen

$$cos^2\beta - cos^2\delta = \lambda \quad ; \quad cos\,\alpha\, cos\,\beta = 0 \quad ; \quad cos^2\alpha - cos^2\delta = 0 \quad ;$$
$$(cos^2\beta - cos^2\delta)y' + cos\,\alpha\, cos\,\beta\, x' + cos\,\beta\, cos\,\gamma\, z' = 0 \quad ;$$
$$2(cos^2\alpha - cos^2\delta)x' + 2\,cos\,\alpha\, cos\,\beta\, y' + 2\,cos\,\alpha\, cos\,\gamma\, z' = \lambda p \quad ;$$
$$\left.\begin{array}{l}(cos^2\gamma - cos^2\delta)z'^2 + (cos^2\beta - cos^2\delta)y'^2 + (cos^2\alpha - cos^2\delta)x'^2 \\ + 2\,cos\,\alpha\, cos\,\beta\, x'y' + 2\,cos\,\alpha\, cos\,\gamma\, x'z' + 2\,cos\,\beta\, cos\,\gamma\, y'z'\end{array}\right\} = 0 \quad .$$

In Folge der zweiten dieser Gleichungen ist entweder $cos\,\alpha = 0$ oder $cos\,\beta = 0$. Wollten wir $cos\,\alpha = 0$ setzen, so würde aus der dritten Gleichung $cos\,\delta = 0$, also $\delta = \pm\frac{1}{2}\pi$ folgen, dann würde die erzeugende Gerade des Rotationskegels mit dessen Achse einen rechten Winkel bilden und die Kegelfläche somit in eine Ebene degeneriren. Setzen wir deshalb blos $cos\,\beta = 0$, so reduciren sich die übrigen fünf Gleichungen auf

$$cos^2\delta = -\lambda \quad ; \quad cos^2\alpha - cos^2\delta = 0 \quad ;$$
$$cos^2\delta\, y' = 0 \quad ; \quad 2(cos^2\alpha - cos^2\delta)x' + 2\,cos\,\alpha\, cos\,\gamma\, z' = \lambda p \quad ;$$
$$(cos^2\gamma - cos^2\delta)z'^2 - cos^2\delta\, y'^2 + (cos^2\alpha - cos^2\delta)x'^2 + 2\,cos\,\alpha\, cos\,\gamma\, x'z' = 0 \quad ,$$

und die Gleichung (3) auf

$$cos^2\gamma + cos^2\alpha = 1 \quad .$$

Eliminiren wir zwischen diesen sechs Gleichungen die vier Größen α, γ, δ und λ, so ergiebt sich das Gleichungssystem

$$\left\{ z'^2 = -p(x' - \tfrac{1}{4}p) \quad ; \quad y' = 0 \right\} \quad . \quad (8)$$

Der gesuchte Ort ist demnach eine, der gegebenen Parabel gleiche und auf deren Ebene senkrecht stehende Parabel; ihr Scheitel fällt mit dem Brenn-

punkte, und ihr Brennpunkt mit dem Scheitel der gegebenen Parabel zusammen. §. 58.

Wir können über die gefundenen Oerter noch Folgendes bemerken.

I. Da $cos\beta = 0$, so ist $\beta = \frac{1}{2}\pi$ und die Achsen der Rotationskegel liegen daher in der Ebene der xz, also in der Ebene des Ortes der Mittelpunkte. Auch können wir leicht die Gleichungen der Achse von einem der Rotationskegel finden, wenn dessen Mittelpunkt x'y'z' gegeben ist; denn da das Gleichungssystem dieser Achse

$$\left\{ cos\gamma(x-x') = cos\alpha(z-z') \quad ; \quad cos\gamma(y-y') = cos\beta(z-z') \right\}$$

ist, so kommt es nur darauf an $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$, oder vielmehr das Verhältniß dieser Größen zu bestimmen. Wir haben aber oben $cos\beta = 0$ und $y' = 0$ gefunden; die zweite Gleichung des Systems reducirt sich also auf $y = 0$. Ferner haben wir, wenn wir den Fall einer gegebenen Ellipse annehmen, unter den oben angegebenen reducirten fünf Gleichungen die folgenden drei:

$$cos^2\delta = -\lambda a^2 \; ; \; cos^2\alpha - cos^2\delta = \lambda b^2 \; ; \; (cos^2\alpha - cos^2\delta)x' + cos\alpha\, cos\gamma\, z' = 0;$$

und aus diesen finden wir leicht

$$cos^2\alpha = -\lambda(a^2 - b^2) \quad ; \quad cos\alpha\, cos\gamma = -\frac{\lambda b^2 x'}{z'} \; .$$

Multipliciren wir die erste Gleichung des vorher angeführten Systems mit $cos\alpha \cdot z'$, und substituiren sodann die so eben gefundenen Ausdrücke für $cos^2\alpha$ und $cos\alpha cos\gamma$, so haben wir auf der Stelle

$$\left\{ b^2x'(x-x') = (a^2-b^2)z'(z-z') \quad ; \quad y = 0 \right\}$$

oder auch

$$\left\{ (a^2-b^2)z'z - b^2x'x - [(a^2-b^2)z'^2 - b^2x'^2] = 0 \; ; \; y = 0 \right\} .$$

Da aber in Folge der Gleichungen (4) $(a^2-b^2)z'^2 - b^2y'^2 = -(a^2-b^2)b^2$ ist, so können wir die letzten Gleichungen in

$$\left\{ (a^2-b^2)z'z - b^2x'x = -(a^2-b^2)b^2 \quad ; \quad y = 0 \right\}$$

verwandeln. Diese Gleichungen sind es, welche die Achse des Rotationskegels, dessen Mittelpunkt in dem Punkte x'y'z' der Ortscurve liegt, ausdrücken. Dieselben Gleichungen drücken aber, wie wir wissen, auch die Tangente an dieser Curve (4) im Punkte x'y'z' aus, und es fällt daher die Achse des Kegels mit der eben genannten Tangente zusammen. Aehnliches würden wir gefunden haben, wenn wir den Fall einer gegebenen Hyperbel

§. 58. oder einer gegebenen Parabel angenommen hätten. Die Ortscurve der Mittelpunkte der in Rede stehenden Rotationskegel hat somit die bemerkenswerthe Eigenschaft, daß eine jede ihrer Tangenten die Achse desjenigen Rotationskegels ist, dessen Mittelpunkt in dem Berührungspunkte liegt.

II. Nennen wir eine Ellipse und eine Hyperbel, in welchen die Brennpunkte der ersten die Scheitel der zweiten, und die Scheitel der ersten die Brennpunkte der zweiten Linie sind, deren Ebenen aber senkrecht auf einander stehen, ferner zwei Parabeln, in welchen der Brennpunkt der ersten der Scheitel der zweiten, und der Scheitel der ersten der Brennpunkt der zweiten Parabel ist, deren Ebenen aber senkrecht auf einander stehen, zusammen gehörende Linien zweiten Grades, so können wir, in Folge der vorher gefundenen Resultate, sagen, daß jeder Kegel, dessen Oberfläche durch eine von zwei zusammen gehörenden Linien zweiten Grades geht und dessen Mittelpunkt in der andern dieser Linien liegt, ein Rotationskegel ist, dessen Achse mit der Tangente an dieser zuletzt genannten Curve zusammen fällt. Nehmen wir daher irgend zwei Punkte auf einer von zwei zusammen gehörenden Linie zweiten Grades an, und verbinden sie mit irgend einem Punkte der andern von diesen Linien, so machen diese Verbindungslinien gleiche Winkel mit der Tangente in dem zuletzt genannten Punkte.

Ferner ergiebt eine leichte Rechnung, wenn wir dabei die Gleichungen (1 u. 4) oder (5 u. 6) oder auch (7 u. 8) zum Grunde legen, daß, wenn wir die zuerst genannten zwei Punkte auf der einen Curve unverändert beibehalten, den zuletzt genannten Punkt auf der andern Curve aber fort bewegen, die Längen der erwähnten beiden Verbindungslinien sich zwar verändern, ihre Differenz aber immer constant bleibt; und dieser Satz ist blos dann zu modificiren, wenn die beiden als fest zu betrachtenden Punkte auf einer Hyperbel und zwar auf verschiedenen Zweigen derselben angenommen werden, ein Fall, in welchem nicht die Differenz sondern die Summe der genannten Geraden constant ist.

Wir können daher sagen, daß eine jede Linie zweiten Grades unzählig viele Brennpunkte habe, welche sämmtlich in einer, auf ihrer Ebene senkrechten Ebene liegen *). Der Ort dieser Brennpunkte ist für eine Ellipse eine Hyperbel, für eine Hyperbel eine Ellipse und für eine Parabel eine Parabel; die Scheitel des Ortes sind diejenigen Brennpunkte der Linie, welche

---

*) Dupin.

in ihrer Ebene liegen, und die, in der Ebene des Ortes liegenden Brennpunkte desselben sind die Scheitel der Curve.

III. Wir knüpfen an diese Ergebnisse folgende Betrachtung. Wenn wir durch die Mittelpunkte von drei gegebenen Kugelflächen S_1, S_2, S_3 eine Ebene (Centralebene) legen, so schneidet diese die drei Kugelflächen in drei Kreisen K_1, K_2, K_3. Beschreiben wir in der genannten Ebene einen Kreis K_4, der jene drei Kreise berührt, nehmen sodann den Mittelpunkt dieses Berührungskreises zu einem Brennpunkte einer Linie zweiten Grades, welche wir durch die drei Mittelpunkte der gegebenen Kugelflächen legen, beschreiben wir ferner die dieser Linie zweiten Grades zugehörende Curve; so ist diese letztere Linie zweiten Grades der Ort des Mittelpunktes einer veränderlichen Kugelfläche S_4, welche die drei Kugeln S_1, S_2, S_3 berührt (vergl. §. 40, Aufg. 61), was sich aus dem unter II. Gesagten leicht einsehen läßt.

§. 59.

Wir haben in §. 44 (Aufg. 64) gefunden, daß die Tangentialebene in einem Punkte $x'y'z'$ der Fläche

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (1)$$

durch die Gleichung

$$(az'+c'y'+b'x'+a'')z+(c'z'+by'+a'x'+b'')y+(b'z'+a'y'+cx'+c'')x$$
$$+a''z'+b''y'+c''x'+d = 0 \quad (2)$$

ausgedrückt werde.

Jede Fläche des zweiten Grades können wir, wie früher gezeigt worden ist, durch eine Gleichung von der Form

$$az^2+by^2+cx^2+2a''z+d = 0 \quad (3)$$

ausdrücken. Für diese Form ist die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $x'y'z'$, wie wir sogleich finden, wenn wir, in (2), a', b', c', b'' und c'' gleich Null setzen,

$$(az'+a'')z+by'y+cx'x+a''z'+d = 0 \quad . \quad (4)$$

Aufgabe [92]. Die Gleichungen einer Fläche zweiten Grades und einer Ebene sind gegeben. Es soll die Bedingungsgleichung gefunden werden, welche befriedigt werden muß, wenn diese Ebene eine Tangentialebene jener Fläche seyn soll.

I. Es seyen zuerst

$$az^2+by^2+cx^2 = \lambda \quad ; \quad mz+ny+px+q = 0$$

die gegebenen Gleichungen. Eine jede Tangentialebene an der, durch die

§. 59. erste Gleichung ausgedrückten Fläche hat, wie wir unmittelbar aus der Gleichung (4) finden wenn wir darin $a'' = 0$ und $d = -\lambda$ setzen, die Form

$$az'z + by'y + cx'x - \lambda = 0 \quad .$$

Identificiren wir diese Gleichung mit der gegebenen Gleichung der Ebene, so erhalten wir die drei Gleichungen

$$aqz' + \lambda m = 0 \quad ; \quad bqy' + \lambda n = 0 \quad ; \quad cqx' + \lambda p = 0 \quad .$$

Und da x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes sind, folglich die gegebene Gleichung der Ebene befriedigen müssen, so haben wir ferner

$$mz' + ny' + px' + q = 0 \quad .$$

Setzen wir in diese Gleichung für x', y', z' diejenigen Ausdrücke, welche uns die vorigen drei Gleichungen geben, so haben wir

$$\lambda(abp^2 + acn^2 + bcm^2) = abcq^2 \quad , \qquad (5)$$

welches die verlangte Bedingungsgleichung ist.

II. Es seyen

$$az^2 + by^2 + cx^2 = 0 \quad ; \quad mz + ny + px + q = 0$$

die gegebenen Gleichungen. Setzen wir in die Gleichung (4) $a'' = 0$ und $d = 0$, so zeigt sich, daß es die Gleichung

$$az'z + by'y + cx'x = 0$$

ist, die wir der gegebenen Gleichung der Ebene zu identificiren haben, wodurch wir die zwei Bedingungsgleichungen

$$\left\{ \quad q = 0 \quad ; \quad abp^2 + acn^2 + bcm^2 = 0 \quad \right\} \qquad (6)$$

finden.

III. Es seyen

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a''z = 0 \quad ; \quad mz + ny + px + q = 0$$

die gegebenen Gleichungen. Dann finden wir durch dasselbe Verfahren die Bedingungsgleichung

$$a''(a''bp^2 + a''cn^2 + 2bcmq) = abcq^2 \qquad (7)$$

IV. Es seyen zuletzt

$$by^2 + cx^2 + 2a''z + d = 0 \quad ; \quad mz + ny + px + q = 0$$

die gegebenen Gleichungen; so ergiebt sich auf dieselbe Weise die Bedingungsgleichung

$$ba''^2p^2 + ca''^2n^2 - bcdm^2 + 2bca''mq = 0 \quad . \qquad (8)$$

Nachdem wir diese Aufgabe gelöst haben, wollen wir untersuchen, welche

Punkte

Punkte eine Tangentialebene an einer Fläche zweiten Grades mit dieser gemein hat. §. 59.

Es sey zuerst

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \qquad (9)$$

die Gleichung der Fläche. Setzen wir, daß c^2 eine positive Größe sey, so ist, wenn a^2 und b^2 von demselben Zeichen sind, die Fläche ein Ellipsoid oder ein elliptisches Hyperboloid, und es ist, wenn a^2 und b^2 von entgegengesetzten Zeichen sind, die Fläche ein hyperbolisches Hyperboloid (§. 47). Die Tangentialebene in einem Punkte $x'y'z'$ dieser Fläche hat zur Gleichung

$$a^2b^2z'z + a^2c^2y'y + b^2c^2x'x = a^2b^2c^2 \quad , \qquad (10)$$

und es ist zugleich

$$a^2b^2z'^2 + a^2c^2y'^2 + b^2c^2x'^2 = a^2b^2c^2 \quad . \qquad (11)$$

Um nun zu finden, welche Punkte der Ebene (10) und der Fläche (9) gemein sind, müssen wir diejenigen Werthe von x, y, z aufsuchen, welche die Gleichungen (9) und (10) zugleich befriedigen. Ziehen wir zu dem Ende von der Summe der Gleichungen (9) und (11) die doppelt genommene Gleichung (10) ab, so bleibt

$$a^2b^2(z-z')^2 + a^2c^2(y-y')^2 + b^2c^2(x-x')^2 = 0 \quad . \qquad (12)$$

Subtrahiren wir ferner von der Gleichung (10) die Gleichung (11), so bleibt

$$a^2b^2z'(z-z') + a^2c^2y'(y-y') + b^2c^2x'(x-x') = 0 \quad . \qquad (13)$$

Die Elimination von $z-z'$ zwischen den Gleichungen (12) und (13) giebt

$$a^4(c^2y'^2+b^2z'^2)(y-y')^2+2a^2b^2c^2x'y'(x-x')(y-y')+b^4(c^2x'^2+a^2z'^2)(x-x')^2 = 0 \, , \quad (14)$$

und diese Gleichung drückt die Projection der ebenen Curve aus, in welcher die Fläche (9) von der Ebene (10) geschnitten wird. Es kommt jetzt darauf an, diese Gleichung (14) zu discutiren. Multipliciren wir sie mit $(c^2y'^2 + b^2z'^2)$, so erhält $(x-x')^2$ den Coefficienten

$$b^4\left\{c^4x'^2y'^2 + (a^2b^2z'^2 + a^2c^2y'^2 + b^2c^2x'^2)z'^2\right\} \quad ,$$

welcher sich in Folge der Gleichung (11) auf $b^4\left\{c^4x'^2y'^2 + a^2b^2c^2z'^2\right\}$ reducirt, und wir haben also

$$\begin{aligned} a^4(c^2y'^2 + b^2z'^2)^2(y-y')^2 &+ 2a^2b^2c^2x'y'(c^2y'^2 + b^2z'^2)(x-x')(y-y') \\ &+ (b^4c^4x'^2y'^2 + a^2b^6c^2z'^2)(x-x')^2 = 0 \quad , \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left\{a^2(c^2y'^2 + b^2z'^2)(y-y') + b^2c^2x'y'(x-x')\right\}^2 + a^2b^6c^2z'^2(x-x')^2 = 0.$$

Sind nun a^2 und b^2, also auch a^2 und b^6 von demselben Zeichen, so wird

§. 59. diese Gleichung, weil die Summe zweier Quadrate nicht Null seyn kann, offenbar nur befriedigt, wenn

$$y = y' \quad \text{und} \quad x = x'$$

ist, und sie drückt daher nur einen Punkt aus. — Sind aber a^2 und b^2, also auch a^2 und b^6 von entgegengesetzten Zeichen, so läßt sich die Gleichung, wenn wir, falls a^2 positiv und b^2 negativ, $-b^2$ für b^2, oder falls a^2 negativ und b^2 positiv, $-a^2$ für a^2 setzen, wie folgt, zerlegen:

$$\left\{a^2(c^2y'^2 - b^2z'^2)(y - y') - b^2c(cx'y' + abz')(x - x')\right\}$$
$$\times \left\{a^2(c^2y'^2 - b^2z'^2)(y - y') - b^2c(cx'y' - abz')(x - x')\right\} = 0$$

zerlegen, und drückt zwei gerade Linien aus, welche durch den Punkt $x'y'$ gehen.

Wenn also a^2 und b^2 von demselben Zeichen sind, d. i. wenn die Fläche ein Ellipsoid oder ein elliptisches Hyperboloid ist, so hat die Tangentialebene in einem Punkte $x'y'z'$ nur diesen Berührungspunkt mit der Fläche gemein; wenn aber a^2 und b^2 von entgegengesetzten Zeichen sind, d. i. wenn die Fläche ein hyperbolisches Hyperboloid ist, so wird sie von der Tangentialebene im Punkte $x'y'z'$ in diesem Punkte berührt und zugleich in zwei, durch diesen Punkt gehenden geraden Linien geschnitten.

Es sey nun ferner

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 2a^2b^2z \qquad (15)$$

die Gleichung der Fläche zweiten Grades. Setzen wir, daß b^2 eine positive Größe sey, so ist die Fläche ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, je nachdem a^2 positiv oder negativ ist (§. 48). Die Tangentialebene in einem Punkte $x'y'z'$ dieser Fläche hat zur Gleichung

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2(z + z') \quad , \qquad (16)$$

und es ist zugleich

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = 2a^2b^2z' \quad . \qquad (17)$$

Ziehen wir von der Summe der Gleichungen (15) und (17) die doppelt genommene Gleichung (16) ab, so bleibt

$$a^2(y - y')^2 + b^2(x - x')^2 = 0 \quad .$$

Ist nun nicht nur b^2 sondern auch a^2 eine positive Größe, so drückt diese Gleichung offenbar nur den einen Punkt $x'y'$ aus. Ist aber a^2 negativ, und setzen wir $-a^2$ für a^2, so läßt sie sich in

$$\left\{a(y - y') + b(x - x')\right\} \cdot \left\{a(y - y') - b(x - x')\right\} = 0$$

zerlegen, und drückt zwei gerade Linien aus. Die Tangentialebene hat daher mit dem elliptischen Paraboloide nur den Berührungspunkt gemein, sie schnei-

bet aber das hyperbolische Paraboloid in zwei durch diesen Berührungspunkt gehenden Geraden. §. 59.

Die hier gefundenen Resultate, die wir mit Absicht ohne weitere Vorbereitung, aus den Gleichungen der in Rede stehenden Flächen hergeleitet haben, ergeben sich ohne alle Rechnung, wenn wir die Coordinatenachsen so legen, daß die Tangentialebene selbst eine Coordinatenebene z. B. die der xy, und der conjugirte Durchmesser die Achse der z wird. Alsdann hat die Gleichung der Fläche, wie wir in §. 45 gefunden haben, die Form

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \quad ,$$

und die Gleichung der Tangentialebene im Anfangspunkte der Coordinaten ist

$$z = 0 \; .$$

Diese hat demnach mit der Fläche diejenigen Punkte gemein, deren Coordinaten die Gleichung

$$By^2 + Cx^2 = 0$$

befriedigen. Wenn B und C von demselben Zeichen sind, so drückt diese letzte Gleichung nur den Anfangspunkt der Coordinaten, d. i. den Berührungspunkt aus; wenn B und C von entgegengesetzten Zeichen sind, stellt sie zwei, durch den Anfangspunkt gehende Gerade dar. In dem ersten Falle ist aber die Fläche entweder ein Ellipsoid oder ein elliptisches Hyperboloid, oder auch, wenn A = 0 wäre, ein elliptisches Paraboloid; in dem zweiten Falle ist die Fläche ein hyperbolisches Hyperboloid, oder, wenn A = 0 wäre, ein hyperbolisches Paraboloid.

Wir halten es nicht für überflüssig, jetzt noch zu zeigen, daß jede Ebene, welche ein hyperbolisches Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid in einer Geraden schneidet, dieselbe Fläche nothwendigerweise noch in einer zweiten Geraden schneiden, und sie zugleich in dem Durchschnittspunkte dieser beiden Geraden berühren muß. Nehmen wir die genannte Ebene zur Ebene der yz und die gerade Linie, in welcher sie die krumme Fläche schneidet, zur Achse der z, so ist die Gleichung jener Ebene

$$x = 0 \; ,$$

und die Gleichung der Fläche zweiten Grades ist, weil z unbestimmt bleiben muß, wenn wir x = 0 und y = 0 setzen,

$$by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2b''y + 2c''x = 0 \; .$$

Um nun die Durchschnitte der genannten Ebene mit dieser Fläche zu finden, brauchen wir nur in der letzten Gleichung x = 0 zu setzen, wodurch

§. 59.

$$(by + 2c'z + 2b'')y = 0$$

hervorgehet. Der, in der Ebene der yz befindliche Durchschnitt besteht also aus den beiden, durch die Gleichungen

$$y = 0 \quad \text{und} \quad by + 2c'z + 2b'' = 0$$

ausgedrückten Geraden, welche sich in einem Punkte, dessen Coordinaten

$$x' = 0 \quad ; \quad y' = 0 \quad ; \quad z' = -\frac{b''}{c'}$$

sind, schneiden. Die Tangentialebene in einem Punkte $x'y'z'$ unserer Fläche hat zur Gleichung

$$(b'x'+c'y')z+(by'+a'x'+c'z'+b'')y+(cx'+a'y'+b'z'+c'')x+b''y'+c''x'=0 \ ,$$

und wenn wir hierin für x', y', z' die so eben angegebenen Ausdrücke setzen, so kommt

$$x = 0 \quad ;$$

es ist also die Ebene der yz selbst, welche die Fläche in dem genannten Durchschnittspunkte berührt, was wir zeigen wollten.

§. 60.

Aufgabe [93]. Die Gleichungen einer Fläche zweiten Grades und einer geraden Linie sind gegeben. Es soll die Bedingungsgleichung gefunden werden, welche Statt haben muß, wenn die gerade Linie die gegebene Fläche berühren soll.

I. Es sey

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 = \lambda \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche, und es seyen

$$\left\{ c(x-\alpha) = a(z-\gamma) \quad ; \quad c(y-\beta) = b(z-\gamma) \right\} \qquad (2)$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden. Geben wir der Gleichung (1) die Form

$$\left.\begin{array}{r} A(z-\gamma)^2 + B(y-\beta)^2 + C(x-\alpha)^2 \\ + 2A\gamma(z-\gamma) + 2B\beta(y-\beta) + 2C\alpha(x-\alpha) \\ + A\gamma^2 + B\beta^2 + C\alpha^2 - \lambda \end{array}\right\} = 0 \ , \qquad (3)$$

und eliminiren, zwischen den drei Gleichungen (2) und (3), $(x-\alpha)$ und $(y-\beta)$, so kommt

$$(Ac^2+Bb^2+Ca^2)(z-\gamma)^2+2c(Ac\gamma+Bb\beta+Ca\alpha)(z-\gamma)+c^2(A\gamma^2+B\beta^2+C\alpha^2-\lambda)=0 \ .$$

Hieraus ergeben sich, im Allgemeinen, für $(z-\gamma)$ und also auch für z zwei verschiedene Werthe, zu welchen, in Folge der Gleichungen (2), zwei Werthe für x und für y gehören, und diese zwei Coordinatenwerthe ent-

sprechen den Durchschnittspunkten der geraden Linie (2) mit der Fläche (1). §. 60.
Soll aber jene Gerade (2) die Fläche (1) berühren, so müssen diese beiden Durchschnittspunkte zusammen fallen, die genannten Coordinatenwerthe also einander gleich werden. Damit dies Statt finde, muß die zuletzt angegebene Gleichung zwei gleiche Wurzeln haben, und es muß also

$$(A\gamma^2+B\beta^2+C\alpha^2-\lambda)(Ac^2+Bb^2+Ca^2)-(Ac\gamma+Bb\beta+Ca\alpha)^2 = 0 \quad (4)$$

seyn, welches die gesuchte Bedingungsgleichung ist. Dieser Gleichung können wir auch die Form

$$\left.\begin{array}{l} A(B\beta^2+C\alpha^2-\lambda)c^2+B(A\gamma^2+C\alpha^2-\lambda)b^2+C(A\gamma^2+B\beta^2-\lambda)a^2 \\ \quad -2BC\alpha\beta ab-2AC\alpha\gamma ac-2AB\beta\gamma bc \end{array}\right\} = 0 \quad (5)$$

geben.

II. Es sey

$$Az^2+By^2+Cx^2+2A''z = 0 \quad (6)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche, und wie vorher das Gleichungssystem (2) dasjenige der gegebenen Geraden. Alsdann finden wir auf dieselbe Weise die Bedingungsgleichung

$$(A\gamma^2+B\beta^2+C\alpha^2+2A''\gamma)(Ac^2+Bb^2+Ca^2)-(Ac\gamma+Bb\beta+Ca\alpha-A''c)^2 = 0\ , \quad (7)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left.\begin{array}{l} \left\{A(B\beta^2+C\alpha^2+4A''\gamma)-A''^2\right\}c^2+B(A\gamma^2+C\alpha^2+2A''\gamma)b^2+C(A\gamma^2+B\beta^2+2A''\gamma)a^2 \\ \quad -2BC\alpha\beta ab-2C(A\gamma-A'')\alpha ac-2B(A\gamma-A'')\beta bc \end{array}\right\} = 0\ . \quad (8)$$

III. Es sey endlich

$$By^2+Cx^2+2A''z = 0 \quad (9)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche und das Gleichungssystem (2) drücke die gegebene Gerade aus. Alsdann finden wir, indem wir in der Gleichung (8) $A = 0$ setzen, die Bedingungsgleichung

$$\left.\begin{array}{l} A''^2c^2-B(C\alpha^2+2A''\gamma)b^2-C(B\beta^2+2A''\alpha)a^2 \\ \quad +2BC\alpha\beta ab-2A''C\alpha ac-2A''B\beta bc \end{array}\right\} = 0\ . \quad (10)$$

Aufgabe [94]. Eine Fläche zweiten Grades und ein Punkt sind gegeben. Es soll der Ort aller Geraden gefunden werden, welche durch den gegebenen Punkt gehen und die gegebene Fläche berühren.

Es sey

$$Az^2+By^2+Cx^2 = \lambda \quad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche, und α, β, γ seyen die Coordinaten des gegebenen Punktes. Alle Geraden, welche durch den gegebenen Punkt gehen, sind durch das Gleichungssystem

§ 60.
$$\left\{ c(x-\alpha) = a(z-\gamma) \quad ; \quad c(y-\beta) = b(z-\gamma) \right\} \qquad (2)$$

auszudrücken. Damit aber diese Geraden die gegebene Fläche berühren, muß die Bedingungsgleichung (5) befriedigt werden. Setzen wir in diese Gleichung (5), in Folge der Gleichungen (2),

$$\frac{a}{c} = \frac{x-\alpha}{z-\gamma} \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{y-\beta}{z-\gamma} \quad ,$$

so kommt

$$\left. \begin{array}{l} A(B\beta^2+C\alpha^2-\lambda)(z-\gamma)^2+B(A\gamma^2+C\alpha^2-\lambda)(y-\beta)^2+C(A\gamma^2+B\beta^2-\lambda)(x-\alpha)^2 \\ -2BC\alpha\beta(x-\alpha)(y-\beta)-2AC\alpha\gamma(x-\alpha)(z-\gamma)-2AB\beta\gamma(y-\beta)(z-\gamma) \end{array} \right\} = 0 \quad , \qquad (11)$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist. Dieser Ort ist demnach, im Allgemeinen, eine Kegelfläche zweiten Grades, deren Mittelpunkt (Scheitel) in dem gegebenen Punkte $\alpha\beta\gamma$ liegt; und diese Kegelfläche wird ein Berührungskegel der Fläche (1) genannt. Es degenerirt dieser Berührungskegel in einen Punkt, nämlich in den Punkt $\alpha\beta\gamma$, wenn, von diesem gegebenen Punkte aus, keine Gerade gezogen werden kann, welche die gegebene Fläche berührt; es degenerirt derselbe Kegel in eine Ebene, wenn der gegebene Punkt $\alpha\beta\gamma$ auf der gegebenen Fläche liegt, und zwar alsdann in die Tangentialebene dieses Punktes; es degenerirt der nämliche Kegel in zwei Ebenen, wenn die gegebene Fläche (1) selbst eine Kegelfläche ist, und das System dieser beiden Ebenen degenerirt wiederum in eine Gerade, wenn sich von dem gegebenen Punkte $\alpha\beta\gamma$ aus keine anderen Geraden ziehen lassen, welche die gegebene Kegelfläche (1) berühren.

Die Coordinaten aller Punkte, welche der Berührungskegel (11) mit der gegebenen Fläche (1) gemein hat, befriedigen die Gleichungen (1) und (11) zu gleicher Zeit. Sie befriedigen daher auch die Differenz dieser beiden Gleichungen. Multipliciren wir die Gleichung (1) mit dem constanten Factor $A\gamma^2+B\beta^2+C\alpha^2-\lambda$, und subtrahiren von dem Producte die Gleichung (11), welche auch

$$\left. \begin{array}{r} A(B\beta^2+C\alpha^2-\lambda)z^2+B(A\gamma^2+C\alpha^2-\lambda)y^2+C(A\gamma^2+B\beta^2-\lambda)x^2 \\ -2BC\alpha\beta xy-2AC\alpha\gamma xz-2AB\beta\gamma yz \\ +2\lambda(A\gamma z+B\beta y+C\alpha x)-\lambda(A\gamma^2+B\beta^2+C\alpha^2) \end{array} \right\} = 0$$

geschrieben werden kann, so bleibt

$$(A\gamma z+B\beta y+C\alpha x-\lambda)^2 = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, welche eine Ebene ausdrückt. Die Punkte, welche der Berührungskegel mit der gegebenen Fläche gemein hat, liegen also in einer Ebene, und jener Kegel berührt demnach diese Fläche in einer ebenen Curve,

welche wir die Berührungscurve nennen. Zu demselben Resultate werden §. 60. wir in der Lösung der folgenden Aufgabe auf einem andern Wege gelangen, zuvor aber wollen wir noch bemerken, daß wenn, statt der Gleichung (1), die Gleichung

$$By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \qquad (9)$$

diejenige der gegebenen Fläche ist, der Berührungskegel, dessen Mittelpunkt (Scheitel) im Punkte $\alpha\beta\gamma$ liegt, durch die Gleichung

$$\left.\begin{matrix} A''^2(z-\gamma)^2 - B(C\alpha^2+2A''\gamma)(y-\beta)^2 - C(B\beta^2+2A''\gamma)(x-\alpha)^2 \\ +2BC\alpha\beta(x-\alpha)(y-\beta) - 2A''C\alpha(x-\alpha)(z-\gamma) - 2A''B\beta(y-\beta)(z-\gamma) \end{matrix}\right\} = 0 \qquad (12)$$

ausgedrückt wird, was sich vermittelst der Bedingungsgleichung (10) ergiebt. Ist aber, allgemein,

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \qquad (13)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche, so findet sich, auf ähnliche Weise,

$$P^2 = M \cdot N \qquad (14)$$

als die Gleichung desjenigen Berührungskegels, dessen Mittelpunkt im Punkte $\alpha\beta\gamma$ liegt, wenn wir

$$\left\{\begin{matrix} (a\gamma + c'\beta + b'\alpha + a'')z + (c'\gamma + b\beta + a'\alpha + b'')y \\ (b'\gamma + a'\beta + c\alpha + c'')x + a''\gamma + b''\beta + c''\alpha + d \end{matrix}\right\} \text{ durch } P \;,$$

$$a\gamma^2+b\beta^2+c\alpha^2+2a'\alpha\beta+2b'\alpha\gamma+2c'\beta\gamma+2a''\gamma+2b''\beta+2c''\alpha+d \text{ durch } M \;,$$

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d \text{ durch } N$$

bezeichnen.

§. 61.

Aufgabe [95]. Es ist eine Fläche zweiten Grades und ein Punkt gegeben. Man soll den Ort der Punkte finden, in welchen diejenigen Tangentialebenen der Fläche, welche durch den gegebenen Punkt gehen, diese Fläche berühren.

Es sey

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche, und es seyen t, u, v die Coordinaten des gegebenen Punktes.

Nennen wir die Coordinaten eines Berührungspunktes x', y', z', so ist die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkte (§. 44. Aufg. 64).

$$(az'+c'y'+b'x'+a'')z+(c'z'+by'+a'x'+b'')y+(b'z'+a'y'+cx'+c'')x+a''z'+b''y'+c''x'+d = 0 \;.$$

Soll diese Tangentialebene durch den Punkt tuv gehen, so muß ihre Gleichung von seinen Coordinaten befriedigt werden, so daß wir haben

$$(az'+c'y'+b'x'+a'')v+(c'z'+by'+a'x'+b'')u+(b'z'+a'y'+cx'+c'')t+a''z'+b''y'+c''x'+d = 0 ,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(av+c'u+b't+a'')z'+(c'v+bu+a't+b'')y'+(b'v+a'u+ct+c'')x'+a''v+b''u+c''t+d = 0 .$$

Da nun ferner der Berührungspunkt auch auf der gegebenen Fläche liegt, so befriedigen die Coordinaten x', y', z' nicht nur die so eben aufgestellte Gleichung, sondern auch die Gleichung dieser Fläche, und wenn wir die Accente von den Coordinaten des Berührungspunktes, dessen Ort wir suchen, weglassen, so haben wir zur Bestimmung dieses Ortes die Gleichung

$$(av+c'u+b't+a'')z+(c'v+bu+a't+b'')y+(b'v+a'u+ct+c'')x+a''v+b''u+c''t+d = 0 \quad (2)$$

und die Gleichung (1) der gegebenen Fläche. Der gesuchte Ort ist demnach diejenige Curve, in welcher die gegebene Fläche (1) von der Ebene (2) geschnitten wird, und somit eine Linie zweiten Grades.

Die Ebene (2) ist, wie wir sehen, immer reell, es mögen sich durch den gegebenen Punkt tuv Tangentialebenen an die Fläche (1) legen lassen oder nicht. Diese Ebene schneidet aber nur in dem ersten Falle die Fläche (1) in einer reellen Curve.

Ziehen wir in einer jeden der, durch den gegebenen Punkt gehenden Tangentialebenen diejenige Gerade, welche diesen gegebenen Punkt mit dem in derselben Ebene liegenden Berührungspunkt verbindet, so bilden alle diese Geraden den, in der vorigen Aufgabe, betrachteten Berührungskegel, zu welchem die so eben genannte Linie zweiten Grades als Berührungscurve gehört.

Die Lösung der letzten Aufgabe giebt zu folgenden wichtigen Bemerkungen Veranlassung.

Es erhellet aus der Form der Gleichung (2), welche mit der Gleichung (11) des §. 25 identisch ist, daß in jedem Falle, es mag sich nämlich von dem Punkte tuv aus ein Berührungskegel an die Fläche (1) legen lassen oder nicht, diese Ebene (2) als Polarebene des Punktes tuv, und demnach der Punkt tuv als Pol der Ebene (2) zu betrachten ist. Es werden somit durch eine jede Fläche zweiten Grades, auf diese Weise, zwei reciproke Systeme constituirt, welche, zufolge Desjenigen, was wir in §. 25 gesehen haben, auch reciprok-liegend sind. — Da die Constanten in der Gleichung (2) dieselben sind, als diejenigen, welche in der Gleichung (1) der genannten Fläche vorkommen, so ist mit dieser Fläche zugleich die Reciprocität der beiden Systeme und ihre Lage im Raume individualisirt; deshalb nennen wir die Fläche (1), aus deren Gleichung wir hier die Gleichung (2) der Polar-

ebene abgeleitet haben, die **Directrix der Reciprocität**. Wenn die Gleichung der Polarebene (2), oder, was dasselbe ist, wenn die Gleichung, durch welche die Beziehung zweier **reciproken** und **reciprok-liegenden** Systeme gegeben ist, so finden wir die Gleichung (1) der Directrix dadurch, daß wir in der gegebenen Gleichung (2) $v = z$, $u = y$ und $t = x$ setzen, wie der Augenschein lehrt. Die Directrix zweier reciproken und reciprok-liegenden Systeme ist demnach der Ort derjenigen Pole, welche in ihren Polarebenen liegen. §. 61.

Daraus, daß die Ebene der Berührungscurve des, von einem Punkte tuv aus, einer Fläche zweiten Grades umschriebenen Kegels als Polarebene dieses Punktes zu betrachten ist, ergiebt sich der folgende

Lehrsatz [25]. *Wenn der Mittelpunkt (Scheitel) eines Kegels, welcher einer Fläche zweiten Grades umschrieben ist, sich auf einer Ebene bewegt, so dreht sich die Ebene der Berührungscurve um einen Punkt, wenn aber derselbe Mittelpunkt sich auf einer Geraden bewegt, so dreht sich die Ebene der Berührungscurve um eine Gerade; und umgekehrt, wenn die Ebene der Berührungscurve sich um einen Punkt dreht, so beschreibt der Mittelpunkt des Berührungskegels eine Ebene, wenn aber die Ebene der Berührungscurve sich um eine Gerade dreht, so beschreibt derselbe Mittelpunkt eine Gerade.*

Jetzt gehen wir an die Lösung der folgenden

Aufgabe [96]. *Es ist eine Fläche zweiten Grades und eine gerade Linie gegeben; man soll diejenigen Tangentialebenen jener Fläche finden, welche die gegebene Gerade enthalten.*

Da die Pole aller Ebenen, welche die gegebene Gerade enthalten, in der Polarlinie dieser Geraden liegen, so werden auch die Pole der gesuchten Tangentialebenen in dieser Polarlinie befindlich seyn; da aber eben diese Pole zugleich die Berührungspunkte derselben Tangentialebenen sind, und also auf der gegebenen Fläche liegen, so sind sie die Durchschnittspunkte der genannten Polarlinie und der gegebenen Fläche. Wenn also die Gleichung (1) diejenige der gegebenen Fläche ist, und wenn die Gleichungen

$$\left\{ y = mz + m' \; ; \quad x = nz + n' \right\} \qquad (3)$$

die gegebene Gerade ausdrücken, so sind, zufolge §. 23. (S. 7), die Gleichungen der Polarlinie

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+c'm+b'n)z+(c'+bm+a'n)y+(b'+a'm+cn)x+a''+b''m+c''n = 0 \; ; \\ (c'm'+b'n'+a'')z+(bm'+a'n'+b'')y+(a'm'+cn'+c'')x+b''m'+c''n'+d = 0 \end{array} \right\} . \qquad (4)$$

§. 61. Bestimmen wir aus diesen Gleichungen (4) und der Gleichung (1) die Werthe von x, y, z, und legen durch die gegebene Gerade (3) und durch einen jeden der, auf diese Weise bestimmten Punkte eine Ebene, so ist eine jede dieser Ebenen die verlangte Tangentialebene.

Wenn die gegebene Gerade die Fläche zweiten Grades schneidet, so giebt es, falls diese geradlinig ist, im Allgemeinen, zwei Tangentialebenen, und falls sie nicht geradlinig ist, im Allgemeinen, keine Tangentialebene, welche die gegebene Gerade enthält. Wenn aber jene gegebene Gerade die Fläche zweiten Grades nicht schneidet, so giebt es, falls diese geradlinig ist, im Allgemeinen, keine Tangentialebene, und falls sie nicht geradlinig ist, im Allgemeinen, zwei Tangentialebenen, welche die gegebene Gerade enthalten.

Aufgabe [97]. *An eine gegebene Fläche zweiten Grades eine Tangentialebene zu legen, welche einer gegebenen Ebene parallel ist.*

Es sey die Gleichung (1) diejenige der gegebenen Fläche zweiten Grades, und

$$mz + ny + px + 1 = 0 \qquad (5)$$

sey die Gleichung der gegebenen Ebene. Nennen wir die Coordinaten des noch unbekannten Berührungspunktes x', y', z', so ist die Gleichung der Tangentialebene

$$(az'+c'y'+b'x'+a'')z+(c'z'+by'+a'x'+b'')y+(b'z'+a'y'+cx'+c'')x+a''z'+b''y'+c''x'+d = 0 \ .$$

Da aber diese Tangentialebene der gegebenen Ebene (5) parallel seyn soll, so muß

$$\frac{c'z'+by'+a'x'+b''}{az'+c'y'+b'x'+a''} = \frac{n}{m} \quad ; \quad \frac{b'z'+a'y'+cx'+c''}{az'+c'y'+b'x'+a''} = \frac{p}{m} \ .$$

Schaffen wir in diesen Gleichungen die Nenner fort, so kommt, wenn wir die nicht mehr nöthigen Accente von den Coordinaten des Berührungspunktes weglassen,

$$\left.\begin{aligned} m(c'z+by+a'x+b'') &= n(az+c'y+b'x+a'') \ , \\ m(b'z+a'y+cx+c'') &= p(az+c'y+b'x+a'') \ . \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Entwickeln wir aus diesen beiden Gleichungen (6) und der Gleichung (1) x, y, z, so erhalten wir für eine jede dieser Größen, im Allgemeinen, doppelte Werthe. Auf diese Weise sind die Coordinaten von zwei Punkten der Fläche (1) bestimmt, in denen die Tangentialebene der gegebenen Ebene (5) parallel ist; wodurch die Aufgabe als gelöst betrachtet werden kann.

Wir bemerken hierbei, daß die Gleichungen (6) eine Gerade darstellen, und daß diese Linie durch denjenigen Punkt geht, für welchen

$$az+c'y+b'x+a'' = 0 \ ; \ c'z+by+a'x+b'' = 0 \ ; \ b'z+a'y+cx+c'' = 0$$

ist. Dieser Punkt ist aber der Mittelpunkt der Fläche (1), wie wir in §. 42. (Aufg. 63) gefunden haben, und die Gerade (6) ist somit ein Durchmesser dieser Fläche. Es erhellet hieraus, daß an ein Paraboloid und an eine Kegelfläche nicht zwei Tangentialebenen gelegt werden können, die einander parallel sind. §. 61.

§. 62.

Es ist hier der Ort die einzelnen Fälle zu betrachten, welche die, im vorigen §. angeführte Gleichung (1), indem sie zur Directrix der Reciprocität genommen wird, darbietet.

I. Es sey die Directrix ein Ellipsoid, und durch die, auf dessen Achsen bezogene Gleichung

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \qquad (1)$$

ausgedrückt. Alsdann ist die Gleichung der Polarebene eines Punktes tuv, oder, was dasselbe ist, die Gleichung, welche die Beziehung der Reciprocität der beiden Systeme darstellt,

$$a^2b^2vz + a^2c^2uy + b^2c^2tx = a^2b^2c^2 \qquad (2)$$

Da diese Gleichung (2) die Form der ersten Gleichung (26) des §. 25 hat, so ist die Reciprocität der beiden Systeme elliptisch. — Drehen wir das System der tuv um eine der drei Coordinatenachsen, z. B. um die Achse der v, bis der Drehungswinkel zwei rechte beträgt, so geht die Gleichung (2) in

$$a^2b^2vz - a^2c^2uy - b^2c^2tx = a^2b^2c^2 \qquad (3)$$

über. Die beiden reciproken Systeme sind in dieser neuen Lage wieder reciprok-liegend, da auch die Gleichung (3) in Beziehung auf x u. t, y u. u und z u. v symmetrisch ist. Die durch diese Gleichung (3), deren Form mit der Form der zweiten Gleichung (26) des §. 25 übereinstimmt, ausgedrückte Reciprocität ist elliptisch geblieben, und als Gleichung der Directrix finden wir, indem wir t = x, u = y und v = z setzen,

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \quad ;$$

diese Directrix ist also ein elliptisches Hyperboloid. — Aehnliche Resultate ergeben sich, wenn wir das System der tuv um die Achse der u und um die Achse der t drehen.

II. Es sey die Directrix ein elliptisches Hyperboloid und durch die auf dessen Achsen bezogene Gleichung

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \qquad (4)$$

ausgedrückt. Alsdann ist die Gleichung der Polarebene eines Punktes tuv,

§. 61. oder, was dasselbe ist, die Gleichung, welche die Reciprocität der beiden Systeme darstellt,

$$a^2b^2vz - a^2c^2uy - b^2c^2tx = a^2b^2c^2 \quad . \qquad (5)$$

Da diese Gleichung die Form der zweiten Gleichung (26) des §. 25 hat, so ist die Reciprocität elliptisch. — Drehen wir das System der tuv nach einander um die Achse der v, der u und der t, und zwar so lange, bis der Drehungswinkel zwei rechte beträgt, so geht die Gleichung (5) nach einander in

$$a^2b^2vz + a^2c^2uy + b^2c^2tx = a^2b^2c^2 \quad , \qquad (6)$$
$$-a^2b^2vz - a^2c^2uy + b^2c^2tx = a^2b^2c^2 \quad , \qquad (7)$$
$$-a^2b^2vz + a^2c^2uy - b^2c^2tx = a^2b^2c^2 \qquad (8)$$

über. Die beiden reciproken Systeme sind in diesen neuen Lagen wieder reciprok-liegend, und als Gleichung der Directrix der Reciprocität, welche elliptisch geblieben ist, finden wir nach einander

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \quad ,$$
$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = -a^2b^2c^2 \quad ,$$
$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = -a^2b^2c^2 \quad .$$

Die Directrix für die erste veränderte Lage ist demnach ein Ellipsoid, und für die zweite und dritte veränderte Lage ist sie wieder ein elliptisches Hyperboloid.

III. Es sey die Directrix ein hyperbolisches Hyperboloid und durch die, auf dessen Achsen bezogene Gleichung

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \qquad (9)$$

ausgedrückt. Alsdann ist die Gleichung der Polarebene eines Punktes tuv

$$a^2b^2vz + a^2c^2uy - b^2c^2tx = a^2b^2c^2 \quad , \qquad (10)$$

welche zugleich die Reciprocität der beiden Systeme ausdrückt. Da diese Gleichung (10), der Form nach, mit der vierten Gleichung (27) im §. 25 übereinstimmt, so ist die Reciprocität hyperbolisch. — Drehen wir das System der tuv nach einander um die Achse der v, der u und der t, wodurch die beiden Systeme von neuem reciprok liegen und hyperbolisch-reciprok bleiben werden, so finden wir als Gleichung der Directrix in diesen neuen Lagen nach einander

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \quad ,$$
$$-a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \quad ,$$
$$-a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2 \quad .$$

Die Directrix für die erste und zweite veränderte Lage ist also wieder ein hyperbolisches Hyperboloid; die Directrix für die dritte veränderte Lage der

beiden Systeme ist aber eine imaginaire Fläche, d. h. bei dieser Lage befin-
det sich kein Punkt in seiner Polarebene.

IV. Es sey die Directrix eine Kegelfläche, und

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = 0 \qquad (11)$$

deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten. Alsdann ist es die Gleichung

$$a^2b^2vz + a^2c^2uy - b^2c^2tx = 0 \quad , \qquad (12)$$

welche die Polarebene des Punktes tuv und die Reciprocität der beiden Systeme darstellt. Diese ist folglich von der speciellen Art, welche wir in §. 28 die conische Reciprocität genannt haben. — Drehen wir das System der tuv nach einander um eine jede der Coordinatenachsen, so werden die beiden Systeme von neuem reciprok-liegend, indem sie conisch-reciprok bleiben. Als Gleichung der Directrix in diesen neuen Lagen finden wir nach einander

$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = 0 \quad ,$$
$$a^2b^2z^2 - a^2c^2y^2 - b^2c^2x^2 = 0 \quad ,$$
$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = 0 \quad .$$

Die Directrix für die erste und zweite veränderte Lage ist also wieder eine Kegelfläche; die Directrix für die dritte veränderte Lage aber ist ein Punkt.

Eine jede der vier Flächen, welche wir bis jetzt betrachtet haben, hat einen Mittelpunkt, und dieser ist offenbar auch der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden reciproken und reciprok-liegenden Systeme, welche durch jene Fläche constituirt werden.

V. Es sey die Directrix ein elliptisches Paraboloid und in rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichung (§. 48. G. 1).

$$2a^2b^2z + a^2b^2h = a^2py^2 + b^2px^2 \qquad (13)$$

dargestellt. Alsdann ist es die Gleichung

$$a^2b^2z + a^2b^2v + a^2b^2h = a^2puy + b^2ptx \quad , \qquad (14)$$

welche sowohl die Polarebene des Punktes tuv als auch die Reciprocität der beiden Systeme ausdrückt. Diese reciproken Systeme haben, eben so wie ihre Directrix (13), keinen Mittelpunkt, was wir, in der Kürze, auf folgende Art nachzuweisen nicht für überflüssig halten. Sind nämlich in der Gleichung

$$my + nx = z + q$$

die Coefficienten m und n constant, q aber veränderlich, so drückt diese Gleichung alle einer bestimmten Ebene parallele Ebenen aus, und wir haben, um den Ort der Pole aller dieser parallelen Ebenen, d. i. den conjugirten Durchmesser, zu finden, die Gleichungen

§. 62. $$\frac{pu}{b^2} = m \quad ; \quad \frac{pt}{a^2} = n \quad ; \quad v + h = q \quad ,$$

aus welchen wir

$$u = \frac{m}{p} b^2 \quad ; \quad t = \frac{n}{p} a^2$$

finden. Jeder Durchmesser des einen oder des andern der beiden Systeme ist also auf der Ebene der tu oder der xy senkrecht; folglich sind alle Durchmesser einander, und der Achse des Paraboloids parallel; die beiden reciproken Systeme haben daher keine Mittelpunkte (vergl. §. 23). — Drehen wir das System der tuv um die Achse der v, d. i. um die Achse des Paraboloids bis der Drehungswinkel zwei rechte beträgt, so geht die Gleichung (14) in

$$a^2b^2z + a^2b^2v + a^2b^2h = -a^2puy - b^2ptx$$

über, und da diese letzte Gleichung in Beziehung auf z u. v, y u. u und x u. t ebenfalls symmetrisch ist, so sind die beiden Systeme von neuem reciprok-liegend. Bei dieser veränderten Lage der beiden reciproken Systeme ist ihre Directrix durch die Gleichung

$$2a^2b^2z + a^2b^2h = -a^2py^2 - b^2px^2$$

ausgedrückt, und daher wieder ein elliptisches Paraboloid, welches auch dem, durch die Gleichung (13) ausgedrückten Paraboloide vollkommen gleich ist aber eine entgegengesetzte Lage hat. — Wollten wir das System der tuv um die Achse der u und der t drehen bis der Drehungswinkel zwei rechte beträgt, so würde die Gleichung (14) respective in die Gleichungen

$$a^2b^2v - a^2b^2z = a^2b^2h - a^2puy + b^2ptx \quad ;$$
$$a^2b^2v - a^2b^2z = a^2b^2h + a^2puy - b^2ptx$$

übergehen, welche in Beziehung auf v u. z, y u. u und x u. t nicht symmetrisch sind; denn wenn wir v mit z, u mit y und t mit x gegenseitig vertauschen, so bleiben die zweiten Theile ungeändert, während die ersten Theile ihr Zeichen wechseln.

VI. Es sey die Directrix ein hyperbolisches Paraboloid, und in rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichung

$$2a^2b^2z + a^2b^2h = a^2py^2 - b^2px^2 \qquad (15)$$

dargestellt. Alsdann ist es die Gleichung

$$a^2b^2z + a^2b^2v + a^2b^2h = a^2puy - b^2ptx \quad , \qquad (16)$$

welche sowohl die Polarebene des Punktes tuv als die Reciprocität der beiden Systeme ausdrückt. Auch diese Systeme haben, eben so wie ihre Di-

rectrix, keinen Mittelpunkt, indem alle ihre Durchmesser einander und der Achse des Paraboloids (15) parallel sind, was sich wie in V. zeigen läßt. — Drehen wir das System der tuv um die Achse der v, d. i. um die Achse des Paraboloids bis der Drehungswinkel zwei rechte beträgt, so geht die Gleichung (16) in

§. 62.

$$a^2b^2z + a^2b^2v + a^2b^2h = -a^2puy + b^2ptx$$

über, und die beiden Systeme sind von neuem reciprok-liegend. Bei dieser veränderten Lage ist die Directrix der beiden Systeme durch die Gleichung

$$2a^2b^2z + a^2b^2h = -a^2py^2 + b^2px^2$$

ausgedrückt, und daher wieder ein hyperbolisches Paraboloid, welches auch dem, durch die Gleichung (15) ausgedrückten Paraboloide vollkommen gleich ist aber eine entgegengesetzte Lage hat.

VII. Ist die Directrix eine Kugelfläche und in rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichung

$$z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \qquad (17)$$

ausgedrückt, so stellt die Gleichung

$$vz + uy + tx = r^2 \qquad (18)$$

die Beziehung der Reciprocität der beiden Systeme dar. Diese specielle Art der Reciprocität haben wir in §. 26 besonders betrachtet. Hier kann eins der beiden Systeme um irgend einen Durchmesser der Kugel gedreht werden bis die Drehung zwei rechte Winkel beträgt, und die beiden Systeme sind dann immer von neuem reciprok-liegend.

VIII. Ist die Directrix eine beliebige Rotationsfläche zweiten Grades, welche einen Mittelpunkt hat, so kann eins der beiden reciproken Systeme nicht nur um die Rotationsachse der Fläche, sondern um jeden beliebigen, auf der Rotationsachse senkrechten Durchmesser der Fläche gedreht werden bis die Drehung zwei rechte Winkel beträgt, und es sind dann die beiden Systeme von neuem reciprok-liegend.

IX. Ist die Directrix ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid, und dessen Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten (§. 48. S. 5)

$$cz = xy \qquad (19)$$

so ist die Polarebene eines Punktes tuv, also auch die Beziehungsgleichung der Reciprocität

$$cz + cv = ty + ux \qquad (20)$$

§. 62. Drehen wir das System der tuv nach einander um eine jede der Coordinatenachsen bis der Drehungswinkel zwei rechte beträgt, so geht die Gleichung in

$$cz + cv = -ty - ux$$
$$cz - cv = -ty + ux$$
$$cz - cv = +ty - ux$$

über. Diese drei Gleichungen sind sämmtlich in Beziehung auf v u. z, u u. y und t u. x symmetrisch, also sind die beiden Systeme in den drei neuen Lagen wieder reciprok-liegend. Wir finden, daß die Directrix für die erste veränderte Lage, durch

$$cz = -xy$$

dargestellt wird und also wieder ein hyperbolisches Paraboloid ist, wie es auch zufolge VI. seyn muß, da das System der tuv um die Achse des Paraboloids (19) gedreht worden ist. Wir finden aber ferner, indem wir $v = z$, $u = y$, $t = x$ setzen, daß die Directrix für die zweite und dritte veränderte Lage gänzlich verschwindet, d. i. daß nicht blos Punkte die einer bestimmten Fläche angehören, sondern daß jeder Punkt in seiner Polarebene liegt. Die Reciprocität, welche durch ein gleichseitig-hyperbolisches Paraboloid constituirt wird, ist also diejenige, welche wir, nach Herrn Möbius, in §. 27 ausführlich betrachtet haben.

§. 63.

Aufgabe [98]. Es ist eine Fläche zweiten Grades und ein Punkt außerhalb derselben gegeben. Es soll der Ort der Durchschnittslinie von zwei Tangentialebenen der Fläche gefunden werden, welche durch den gegebenen Punkt gehen und sich rechtwinklig schneiden.

Es sey in rechtwinkligen Coordinaten

$$az^2 + by^2 + cx^2 = 1 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche und $\alpha\beta\gamma$ der gegebene Punkt. Zwei Ebenen, welche durch diesen gegebenen Punkt gehen, sind durch die Gleichungen

$$z - \gamma + n(y - \beta) + p(x - \alpha) = 0 \qquad (2)$$
$$z - \gamma + n'(y - \beta) + p'(x - \alpha) = 0 \qquad (3)$$

auszudrücken. Sollen diese Ebenen die Fläche (1) berühren, so muß (§. 59, G. 5)

$$abp^2 + acn^2 + bc = abc(\gamma + n\beta + p\alpha)^2 \quad , \qquad (4)$$
$$abp'^2 + acn'^2 + bc = abc(\gamma + n'\beta + p'\alpha)^2 \quad , \qquad (5)$$

und sollen dieselben Ebenen auf einander senkrecht stehen, so muß ferner

$$1 + nn' + pp' = 0 \qquad (6)$$

§. 63.

seyn. Nun könnten wir, um den gesuchten Ort zu finden, n und p aus den Gleichungen (2) u. (4), und n′ und p′ aus den Gleichungen (3) u. (5) bestimmen, und die sich ergebenden Ausdrücke in (6) substituiren. Da aber die Ausdrücke für n und p offenbar dieselben seyn würden als die für n′ und p′, diese Größen inzwischen nicht einander gleich seyn dürfen, weil die Ebenen (2) und (3) nicht zusammen fallen sollen; so müssen von den doppelten Werthen, welche diese Ausdrücke darstellen, die einen für n u. p, und die anderen für n′ u. p′ genommen werden. Nun ist es aber nicht nöthig die Ausdrücke für n, p, n′ und p′ aufzusuchen, sondern es reicht hin wenn wir nur die beiden Producte nn′ und pp′ ausdrücken, und diese Producte sind, in Folge des so eben Gesagten, die letzten Glieder der, durch Elimination aus (2) u. (4) und aus (3) u. (5) darzustellenden Gleichungen. Wir brauchen also diese Gleichungen nicht aufzulösen, sondern wir dürfen blos ihre letzten Glieder respective für nn′ und für pp′ in die Gleichung (6) substituiren, wodurch wir

$$\left.\begin{array}{r} [ab(1-c\alpha^2)+ac(1-b\beta^2)](z-\gamma)^2 \\ +[ab(1-c\alpha^2)+bc(1-a\gamma^2)](y-\beta)^2 \\ +[ac(1-b\beta^2)+bc(1-a\gamma^2)](x-\alpha)^2 \\ +2abc[\alpha\beta(x-\alpha)(y-\beta)+\alpha\gamma(x-\alpha)(z-\gamma)+\beta\gamma(y-\beta)(z-\gamma)] \end{array}\right\} = 0 \quad (7)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes erhalten. Dieser Gleichung können wir auch die Form

$$a(b+c)(z-\gamma)^2 + b(a+c)(y-\beta)^2 + c(a+b)(x-\alpha)^2 =$$
$$abc\cdot\left\{\begin{array}{l}(\alpha^2+\beta^2)(z-\gamma)^2+(\alpha^2+\gamma^2)(y-\beta)^2+(\beta^2+\gamma^2)(x-\alpha)^2 \\ +2\alpha\beta(x-\alpha)(y-\beta)+2\alpha\gamma(x-\alpha)(z-\gamma)+2\beta\gamma(y-\beta)(z-\gamma)\end{array}\right\} \quad (8)$$

geben. Der gesuchte Ort ist demnach eine Kegelfläche vom zweiten Grade, deren Mittelpunkt (Scheitel) in dem gegebenen Punkte liegt.

Ist die gegebene Fläche selbst eine Kegelfläche, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$az^2 + by^2 + cx^2 = 0 \qquad (9)$$

ist, und ist der Anfangspunkt der Coordinaten, d. i. der Mittelpunkt (Scheitel) dieser Kegelfläche der gegebene feste Punkt, so finden wir auf dieselbe Weise:

$$a(b+c)z^2 + b(a+c)y^2 + c(a+b)x^2 = 0 \qquad (10)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes.

Ist ferner die gegebene Fläche ein Paraboloid und in rechtwinkligen Coordinaten

§. 63. $$by^2 + cx^2 + 2a''z = 0 \qquad (11)$$
dessen Gleichung, so kommt, nach derselben Verfahrungsart,
$$a''(b+c)(z-\gamma)^2 + b(a''-2c\gamma)(y-\beta)^2 + c(a''-2b\gamma)(x-\alpha)^2$$
$$+ 2bc\left\{\alpha(x-\alpha)(z-\gamma) + \beta(y-\beta)(z-\gamma)\right\} = 0 \qquad (12)$$
als Gleichung für den gesuchten Ort.

Ob die hier gefundenen Oerter reell oder imaginair sind, dies hängt nicht nur von der gegebenen Fläche, sondern auch von der Lage des gegebenen Punktes gegen jene Fläche ab.

Wenn sich der gegebenen Fläche eine dreiseitige rechtwinklige Ecke, deren Spitze in dem gegebenen Punkte liegt, soll umschreiben lassen, so muß es möglich seyn in derjenigen Kegelfläche, welche den in der letzten Aufgabe genannten Ort bildet, eine solche Ecke einzuschreiben. Dies führt uns zunächst zu der folgenden

Aufgabe [99]. **Es ist die Gleichung einer Kegelfläche zweiten Grades gegeben. Man soll die Bedingung finden, welche Statt haben muß, wenn eine dreikantige rechtwinklige Ecke in jene Kegelfläche eingeschrieben werden kann.**

Es sey in rechtwinkligen Coordinaten
$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz = 0 \qquad (13)$$
die Gleichung der Kegelfläche, und
$$\left\{\begin{array}{l}\gamma x = \alpha z\\ \gamma y = \beta z\end{array}\right\};\quad \left\{\begin{array}{l}\gamma' x = \alpha' z\\ \gamma' y = \beta' z\end{array}\right\};\quad \left\{\begin{array}{l}\gamma'' x = \alpha'' z\\ \gamma'' y = \beta'' z\end{array}\right\}$$
die Gleichungssysteme der Kanten einer rechtwinkligen Ecke, in welchen α, β, γ, α', 2c. die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche diese Kanten mit den Coordinatenachsen bilden. Sollen diese Kanten in der Fläche (13) liegen, so findet sich, indem wir x und y eliminiren, wodurch z von selbst fort gehet, daß folgende drei Gleichungen
$$a\gamma^2 + b\beta^2 + c\alpha^2 + 2a'\alpha\beta + 2b'\alpha\gamma + 2c'\beta\gamma = 0$$
$$a\gamma'^2 + b\beta'^2 + c\alpha'^2 + 2a'\alpha'\beta' + 2b'\alpha'\gamma' + 2c'\beta'\gamma' = 0$$
$$a\gamma''^2 + b\beta''^2 + c\alpha''^2 + 2a'\alpha''\beta'' + 2b'\alpha''\gamma'' + 2c'\beta''\gamma'' = 0$$
befriedigt werden müssen. Da nun aber die Coordinatenachsen rechte Winkel bilden, so haben wir auch
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \quad ; \quad \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0 \;,$$
$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \quad ; \quad \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0 \;,$$
$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \quad ; \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0 \;,$$

also überhaupt neun Bedingungsgleichungen, welche aber von den neun Größen α, β, γ, α', rc. nicht befriedigt werden können, wenn nicht zwischen den Coefficienten a, b rc. der Gleichung (13) eine gewisse Relation besteht; denn addiren wir die zuerst angegebenen drei Gleichungen, so erhalten wir eine Summe, die sich, in Folge der übrigen sechs Gleichungen, auf

$$a + b + c = 0 \qquad (14)$$

reducirt, und diese Gleichung (14) ist die gesuchte Bedingungsgleichung.

Aus der Lösung dieser Aufgabe folgt nebenbei, „daß eine Kegelfläche zweiten Grades, welche fünf von den sechs Kanten zweier rechtwinkligen Ecken enthält, auch die sechste Kante enthalten wird."

Hat die Gleichung der Kegelfläche die Form

$$\frac{z^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} , \qquad (15)$$

so ist die in Rede stehende Bedingung durch

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad \text{oder} \quad b^2c^2 = a^2c^2 + a^2b^2 \qquad (16)$$

ausgedrückt. — Soll die Kegelfläche (15) ein Rotationskegel seyn, so muß $b^2 = c^2$, wodurch die Gleichung (16) sich auf $2a^2 = b^2$ reducirt. Die Gleichung des Rotationskegels, welchem eine rechtwinklige Ecke eingeschrieben werden kann, ist daher

$$z^2 = \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 . \qquad (17)$$

Wir kehren jetzt wieder zu den Resultaten der Aufgabe (98) zurück. Soll der Fläche (1) eine dreiseitige rechtwinklige Ecke umschrieben werden können, deren Spitze in dem Punkte $\alpha\beta\gamma$ liegt, so muß, wie schon vorher bemerkt worden ist, der Kegelfläche (7 od. 8) eine solche Ecke eingeschrieben werden können. Setzen wir nun die Coefficienten von z^2, y^2 und x^2 in der Gleichung (7), zufolge der Bedingungsgleichung (14), in Summe gleich Null, so haben wir

$$ab + ac + bc - abc[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2] = 0 ,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} . \qquad (18)$$

Also nur wenn die Coordinaten α, β, γ diese Gleichung (18) befriedigen, läßt sich, von dem Punkte $\alpha\beta\gamma$ aus, der Fläche (1) eine rechtwinklige Ecke

§. 63. umschreiben. Es drückt aber die Gleichung (18), wenn wir α, β, γ als laufende Coordinaten ansehen, eine Kugelfläche aus, deren Mittelpunkt im Mittelpunkte der Fläche (1) liegt und deren Radius der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drei halben Achsen derselben Fläche gleich ist. Wenn die Fläche (1) ein Ellipsoid ist, so sind die Quadrate der drei Achsen positiv und daher der Radius der Kugel (18) immer reell, wenn aber diese Fläche (1) ein Hyperboloid ist, so kann die Summe der Quadrate der drei Achsen Null oder negativ seyn, und alsdann reducirt sich die Kugelfläche (18) auf einen Punkt oder auf eine imaginaire Fläche. Wir haben demnach folgenden, zuerst von Monge aufgestellten

Lehrsatz [26]. Bewegt sich eine rechtwinklige Ecke so, daß ihre drei Seitenebenen fortwährend ein gegebenes Ellipsoid oder Hyperboloid berühren, so beschreibt die Spitze dieser Ecke eine Kugelfläche.

Soll der Kegelfläche (9) eine rechtwinklige Ecke umschrieben werden können, so muß der Kegelfläche (10) eine solche Ecke eingeschrieben werden können; es muß also, zufolge der Bedingungsgleichung (14), die Summe der Coefficienten in der Gleichung (10) Null betragen, d. i. es muß

$$ab + ac + bc = 0 \qquad (19)$$

seyn. — Hat die Gleichung der Kegelfläche (9) die Form

$$\frac{z^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2}, \qquad (20)$$

so nimmt die Gleichung (19) die Gestalt

$$\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} = \frac{1}{b^2c^2} \quad \text{oder} \quad a^2 = b^2 + c^2 \qquad (21)$$

an. — Soll die Kegelfläche (20) ein Rotationskegel seyn, so muß $b^2 = c^2$, wodurch die Gleichung (21) sich auf $a^2 = 2b^2$ reducirt. Die Gleichung des Rotationskegels, welchem eine rechtwinklige Ecke umschrieben werden kann, ist daher

$$z^2 = 2y^2 + 2x^2 \qquad (22)$$

Soll der Fläche (11) eine rechtwinklige Ecke umschrieben werden können, deren Spitze im Punkte $\alpha\beta\gamma$ liegt, so muß der Kegelfläche (12) eine solche Ecke eingeschrieben werden können. Setzen wir nun die Summe der Coefficienten von z^2, y^2 und x^2 in der Gleichung (12), zufolge der Bedingungsgleichung (14), gleich Null, so haben wir

$$a''(b + c) - 2bc\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{b + c}{2bc} \cdot a'', \qquad (23)$$

eine Gleichung, welche, wenn wir γ als veränderlich ansehen, eine auf der Achsenrichtung des Paraboloids (11) senkrechte Ebene ausdrückt. Wir folgern daraus den §. 63.

Lehrsatz [27]. Bewegt sich eine rechtwinklige Ecke so, daß ihre drei Seitenebenen fortwährend ein gegebenes Paraboloid berühren, so beschreibt die Spitze dieser Ecke eine, auf der Achsenrichtung senkrechte Ebene.

§. 64.

Aufgabe [100]. Den Ort der Mittelpunkte aller Rotationskegel zu finden, welche eine gegebene Fläche zweiten Grades berühren.

Es sey

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 = 1 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche in rechtwinkligen Coordinaten. Bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunktes eines, der Fläche (1) umschriebenen Kegels durch x', y', z', so ist dessen Gleichung, nach §. 60 (S. 11),

$$\left.\begin{array}{l} A(By'^2+Cx'^2-1)(z-z')^2+B(Az'^2+Cx'^2-1)(y-y')^2+C(Az'^2+By'^2-1)(x-x')^2 \\ -2BCx'y'(x-x')(y-y')-2ACx'z'(x-x')(z-z')-2ABy'z'(y-y')(z-z') \end{array}\right\} = 0. \quad (2)$$

Soll dieser Kegel eine Rotationsfläche seyn, so müssen die Coefficienten in der entwickelten Gleichung (2) die Bedingungsgleichungen (11) des §. 50 erfüllen; und wir haben daher

$$\left.\begin{array}{l} (A-B)\,ABC^2x'^2y'z'\left\{Az'^2+By'^2+Cx'^2-1\right\} = 0\,, \\ (A-C)\,AB^2Cx'y'^2z'\left\{Az'^2+By'^2+Cx'^2-1\right\} = 0\,. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Diese beiden Gleichungen (3) werden unabhängig von x', y' und z' befriedigt wenn, in der gegebenen Gleichung (1), $A = B = C$, d. i. wenn die gegebene Fläche eine Kugelfläche ist; und es ist in der That ein jeder, einer Kugelfläche umschriebene Kegel ein Rotationskegel, wo auch immer der Mittelpunkt (Scheitel) dieses Kegels angenommen seyn mag. Ist aber nicht $A = B = C$, so werden die Gleichungen (3) auf zweierlei Weise befriedigt.

Erstens nämlich wird ihnen genügt, wenn

$$Az'^2 + By'^2 + Cx'^2 - 1 = 0$$

ist, d. i. wenn der Mittelpunkt des Kegels auf der gegebenen Fläche (1) liegt, ein Fall, in welchem dieser umschriebene Kegel offenbar in eine Ebene, nämlich in die Tangentialebene der gegebenen Fläche, degenerirt.

Zweitens wird den Gleichungen (3) genügt, wenn eine der Größen x', y', z' gleich Null gesetzt wird; alsdann verschwinden aber zwei von den drei

§. 64. letzten Gliedern der Gleichung (2), und damit diese Gleichung nun eine Rotationsfläche ausdrücken könne, muß, wie wir, in Gemäßheit des §. 50 und namentlich der Gleichungen (13) dieses Paragraphen, leicht finden,

wenn $x'=0$ auch $\{Az'^2+By'^2-1\}\{AC(C-B)z'^2+BC(C-A)y'^2-(C-A)(C-B)\}=0$,
wenn $y'=0$ auch $\{Az'^2+Cx'^2-1\}\{AB(B-C)z'^2+BC(B-A)x'^2-(B-A)(B-C)\}=0$,
wenn $z'=0$ auch $\{By'^2+Cx'^2-1\}\{AB(A-C)y'^2+AC(A-B)x'^2-(A-B)(A-C)\}=0$

seyn. Die ersten Factoren dieser drei Gleichungen gleich Null gesetzt, stellen die drei von den Coordinatenebenen gebildeten Durchschnitte der gegebenen Fläche (1) dar, und von den Punkten dieser Curven aus können Berührungskegel im eigentlichen Sinne an die Fläche nicht gelegt werden. Es bleibt uns demnach noch übrig die zweiten Factoren der gefundenen Gleichungen zu discutiren.

Ist erstlich die gegebene Fläche (1) ein Ellipsoid, dessen größte Achse gleich $2a$, mittlere Achse gleich $2b$ und kleinste Achse gleich $2c$, und dessen Gleichung

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1 \tag{4}$$

ist, so haben wir $A=\frac{1}{c^2}$, $B=\frac{1}{b^2}$, $C=\frac{1}{a^2}$, und die zweiten Factoren geben daher

$$\{\ x'=0\ ;\ (a^2-b^2)z'^2+(a^2-c^2)y'^2+(a^2-b^2)(a^2-c^2)=0\ \}, \tag{5}$$
$$\{\ y'=0\ ;\ (a^2-b^2)z'^2-(b^2-c^2)x'^2+(a^2-b^2)(b^2-c^2)=0\ \}, \tag{6}$$
$$\{\ z'=0\ ;\ (a^2-c^2)y'^2+(b^2-c^2)x'^2-(a^2-c^2)(b^2-c^2)=0\ \}. \tag{7}$$

Da $a^2>b^2>c^2$, so sind a^2-b^2, a^2-c^2 und b^2-c^2 positive Größen. Das Gleichungssystem (5) drückt folglich eine imaginaire Curve aus. Das Gleichungssystem (7) stellt eine in der Ebene der xy liegende Ellipse dar, deren größere Achse $=2\sqrt{a^2-c^2}$ und deren kleinere Achse $=2\sqrt{b^2-c^2}$; diese Ellipse (7) ist dem Hauptdurchschnitte des Ellipsoids (4), dessen Gleichungssystem

$$\{\ z=0\ ;\ a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\ \} \tag{8}$$

ist, concentrisch, und von den, der Länge nach auf einander liegenden Achsen der beiden Curven sind diejenigen der Ellipse (7) die kleineren, weil $a^2-c^2<a^2$ und $b^2-c^2<b^2$; die Ellipse (7) liegt also gänzlich innerhalb der Ellipse (8), d. i. gänzlich innerhalb des Ellipsoids (4), und es kann daher von einem Punkte der Ellipse (7) aus, ein reeller Kegel dem

Ellipsoid (4) nicht umschrieben werden. — Das Gleichungssystem (6) drückt eine Hyperbel aus, deren Hauptachse in der größten Achse des Ellipsoids (4), und deren Nebenachse in der kleinsten Achse dieser Fläche liegt; die Länge jener Hauptachse ist $2\sqrt{a^2-b^2}$ und diejenige der Nebenachse $2\sqrt{b^2-c^2}$, die Excentricität ist daher gleich $\sqrt{a^2-c^2}$. Daraus folgt, daß die Hyperbel (6) ihre Scheitel in den Brennpunkten desjenigen Hauptdurchschnitts der Fläche (4) hat, welcher die größte und die mittlere Achse enthält, und daß ferner ihre Brennpunkte mit den Brennpunkten des Hauptdurchschnitts zusammenfallen, welcher die größte und kleinste Achse enthält, daß endlich die Nebenachse der Hyperbel (6) der doppelten Excentricität desjenigen Hauptdurchschnitts gleich ist, welcher die mittlere und kleinste Achse enthält. Die Theile dieser Hyperbel (6), welche außerhalb des Ellipsoids (4) liegen, bilden den gesuchten Ort der Mittelpunkte aller Rotationskegel, welche diesem Ellipsoide umschrieben sind. Diese Hyperbel schneidet das Ellipsoid in vier Punkten, für deren Coordinaten wir, durch Entwicklung aus den Gleichungen (4) und (6),

$$x_1 = \pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cdot a \;\; ; \;\; y_1 = 0 \;\; ; \;\; z_1 = \pm\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\cdot c$$

finden, und diese vier Punkte sind demnach die vier Kreispunkte des Ellipsoids (§. 51). — Geht das Ellipsoid (4) in ein verlängertes Sphäroid über, wird also $b = c$, so reducirt sich das Gleichungssystem (6) auf $y' = 0$; $z' = 0$, und die genannte Hyperbel degenerirt somit in eine gerade Linie, nämlich in die Achse der x, also in die Rotationsachse der Fläche. — Verwandelt sich das Ellipsoid (4) in ein abgeplattetes Sphäroid, indem $b = a$ wird, so reducirt sich das Gleichungssystem (6) auf $y' = 0$; $x' = 0$, und die Hyperbel degenerirt wiederum in eine gerade Linie, nämlich in die Achse der z, also in die Rotationsachse der Fläche.

Ist zweitens die gegebene Fläche (1) ein hyperbolisches Hyperboloid, und

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (9)$$

dessen Gleichung, in welcher $b^2 > c^2$ ist, so haben wir $A = \frac{1}{c^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, $C = -\frac{1}{a^2}$, und die zweiten Factoren der oben angegebenen Gleichungen, gleich Null gesetzt, sind alsdann

§. 64.

$$\left\{ x' = 0 \;;\; (a^2+b^2)z'^2+(a^2+c^2)y'^2-(a^2+b^2)(a^2+c^2) = 0 \right\} , \quad (10)$$

$$\left\{ y' = 0 \;;\; (a^2+b^2)z'^2+(b^2-c^2)x'^2+(a^2+b^2)(b^2-c^2) = 0 \right\} , \quad (11)$$

$$\left\{ z' = 0 \;;\; (a^2+c^2)y'^2-(b^2-c^2)x'^2-(a^2+c^2)(b^2-c^2) = 0 \right\} . \quad (12)$$

Da $b^2 > c^2$, so ist $b^2 - c^2$ eine positive Größe. Das Gleichungssystem (11) drückt folglich eine imaginaire Curve aus. Das Gleichungssystem (10) stellt eine in der Ebene der yz liegende Ellipse dar, deren größere Achse $= 2\sqrt{a^2+b^2}$ und deren kleinere Achse $= 2\sqrt{a^2+c^2}$ ist, deren Excentricität also $\sqrt{b^2-c^2}$ seyn wird. Die Scheitel dieser Ellipse (10) fallen daher mit den Brennpunkten derjenigen Hauptdurchschnitte des Hyperboloids (9) zusammen, welche die Ebenen der xz und der xy bilden; die Brennpunkte der Ellipse (10) sind aber zugleich die Brennpunkte derjenigen Ellipse, in welcher das Hyperboloid (9) von der Ebene der yz geschnitten wird. Die Ellipse (10) schneidet das Hyperboloid (9) nicht, sondern liegt gänzlich auf derjenigen Seite dieser Fläche, welche derjenigen Seite, auf welcher der Mittelpunkt der Fläche liegt, entgegengesetzt ist. — Das Gleichungssystem (12) stellt eine, in der Ebene der xy liegende Hyperbel dar, deren Hauptachse $= 2\sqrt{b^2-c^2}$, und deren Nebenachse $= 2\sqrt{a^2+c^2}$ ist, deren Excentricität also $\sqrt{a^2+b^2}$ seyn wird. Die Scheitel der Hyperbel (12) fallen daher mit den Brennpunkten derjenigen Ellipse zusammen, in welcher die Ebene der yz das Hyperboloid (9) schneidet, und die Brennpunkte dieser Hyperbel (12) sind zugleich die Brennpunkte derjenigen Hyperbel, in welcher die Ebene der xy das Hyperboloid schneidet. Die Hyperbel (12) schneidet das Hyperboloid (9) nicht, sondern liegt gänzlich auf derselben Seite dieser Fläche, auf welcher ihr Mittelpunkt sich befindet. — Die Ellipse (10) und die Hyperbel (12) stehen also auf einander senkrecht, die Scheitel der einen Curve sind die Brennpunkte der andern und die Brennpunkte der einen sind die Scheitel der andern. Das System dieser beiden Curven (10) und (12) bildet den gesuchten Ort der Mittelpunkte aller Rotationskegel, welche das Hyperboloid (9) berühren, und es ist zugleich, zufolge des Resultates in der Aufgabe (91) des §. 58, eine jede dieser beiden Curven der Ort der Mittelpunkte aller Rotationskegel, welche die andere Curve enthalten. — Verwandelt sich das Hyperboloid (9) in ein hyperbolisches Rotationshyperboloid indem $b = c$ wird, so degenerirt die Hyperbel (12) in eine gerade Linie, nämlich in die Rotationsachse, und die Ellipse (10) in einen Kreis, nämlich in denjenigen, welchen die Brennpunkte der Meridiancurve während der Rotation erzeugen.

Ist drittens die gegebene Fläche (1) ein elliptisches Hyperboloid, und §. 64.

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (13)$$

dessen Gleichung, in welcher $a > b$, so haben wir $A = \frac{1}{c^2}$, $B = -\frac{1}{b^2}$, $C = -\frac{1}{a^2}$, und die zweiten Factoren der oben gefundenen Gleichungen, gleich Null gesetzt, sind alsdann

$$\left\{ x' = 0 \;;\; (a^2-b^2)z'^2+(a^2+c^2)y'^2-(a^2+c^2)(a^2-b^2) = 0 \right\}, \quad (14)$$

$$\left\{ y' = 0 \;;\; (a^2-b^2)z'^2-(b^2+c^2)x'^2-(a^2-b^2)(b^2+c^2) = 0 \right\}, \quad (15)$$

$$\left\{ z' = 0 \;;\; (a^2+c^2)y'^2+(b^2+c^2)x'^2+(a^2+c^2)(b^2+c^2) = 0 \right\}. \quad (16)$$

Da $a^2 > b^2$, so ist $a^2 - b^2$ eine positive Größe. Das Gleichungssystem (16) drückt eine imaginaire Curve aus. Das Gleichungssystem (15) stellt eine in der Ebene der xz liegende Hyperbel dar, von welcher wir leicht finden, daß sie gänzlich auf der concaven Seite des Hyperboloids (13) liegt, und es kann daher, von einem Punkte dieser Hyperbel aus, ein reeller Kegel dem Hyperboloid (13) nicht umschrieben werden. — Das Gleichungssystem (14) stellt eine in der Ebene der yz liegende Ellipse dar, deren größere Achse $= 2\sqrt{a^2+c^2}$ und deren kleinere Achse $= 2\sqrt{a^2-b^2}$ ist, deren Excentricität also $\sqrt{b^2+c^2}$ seyn wird. Die Scheitel der größern Achse dieser Ellipse (14) fallen daher mit den Brennpunkten derjenigen Hyperbel zusammen, in welcher die Ebene der xz das Hyperboloid schneidet, und die Brennpunkte der Ellipse (14) sind zugleich die Brennpunkte der Hyperbel, in welcher die Ebene der yz das Hyperboloid schneidet. Die Stücke dieser Ellipse (14), welche zwischen den convexen Seiten des Hyperboloids (13) liegen, bilden den gesuchten Ort der Mittelpunkte aller Rotationskegel, welche diesem Hyperboloide umschrieben werden können. Diese Ellipse schneidet das Hyperboloid in vier Punkten, für deren Coordinaten wir, durch Entwickelung aus den Gleichungen (13) und (14),

$$x_1 = 0 \;;\; y_1 = \pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot b \;;\; z_1 = \pm\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}\cdot c$$

finden, und diese vier Punkte sind demnach die vier Kreispunkte des Hyperboloids (§. 51). — Geht das Hyperboloid (13) in ein elliptisches Rotationshyperboloid über, wird also $a = b$, so reducirt sich das Gleichungssystem (14) auf $[x' = 0 \;;\; y' = 0]$, und die genannte Ellipse (14) degenerirt in eine gerade Linie, nämlich in die Rotationsachse der Fläche.

§. 64. Es sey nun

$$By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \qquad (17)$$

die Gleichung der gegebenen Fläche in rechtwinkligen Coordinaten. Die Gleichung des vom Punkte $x'y'z'$ aus dieser Fläche umschriebenen Kegels ist, nach §. 60 (S. 12),

$$\left.\begin{array}{l} A''^2(z-z')-B(Cx'^2+2A''z')(y-y')^2-C(By'^2+2A''z')(x-x')^2 \\ +2BCx'y'(x-x')(y-y')-2A''Cx'(x-x')(z-z')-2A''By'(y-y')(z-z') \end{array}\right\} = 0. \quad (18)$$

Soll dieser Kegel (18) eine Rotationsfläche seyn, so müssen die Coefficienten in der entwickelten Gleichung (18) die Bedingungsgleichungen (11) des §. 50 erfüllen, und wir haben daher

$$\left.\begin{array}{l} A''B^2C^2x'^2y'\left\{By'^2 + Cx'^2 + 2A''z'\right\} = 0 \quad , \\ A''B^2C^2x'y'^2\left\{By'^2 + Cx'^2 + 2A''z'\right\} = 0 \quad . \end{array}\right\} \quad (19)$$

Diesen Gleichungen (19) wird genügt, wenn

$$By'^2 + Cx'^2 + 2A''z' = 0$$

ist; alsdann liegt aber der Mittelpunkt des umschriebenen Kegels in der gegebenen Fläche (17) und dieser Kegel degenerirt in eine Ebene, nämlich in die Tangentialebene jener Fläche. Die Gleichungen (19) werden ferner befriedigt, wenn $x' = 0$ oder wenn $y' = 0$ gesetzt wird; alsdann verschwinden aber zwei von den drei letzten Gliedern der Gleichung (18), und damit diese Gleichung nun eine Rotationsfläche ausdrücken könne, muß, wie wir, in Gemäßheit der Gleichungen (13) des §. 50, leicht finden,

$$\text{wenn } x'=0 \text{ auch } \left\{By'^2+2A''z'\right\}\left\{BC^2y'^2+A''(C-B)(2Cz'+A'')\right\} = 0$$

$$\text{wenn } y'=0 \text{ auch } \left\{Cx'^2+2A''z'\right\}\left\{B^2Cx'^2+A''(B-C)(2Bz'+A'')\right\} = 0$$

seyn. Die ersten Factoren dieser Gleichungen, gleich Null gesetzt, stellen die von den Ebenen der yz und der xz gebildeten Durchschnittscurven der gegebenen Fläche (17) dar, und von den Punkten dieser Curven aus, können Berührungskegel im eigentlichen Sinne an die Fläche nicht gelegt werden. Es bleibt uns demnach blos übrig die zweiten Factoren der gefundenen Gleichungen zu discutiren.

Ist **erstens** die gegebene Fläche (17) ein **elliptisches Paraboloid**, und

$$\frac{y^2}{b} + \frac{x^2}{a} = 2z \qquad (20)$$

dessen Gleichung, in welcher $a > b$, so haben wir $B = \frac{1}{b}$, $C = \frac{1}{a}$, $A'' = -1$, und die zweiten Factoren unserer Gleichungen, gleich Null gesetzt, sind

$$\left\{ x' = 0 \quad ; \quad y'^2 = 2(b-a)(z' - \tfrac{1}{2}a) \right\} , \qquad (21)$$

§. 64.

$$\left\{ y' = 0 \quad ; \quad x'^2 = 2(a-b)(z' - \tfrac{1}{2}b) \right\} . \qquad (22)$$

Diese Gleichungssysteme stellen zwei in der Ebene der yz und der xz liegende Parabeln dar. Die Parabel (22) liegt gänzlich auf der concaven Seite des Paraboloids, und von den Punkten dieser Curve aus können reelle Berührungskegel an die Fläche (20) nicht gelegt werden. Diejenigen Theile der Parabel (21), welche auf der convexen Seite des Paraboloids liegen, bilden den gesuchten Ort der Mittelpunkte aller umschriebenen Rotationskegel. Die Achse dieser Parabel (21) fällt mit der Achse des Paraboloids (20) zusammen; ihr Scheitel liegt in dem Punkte dieser Achse, für welchen $z = \frac{1}{2}a$, und ihr Brennpunkt in demjenigen, für welchen $z = \frac{1}{2}b$. Die Brennpunkte derjenigen Parabeln, in welchen die Ebenen der xz und der yz das Paraboloid schneiden, sind demnach Scheitel und Brennpunkt des gefundenen Ortes (21). Diese Parabel (21) schneidet das Paraboloid (20) in zwei Punkten, deren Coordinaten

$$x_1 = 0 \quad ; \quad y_1 = \pm\sqrt{2(a-b)b} \quad ; \quad z_1 = \tfrac{1}{2}(a-b),$$

und diese Punkte sind demnach die Kreispunkte des Paraboloids (§. 51). — Geht das Paraboloid (20) in ein elliptisches Rotationsparaboloid über, wird also $a = b$, so reducirt sich das Gleichungssystem (21) auf $[x' = 0 \; ; \; y' = 0]$, und die genannte Parabel degenerirt in eine gerade Linie, nämlich in die Rotationsachse.

Ist zweitens die gegebene Fläche (17) ein hyperbolisches Paraboloid, und

$$\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{a} = 2z \qquad (23)$$

dessen Gleichung, so haben wir $B = \frac{1}{b}$, $C = -\frac{1}{a}$, $A'' = -1$, und die zweiten Factoren der vorher erhaltenen Gleichungen, gleich Null gesetzt, sind

$$\left\{ x' = 0 \quad ; \quad y'^2 = 2(a+b)(z' + \tfrac{1}{2}a) \right\} , \qquad (24)$$

$$\left\{ y' = 0 \quad ; \quad x'^2 = -2(a+b)(z' - \tfrac{1}{2}b) \right\} . \qquad (25)$$

Diese beiden Gleichungssysteme stellen zwei in den Ebenen der yz und der xz liegende Parabeln dar, deren Achsen mit der Achse des Paraboloids (23) zusammen fallen. Der Brennpunkt einer jeden dieser Parabeln ist der Scheitel der andern, und diese beiden Brennpunkte sind zugleich die Brennpunkte

§. 64. derjenigen Parabeln, in welchen die Ebenen der xz und der yz das Paraboloid (23) schneiden. Das System der beiden Parabeln (24) und (25) bildet den gesuchten Ort der Mittelpunkte aller Rotationskegel, welche dem Paraboloid (23) umschrieben werden können, und es ist zugleich eine jede dieser beiden Curven, zufolge §. 58, der Ort der Mittelpunkte aller Rotationskegel, welche die andere enthalten. Beide Parabeln schneiden das Paraboloid (23) nicht.

Fassen wir alle diese Resultate zusammen, so sehen wir, daß der Ort der Scheitel der Rotationskegel, welche einer gegebenen Fläche vom zweiten Grade umschrieben sind, aus einer oder aus zwei Linien zweiten Grades besteht, je nachdem diese Fläche elliptisch (d. h. ein Ellipsoid, ein elliptisches Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid), oder hyperbolisch (d. h. ein hyperbolisches Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid) ist, daß die Brennpunkte dieser Ortscurven mit den Brennpunkten derjenigen Linien zusammen fallen, in welchen ihre Ebenen die gegebene Fläche schneiden, und daß dieselben Oerter die gegebene Fläche in ihren Kreispunkten durchschneiden oder sie nicht schneiden wenn die Fläche keinen Kreispunkt hat *).

§. 65.

Wenn wir durch irgend einen festen Punkt gerade Linien an eine gegebene Fläche zweiten Grades ziehen, so wird, im Allgemeinen, eine jede dieser Geraden die Fläche in zwei Punkten schneiden. Wir wollen jetzt zeigen, daß je zwei Durchschnitte einer der Geraden als homologe Punkte derselben centrisch-collinearen und collinear-liegenden Systeme, der feste Punkt aber als Collineationspunkt angesehen werden kann.

Wir nehmen den festen Punkt zum Anfangspunkt und drei durch ihn gezogene Gerade zu Coordinatenachsen. Es sey, in Beziehung auf dieses Coordinatensystem,

$$av^2+bu^2+ct^2+2a'tu+2b'tv+2c'uv+2a''v+2b''u+2c''t+d = 0 \quad (1)$$

---

*) Der oben betrachtete Ort ist zuerst in dem Journal f. d. reine und angewandte Mathematik Th. I. S. 47 erwähnt, und auch die Gleichung desselben, für den Fall eines gegebenen Ellipsoids aufgestellt worden. Wenn es aber daselbst heißt, daß dieser Ort für eine gegebene Fläche zweiten Grades eine ebene Linie vom zweiten Grade sey, während er, wie wir gefunden haben, aus einer oder zwei solchen Linien besteht, so ist dies ein nicht erhebliches Versehen.

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades. Setzen wir, zufolge §. 17, §. 65.

$$v = \frac{kz}{mz+ny+px+1} \quad ; \quad u = \frac{ky}{mz+ny+px+1} \quad ; \quad t = \frac{kx}{mz+ny+px+1} \; ,$$

so kommt

$$\left.\begin{array}{c} (ak^2+2a''mk+dm^2)z^2+(bk^2+2b''nk+dn^2)y^2+(ck^2+2c''pk+dp^2)x^2 \\ +2(a'k^2+b''pk+c''nk+dnp)xy+2(b'k^2+a''pk+c''mk+dmp)xz+2(c'k^2+a''nk+b''mk+dmn)yz \\ +2(a''k+dm)z+2(b''k+dn)y+2(c''k+dp)x+d \end{array}\right\} = 0. \quad (2)$$

Die, den Punkten der Fläche (1) entsprechenden Punkte liegen also in einer Fläche zweiten Grades (2), und sollen sie in der Fläche (1) selbst liegen, so muß die Gleichung (1) der Gleichung (2) identisch seyn. Demnach müssen, wenn unsere Behauptung wahr ist, folgende neun Gleichungen

$$\begin{array}{lll} ak^2+2a''mk+dm^2 = a \; ; & a'k^2+b''pk+c''nk+dnp = a' \; ; & a''k+dm = a'' \; ; \\ bk^2+2b''nk+dn^2 = b \; ; & b'k^2+a''pk+c''mk+dmp = b' \; ; & b''k+dn = b'' \; ; \\ ck^2+2c''pk+dp^2 = c \; ; & c'k^2+a''nk+b''mk+dmn = c' \; ; & c''k+dp = c'' \end{array}$$

durch dieselben reellen Werthe der vier Größen m, n, p und k befriedigt werden können. Und dies ist wirklich der Fall. Denn setzen wir erstens

$$m = 0 \; ; \; n = 0 \; ; \; p = 0 \; ; \; k = 1 \; ,$$

oder zweitens

$$m = \frac{2a''}{d} \; ; \; n = \frac{2b''}{d} \; ; \; p = \frac{2c''}{d} \; ; \; k = -1 \; ,$$

so werden sämmtliche neun Gleichungen befriedigt. Die zuerst genannten Werthe geben

$$v = z \; ; \; u = y \; ; \; t = x \; ,$$

wodurch nicht die Verwandtschaft der centrischen Collineation im Allgemeinen, sondern die Congruenz ausgedrückt wird. Die zuletzt angegebenen Werthe aber geben

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{-z}{2\frac{a''}{d}z+2\frac{b''}{d}y+2\frac{c''}{d}x+1} \; ; \\ u = \dfrac{-y}{2\frac{a''}{d}z+2\frac{b''}{d}y+2\frac{c''}{d}x+1} \; ; \\ t = \dfrac{-x}{2\frac{a''}{d}z+2\frac{b''}{d}y+2\frac{c''}{d}x+1} \; . \end{array}\right. \quad (3)$$

Wir sehen also, daß nicht nur die zweiten Durchschnittspunkte als die homologen Punkte der ersten betrachtet werden dürfen, sondern daß, weil

§. 65. $k = -1$, auch je zwei homologe Punkte gegenseitig vertauscht werden können (§. 17).

Für die Gleichung der Collineationsebene finden wir aus den Formeln (3)

$$a''z + b''y + c''x + d = 0 \quad .$$

Diese Gleichung drückt aber die Polarebene des Anfangspunktes der Coordinaten aus; die Collineationsebene fällt also mit der Polarebene des, zum Collineationscentrum genommenen, festen Punktes zusammen. — Die Gegenebene, welche für beide Systeme dieselbe ist, hat zur Gleichung:

$$a''z + b''y + c''x + \tfrac{1}{2}d = 0 \quad .$$

Aus dem bisher Gezeigten lassen sich unmittelbar mehrere bemerkenswerthe Folgerungen ziehen, von welchen wir die nachstehenden anführen wollen.

Legt man, von irgend einem Punkte A aus, einen Berührungskegel an eine gegebene Fläche zweiten Grades, so kann die Ebene e der Berührungscurve nicht nur als die Polarebene des Punktes A angesehen werden, sondern man kann auch den Punkt A als Collineationscentrum, und die Ebene e als Collineationsebene zweier centrisch-collinearen und collinear-liegenden Systeme betrachten, dergestalt daß jede zwei Punkte auf der genannten Fläche, welche mit dem Punkte A in gerader Linie liegen, einander entsprechen. — Ziehen wir durch den Punkt A nach drei Punkten P, Q, R der Fläche gerade Linien, so schneiden diese die Fläche in noch drei anderen Punkten P', Q', R'; alsdann werden die Ebenen PQR und $P'Q'R'$, $PQ'R$ und $P'QR'$, $P'QR$ und $PQ'R'$, PQR' und $P'Q'R$ sich auf der Ebene e schneiden. Legen wir in den sechs Punkten P, Q, R, P', Q', R' die Tangentialebenen p, q, r, p', q', r' an die genannte Fläche, so werden sich die Ebenen p und p', q und q', r und r' ebenfalls auf der Ebene e schneiden; auch wird der Durchschnittspunkt B der Ebenen p, q, r der homologe Punkt des Durchschnittes B' der Ebenen p', q', r' seyn. Die Punkte A, B, B' werden daher in einer Geraden liegen, und diese wird die reciproke Gerade der Durchschnittslinie der Ebenen PQR und $P'Q'R'$ seyn. Auf ähnliche Weise wird es sich mit den Durchschnittspunkten der Tangentialebenen p, q', r und p', q, r'; p', q, r und p, q', r'; p, q, r' und p', q', r verhalten. — Was die beiden Berührungskegel betrifft, deren Berührungscurven die Durchschnitte der Ebenen PQR und $P'Q'R'$ mit der gegebenen Fläche sind, so sehen wir leicht, daß ihre Scheitel in den Punkten B und B' liegen; die erzeugenden Geraden dieser Kegel sind homologe Gerade und schneiden sich als solche auf der Ebene e; diese Kegel schneiden sich daher

selbst in einer, in der Ebene e liegenden Curve (daß sie sich auch noch in einer zweiten ebenen Curve schneiden müssen, wird aus einem in §. 69 anzuführenden Satze folgen). Auf ähnliche Weise verhält es sich mit den Berührungskegeln, deren Berührungscurven respective die Durchschnitte der Ebenen $PQ'R$ und $P'QR'$, $P'QR$ und $PQ'R'$, PQR' und $P'Q'R$ mit der gegebenen Fläche sind.

Es ergiebt sich ferner leicht, daß wenn zwei veränderliche Kegelflächen sich auf einer gegebenen Fläche zweiten Grades schneiden, und der Mittelpunkt (Scheitel) des einen der beiden Kegel fest bleibt, der Mittelpunkt des andern Kegels sich auf einer festen Ebene, nämlich auf der Polarebene jenes festen Mittelpunktes, bewegt.

§. 66.

Eine Fläche A', welche der Ort der Pole aller Tangentialebenen einer anderen Fläche A ist, heißt die reciproke Fläche der Fläche A. — Es wird sich durch die Lösung der folgenden Aufgabe zeigen, daß wenn eine Fläche A' die reciproke einer Fläche vom zweiten Grade A ist, diese letztere Fläche A zugleich die reciproke Fläche der erstern Fläche A' sey. (Späterhin werden wir diese Eigenschaft der reciproken Fläche allgemein zu erweisen Gelegenheit nehmen.)

Aufgabe [101]. *Eine Fläche vom zweiten Grade und fünf Punkte, von welchen nicht vier in einer Ebene liegen, sind gegeben. Man soll die reciproke Fläche der gegebenen finden, welche durch die gegebenen fünf Punkte geht, und welche so beschaffen ist, daß diese fünf Punkte derselben fünf bestimmten Tangentialebenen der gegebenen Fläche, von welchen nicht vier sich in einem Punkte schneiden, entsprechen.*

Es seyen x, y, z die Coordinaten des Systems, zu welchem die gegebene Fläche des zweiten Grades gehören soll, und

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung dieser Fläche. Es seyen ferner t, u, v die Coordinaten eines reciproken Systems, so ist die Gleichung der Polarebene eines Punktes tuv im Allgemeinen (§. 23, S. 5.)

$$(av + a'u + a''t + a''')z + (bv + b'u + b''t + b''')y + (cv + c'u + c''t + c''')x \\ + dv + d'u + d''t + 1 = 0 \quad . \qquad (2)$$

Damit nun die fünf gegebenen Punkte die Pole der fünf bestimmten Tangentialebenen seyen, werden wir in die Gleichung (2) für t, u, v nach ein-

§. 66. ander die Coordinaten der fünf gegebenen Punkte zu substituiren, und die resultirenden Gleichungen sodann den Gleichungen der fünf gegebenen Tangentialebenen zu identificiren haben, wodurch wir fünf mal drei, also funfzehn Gleichungen vom ersten Grade zur Bestimmung der funfzehn Constanten a, a′, a″, a‴, b, b′, ꝛc. erhalten. Nehmen wir an, daß den eben erwähnten Constanten die, aus dieser Bestimmung hervorgehenden Werthe beigelegt sind, so ist nur noch nöthig die Bedingung auszudrücken, daß die Polarebene (2) eine Tangentialebene der Fläche (1) sey, und in Folge des §. 59 (Aufg. 92. G. 7) haben wir nun also

$$\begin{aligned} A''^2B(cv + c'u + c''t + c''')^2 + A''^2C(bv + b'u + b''t + b''')^2 \\ + 2A''BC(av + a'u + a''t + a''')(dv + d'u + d''t + 1) = \\ ABC(dv + d'u + d''t + 1)^2, \qquad (3) \end{aligned}$$

welches die Gleichung der gesuchten reciproken Fläche ist.

Da sich jede Fläche zweiten Grades durch eine Gleichung von der Form (1) ausdrücken läßt, da ferner die Fläche (3) ebenfalls vom zweiten Grade ist, so folgt zunächst, daß die reciproke Fläche einer Fläche zweiten Grades, im Allgemeinen, ebenfalls vom zweiten Grade ist. Wir sagen im Allgemeinen, weil dieser Satz in dem speciellen Falle, in welchem die gegebene Fläche eine Kegelfläche oder das System zweier Ebenen ist, eine Ausnahme erleidet.

Wenn die gegebene Fläche (1) ein hyperbolisches Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid, also geradlinig ist, so ist auch ihre reciproke Fläche geradlinig. Denn legen wir an drei oder mehreren Punkten einer und derselben erzeugenden Geraden der Fläche (1) Tangentialebenen, so werden diese Ebenen mit der Fläche, und also auch mit einander diese erzeugende Gerade gemein haben, was aus §. 59 klar ist; die Pole dieser selbigen Tangentialebenen werden folglich in der reciproken Geraden jener erzeugenden liegen, und da diese Pole sämmtlich auf der reciproken Fläche befindlich sind, so wird diese reciproke Gerade gänzlich auf der Fläche (3) liegen, und diese reciproke Fläche somit geradlinig seyn.

Jetzt können wir leicht zeigen, was wir vorher schon erwähnt haben, daß so wie die Fläche (3) die reciproke Fläche der gegebenen Fläche (1) ist, hinwiederum diese Fläche (1) die reciproke Fläche jener Fläche (3) sey. Setzen wir nämlich, zur Abkürzung,

av

$$\frac{av+a'u+a''t+a'''}{dv+d'u+d''t+1} = Z \; ; \; \frac{bv+b'u+b''t+b'''}{dv+d'u+d''t+1} = X \; ; \; \frac{cv+c'u+c''t+c'''}{dv+d'u+d''t+1} = Y$$ §. 66.

so ist die Gleichung der Fläche (3) durch

$$A''^2BY^2 + A''^2CX^2 + 2A''BCZ = ABC \qquad (3')$$

ausgedrückt. Um nun wiederum die reciproke Fläche dieser letzten zu finden, müssen wir die Bedingung ausdrücken, daß die Polarebene (2), deren Gleichung, durch dieselben Verkürzungszeichen, sich auf

$$zZ + xY + yX + 1 = 0 \qquad (2')$$

reducirt, eine Tangentialebene der Fläche (3') sey. Die Bedingungsgleichung (8) im §. 59, nämlich

$$ba''^2p^2 + ca''^2n^2 - bcdm^2 + 2bca''mq = 0 \quad ,$$

welche sich auf die beiden Gleichungen

$$by^2 + cx^2 + 2a''z + d = 0 \quad ; \quad mz + ny + px + q = 0$$

bezieht, giebt uns, indem wir diese Gleichungen mit den Gleichungen (3') und (2') vergleichen, und demgemäß

$$b = A''^2B \;;\; c = A''^2C \;;\; a'' = A''BC \;;\; d = -ABC \;;$$
$$m = z \;;\; n = x \;;\; p = y \;;\; q = 1$$

setzen, unmittelbar

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \quad ,$$

also die Fläche (1) wieder, was zu zeigen war.

Wenn wir die gefundene Gleichung (3) der reciproken Fläche nach t, u, v ordnen, und durch das constante Glied dividiren, so enthält sie, wie die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades, neun Coefficienten, deren Werthe die Gestalt und die Lage der Fläche bestimmen. Da nun in diesen neun Coefficienten die 15 Größen a, a', a'', a''', b, b' rc. vorkommen, so können wir diesen funfzehn Größen noch ganz andere Werthe beilegen als diejenigen, welche aus der, in der Lösung der letzten Aufgabe enthaltenen, Bestimmung hervorgegangen sind, ohne daß die neun Coefficienten der geordneten Gleichung (3), d. i. ohne daß die Fläche (3) dadurch geändert wird. Bei einer solchen Aenderung jener 15 Größen wird daher die unverändert gebliebene Fläche (3) noch immer durch die fünf gegebenen Punkte gehen, und eine reciproke Fläche (1) seyn; aber es werden diese selbigen fünf Punkte nicht mehr die Pole der fünf gegebenen Tangentialebenen, sondern sie werden die Pole anderer Tangentialebenen der Fläche (1) seyn

§. 66. Es ist leicht einzusehen, daß man von jeden zwei Flächen zweiten Grades, wenn beide geradlinig oder wenn beide nicht geradlinig sind, die eine als die reciproke Fläche der andern betrachten kann. Denn ist

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 + 2A''z = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der einen, und

$$\alpha v^2 + \beta u^2 + \gamma t^2 + 2\alpha' tu + 2\beta' tv + 2\gamma' uv + 2\alpha'' v + 2\beta'' u + 2\gamma'' t + 1 = 0 \qquad (4)$$

die Gleichung der andern Fläche, so kann man die letzte Gleichung (4) der Gleichung (3), welche, wie wir gefunden haben, eine reciproke Fläche der der Fläche (1) darstellt, identificiren, und aus den neun, sich ergebenden Gleichungen a, a′, a″, a‴, b, ꝛc. bestimmen, wobei man noch sechs von diesen funfzehn Größen beliebig annehmen kann, wenn man es nur so einrichtet, daß die neun übrigen keine imaginairen oder unendlichen Werthe erhalten. (Hierbei setzen wir voraus, daß wenn, in der Gleichung (1), nicht $A'' = 0$ ist, auch die Gleichung (4) nicht eine Kegelfläche ausdrücke.)

Diese Eigenthümlichkeit der Flächen zweiten Grades, daß nämlich, im Allgemeinen, von je zwei solchen Flächen die eine als die reciproke Fläche der andern angesehen werden kann, wenn beide geradlinig oder beide nicht geradlinig sind, macht es möglich aus schon erwiesenen Sätzen von Flächen zweiten Grades andere Sätze derselben Flächen abzuleiten. Wir bemerken in dieser Rücksicht Folgendes. Einem jeden Punkte einer Fläche entspricht eine Tangentialebene der reciproken Fläche, und umgekehrt; der Verbindungslinie zweier Punkte einer Fläche entspricht die Durchschnittslinie der, diesen Punkten entsprechenden Tangentialebenen der reciproken Fläche, und umgekehrt; einer jeden ebenen Curve auf einer Fläche zweiten Grades entspricht ein Berührungskegel der reciproken Fläche, dessen Scheitel der Pol der Ebene jener Curve ist, und umgekehrt. — Um ein Beispiel der in Rede stehenden Ableitungen zu geben, nehmen wir die beiden Sätze (20) und (21) des §. 56, denen wir die daraus abgeleiteten wie folgt gegenüber stellen.

Alle Flächen zweiten Grades, welche durch sieben feste Punkte gehen, gehen zugleich durch einen bestimmten achten Punkt.

Alle Flächen zweiten Grades, welche sieben feste Ebenen berühren, berühren zugleich eine bestimmte achte Ebene.

Jede Fläche zweiten Grades, welche durch sieben Eckpunkte eines achteckigen sechsflächigen Polyeders (hexaèdre octogone) geht, geht auch durch den achten Eckpunkt.

Jede Fläche zweiten Grades, welche sieben Seitenebenen eines achtseitigen sechseckigen Polyeders (octaèdre hexagone) berührt, berührt auch die achte Seitenebene.

§. 67.

Wir wollen jetzt einen Fall betrachten, den wir im vorigen §. schon als einen Ausnahme-Fall genannt haben, denjenigen nämlich in welchem der Ort der Pole aller Tangentialebenen einer gegebenen Kegelfläche zweiten Grades gesucht wird.

Wir bemerken zunächst, daß der Ort der Pole aller Tangentialebenen einer Kegelfläche, welches auch der Grad dieser Kegelfläche seyn mag, im Allgemeinen, keine krumme Fläche seyn kann; denn da die Tangentialebenen der Kegelfläche sich sämmtlich in einem Punkte, dem Scheitel, schneiden, so werden im Allgemeinen die genannten Pole in einer Ebene, der Polarebene des Scheitels, liegen.

Es sey nun

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung einer gegebenen Kegelfläche zweiten Grades, und

$$(av + a'u + a''t + a''')z + (bv + b'u + b''t + b''')y + (cv + c'u + c''t + c''')x + dv + d'u + d''t + 1 = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung, welche die Reciprocität ausdrückt. Diese Gleichung stellt zugleich die Polarebene des Punktes tuv dar, und soll sie eine Tangentialebene der Fläche (1) seyn, so erhalten wir, nach §. 59 (S. 6), die beiden Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{c} AB(cv+c'u+c''t+c''')^2+AC(bv+b'u+b''t+b''')^2+BC(av+a'u+a''t+a''')^2 = 0 \\ dv + d'u + d''t + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die erste dieser Gleichungen drückt eine Fläche zweiten Grades aus, und die zweite stellt eine Ebene, die Polarebene des Anfangspunktes der x, y, z, d. i. die Polarebene des Scheitels der Kegelfläche (1) dar. Der Punkt tuv befindet sich also auf einer Fläche zweiten Grades und auf einer Ebene, d. i. auf der Curve, in welcher die Fläche zweiten Grades von dieser Ebene geschnitten wird, und somit auf einer ebenen Linie zweiten Grades. — Die reciproke Figur a' einer Kegelfläche zweiten Grades A ist daher, im Allgemeinen, eine ebene Linie vom zweiten Grade. Einer jeden Tangentialebene der Kegelfläche A entspricht als Pol ein Punkt der Curve a', und einer jeden erzeugenden Geraden der Kegelfläche A entspricht als reciproke Gerade eine Tangente der Curve a'.

Wir wollen jede Ebene, welche eine Tangente einer ebenen Curve a enthält, Tangentialebene dieser Curve a nennen. Demnach hat eine ebene Curve in jedem ihrer Punkte unendlich viele Tangentialebenen. Der Ort der Pole aller Tangentialebenen einer ebenen Curve ist eine Kegelfläche;

§. 67. denn da sich alle Tangentialebenen eines Punktes der Curve in der Tangente dieses Punktes schneiden, so werden die Pole dieser Tangentialebenen in der reciproken Geraden derselben Tangente liegen, und da sich alle Tangenten der Curve in einer Ebene befinden, so werden alle reciproken Geraden sich in einem Punkte, dem Pol der Ebene der Curve schneiden; der Ort der Pole aller Tangentialebenen der Curve bestehet demnach aus Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, und ist somit eine Kegelfläche.

Aufgabe [102]. Eine Linie zweiten Grades ist gegeben. Es soll der Ort der Pole aller Tangentialebenen dieser Curve gefunden werden.

Es sey die Ebene der Curve diejenige der xy, dann die Gleichung derselben

$$y^2 + mx^2 + 2nx = 0 \quad , \qquad (4)$$

und ferner sey die Reciprocität durch die Gleichung (2) dargestellt.

Die Gleichung der Tangente in einem Punkte x'y' der Curve (4) ist, wie wir wissen, $y'y + (mx' + n)x + nx' = 0$, folglich sind alle Tangentialebenen der Curve (4) im Punkte x'y' durch die Gleichung

$$\mu z + y'y + (mx' + n)x + nx' = 0 \qquad (5)$$

auszudrücken, in welcher μ eine willkürliche constante Größe bedeutet. Soll diese Tangentialebene die Polarebene eines Punktes tuv seyn, so muß die Gleichung (5) der Gleichung (2) identisch seyn, woraus sich, wenn wir, der Kürze wegen, die Gleichung (2) durch

$$Mz + Ny + Px + Q = 0$$

darstellen, die Bedingungsgleichungen

$$\frac{y'}{\mu} = \frac{N}{M} \quad ; \quad \frac{mx' + n}{\mu} = \frac{P}{M} \quad ; \quad \frac{nx'}{\mu} = \frac{Q}{M}$$

ergeben, neben welchen, weil der Punkt x'y' in der Curve (4) liegt, noch die Gleichung

$$y'^2 + mx'^2 + 2nx' = 0$$

existirt. Eliminiren wir zwischen den letzten vier Gleichungen x', y' und μ, so kommt

$$n^2N^2 + 2nPQ - mQ^2 = 0 \quad ,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left.\begin{aligned} n^2(bv + b'u + b''t + b''')^2 \\ + 2n(cv + c'u + c''t + c''')(dv + d'u + d''t + 1) \\ - m(dv + d'u + d''t + 1)^2 \end{aligned}\right\} = 0 \qquad (6)$$

als die Gleichung des gesuchten Ortes, welcher somit eine Kegelfläche vom

zweiten Grade ist, deren Scheitel in dem Durchschnittspunkte der drei, durch die Gleichungen

$$bv+b'u+b''t+b'''=0\ ;\quad cv+c'u+c''t+c'''=0\ ;\quad dv+d'u+d''t+1=0$$

dargestellten Ebenen liegt (§.23), und somit der Pol der Ebene $z = 0$, d. i. der Ebene der Curve (4) ist.

Zu derselben Gleichung (6) gelangen wir auch auf folgende Weise. Die Tangente der Curve (4) im Punkte $x'y'$ ist durch das Gleichungssystem

$$\left\{ y'y+(mx'+n)x+nx'=0\ ;\quad z=0 \right\}$$

dargestellt. Die reciproke Gerade dieser Tangente ist daher durch das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} (cv+c'u+c''t+c''')y'-(bv+b'u+b''t+b''')(mx'+n)=0 \\ (dv+d'u+d''t+1)y'-n(bv+b'u+b''t+b''')x'=0 \end{array} \right\}$$

in welchem t, u, v die laufenden Coordinaten bedeuten, auszudrücken (§.23). Eliminiren wir zwischen den beiden Gleichungen dieses letzten Systems und der Gleichung

$$y'^2+mx'^2+2nx'=0$$

die beiden Größen x', y', so erhalten wir die Gleichung (6).

Die reciproke Figur einer Linie zweiten Grades, im Raume betrachtet, ist daher, im Allgemeinen, eine Kegelfläche vom zweiten Grade.

Wir werden die Curve a', welche die reciproke Figur einer Kegelfläche A ist, die reciproke Curve dieser Kegelfläche, und die Kegelfläche A', welche die reciproke Figur einer Curve a ist, die reciproke Kegelfläche dieser Curve nennen. — Eine einfache geometrische Betrachtung lehrt uns, daß wenn eine Curve a' die reciproke Curve einer Kegelfläche A ist, auch umgekehrt die Kegelfläche A die reciproke Kegelfläche der Curve a' sey.

Eine Kegelfläche hat aber allerdings eine reciproke Fläche, wenn sie als zu einem von zwei conisch-reciproken Systemen, dessen Mittelpunkt in ihrem Scheitel liegt, gehörend betrachtet wird. Denn alsdann entspricht einer jeden Tangentialebene der Kegelfläche eine, durch den Mittelpunkt des andern Systems gehende, Polarlinie (§. 28), und die Polarlinien aller jener Tangentialebenen bilden in ihrer Continuität eine zweite Kegelfläche, welche wir die reciproke der ersten nennen.

Aufgabe [103]. Eine Kegelfläche zweiten Grades und vier sich in einem Punkte schneidende gerade Linien sind gegeben. Man soll die

§. 67. conisch-reciproke Fläche der gegebenen finden, welche die gegebenen vier Geraden enthält, und welche so beschaffen ist, daß diese Geraden vier bestimmten Tangentialebenen der gegebenen Kegelfläche entsprechen.

Wir nehmen den Scheitel der gegebenen Kegelfläche zum Anfangspunkte der x, y, z, und den Durchschnittspunkt der vier gegebenen Geraden zum Anfangspunkte der t, u, v. Die Gleichung der gegebenen Kegelfläche sey alsdann

$$Az^2 + By^2 + Cx^2 = 0 \quad , \qquad (7)$$

und die Gleichung, welche die Reciprocität der beiden conisch-reciproken Systeme ausdrückt, sey, zufolge §. 28 (S. 5),

$$(av + a'u + a''t)z + (bv + b'u + b''t)y + (cv + c'u + t)x = 0 \ . \qquad (8)$$

Ist nun

$$\left\{ \ t = \alpha v \quad ; \quad u = \beta v \ \right\}$$

das Gleichungssystem von einer der gegebenen vier Geraden, und

$$z + my + nx = 0$$

die Gleichung der bestimmten, ihr als Polarebene entsprechenden Tangentialebene der gegebenen Kegelfläche, so werden wir, durch Substitution der Ausdrücke von t und u in die Gleichung (8),

$$(a + a'\beta + a''\alpha)z + (b + b'\beta + b''\alpha)y + (c + c'\beta + \alpha)x = 0$$

erhalten, und durch das Identificiren dieser Gleichung mit der Gleichung $z + my + nx = 0$ zwei Gleichungen finden, in welchen die gegebenen Größen α u. β und die zu bestimmenden acht Größen, a, a', a'', b, b', b'', c und c', vorkommen. Auf ähnliche Weise werden wir, vermittelst der übrigen drei gegebenen Geraden und der bestimmten, ihnen entsprechenden Tangentialebenen, noch drei Paar Gleichungen finden, so daß wir überhaupt acht Gleichungen zur Bestimmung der acht genannten Coefficienten a, a', 2c. haben, welche in Beziehung auf diese Größen vom ersten Grade sind. Nehmen wir nun an, daß diesen Coefficienten die, aus der eben angegebenen Bestimmung hervorgehenden Werthe beigelegt sind, so ist nur noch die Bedingung auszudrücken, daß die Polarebene (8) eine Tangentialebene der Fläche (7) sey. In Folge der Aufgabe (92) im §. 59, und der daselbst aufgestellten Gleichungen (6), von welchen die erste hier von selbst befriedigt wird, haben wir also

$$AB(cv + c'u + t)^2 + AC(bv + b'u + b''t)^2 + BC(av + a'u + a''t)^2 = 0 \ , \quad (9)$$

und dieses ist die Gleichung der gesuchten Fläche, welche demnach ebenfalls eine Kegelfläche vom zweiten Grade ist.

Wenn wir die gefundene Gleichung (9) nach t, u, v ordnen, so enthält sie sechs Glieder, und, wenn wir einem dieser Glieder die Einheit zum Coefficienten geben, fünf Coefficienten, deren Werthe die Lage und Gestalt der Kegelfläche bestimmen. Da nun in diesen fünf Coefficienten die acht Größen a, a′, a″, b, ꝛc. vorkommen, so können wir diesen acht Größen im Allgemeinen noch ganz andere Werthe beilegen, als diejenigen, welche aus der, in der Lösung angegebenen Bestimmung hervorgehen, ohne daß die fünf Coefficienten der Gleichung (9), und also ohne daß die Fläche (9) dadurch geändert wird. Bei einer solchen Aenderung der acht Größen wird demnach die unverändert gebliebene Kegelfläche noch immer die vier gegebenen Geraden enthalten und eine conisch-reciproke Fläche der gegebenen seyn; aber es werden diese vier Geraden nicht mehr die Polarlinien der vier gegebenen Tangentialebenen, sondern sie werden die Polarlinien anderer Tangentialebenen der Fläche (7) seyn. §. 67.

Es ist leicht sich zu überzeugen, daß wenn eine Kegelfläche A′ die conisch-reciproke Fläche einer Kegelfläche A ist, auch umgekehrt die Kegelfläche A die conisch-reciproke Fläche der Kegelfläche A′ seyn muß.

Eben so leicht ist es einzusehen, daß von jeden zwei Kegelflächen zweiten Grades die eine als die reciproke Fläche der andern angesehen werden kann.

§. 68.

Wenn von zwei reciproken und reciprok-liegenden Systemen die Directrix (§. 61) gegeben ist, so können wir zu jeder Fläche zweiten Grades A die reciproke und reciprok-liegende Fläche A′ finden, indem wir aus der Gleichung der Directrix diejenige Gleichung, welche die Beziehung der Reciprocität der beiden Systeme ausdrückt, nach §. 61 und §. 62 leicht aufstellen, wobei es denn keinen Unterschied macht, ob wir die Fläche A als zu dem einen oder als zu dem andern Systeme gehörend betrachten, weil diese Systeme eben eine reciproke Lage haben.

Aufgabe [104]. Die reciproke Fläche irgend einer Kugelfläche zu finden, wenn eine gegebene Kugelfläche die Directrix der Reciprocität ist.

Nehmen wir den Mittelpunkt der Directrix zum Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, so ist die Gleichung dieser Directrix

$$z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \qquad (1)$$

Die Gleichung der Polarebene irgend eines Punktes tuv in Beziehung auf diese Kugelfläche ist (§. 61 od. 62. S. 2)

§. 68. $$vz + uy + tx = r^2\ ; \qquad (2)$$

und diese Gleichung drückt zugleich die Beziehung der Reciprocität der beiden Systeme xyz und tuv aus.

Ist nun

$$(z-\gamma)^2 + (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = R^2 \qquad (3)$$

die Gleichung irgend einer Kugelfläche, so finden wir, ganz auf dieselbe Weise wie im §. 66,

$$R^2(v^2 + u^2 + t^2) = (\gamma v + \beta u + \alpha t - r^2)^2 \qquad (4)$$

als die Gleichung der reciproken Fläche der Fläche (3).

Diese reciproke Fläche (4) der Kugelfläche (3) ist, wie wir aus ihrer Gleichung erkennen, eine Rotationsfläche vom zweiten Grade, und zwar ein elliptisches Hyperboloid, ein verlängertes Sphäroid oder ein Rotations-Paraboloid, je nachdem $R^2 < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $R^2 > \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ oder $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (§. 52), d. i. je nachdem der Mittelpunkt der Directrix (1) außerhalb, innerhalb oder auf der Kugelfläche (3) liegt; und ein Brennpunkt dieser reciproken Fläche (4) fällt mit dem Mittelpunkte der Directrix zusammen.

Es ist daher die reciproke Fläche einer Kugel in Beziehung auf eine andere zur Directrix genommene Kugelfläche eine Rotationsfläche vom zweiten Grade, deren einer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Directrix zusammen fällt; und umgekehrt, wird ein Brennpunkt einer gegebenen Rotationsfläche vom zweiten Grade zum Mittelpunkt einer Kugelfläche und diese als Directrix genommen, so ist die reciproke Fläche der gegebenen eine Kugelfläche.

§. 69.

Zwei Flächen vom zweiten Grade schneiden sich, im Allgemeinen, in einer (reellen oder imaginairen) Curve von doppelter Krümmung, deren Projectionen Curven vom vierten Grade sind; denn die Elimination einer der veränderlichen Größen x, y, z zwischen den beiden Gleichungen der Flächen, welche vom zweiten Grade sind, giebt eine Finalgleichung, welche die übrigen beiden veränderlichen Größen enthält, und, im Allgemeinen, vom vierten Grade ist. — Schneiden sich zwei solche Flächen in einer geraden Linie, so schneiden sie sich noch außerdem in einer Curve, die im Allgemeinen von doppelter Krümmung ist und deren Projectionen vom dritten Grade sind; in besonderen Fällen besteht dieser zweite Durchschnitt aber aus

einer Geraden und einer Linie zweiten Grades, welche auch imaginair seyn §. 69.
oder ins Unendliche fallen kann — Schneiden sich zwei Flächen zweiten Grades in einer ebenen Linie vom zweiten Grade, so schneiden sie sich außerdem noch in einer zweiten ebenen Linie zweiten Grades, welche aber auch imaginair seyn, in einen Punkt degeneriren oder ins Unendliche fallen kann.

Nehmen wir die Ebene einer Linie zweiten Grades, in welcher sich zwei Flächen desselben Grades schneiden, zur Ebene der xy, und ist jene Curve alsdann durch die Gleichung

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 \quad (1)$$

ausgedrückt, so sind die Gleichungen dieser beiden Flächen, da eine jede derselben sich für $z = 0$ auf die Gleichung (1) zurückziehen muß, augenscheinlich

$$Az^2 + 2(By + Cx + D)z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 \quad (2)$$

$$A'z^2 + 2(B'y + C'x + D')z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 \quad (3)$$

und durch Subtraction erhalten wir auf der Stelle

$$z \cdot \left\{(A-A')z + 2(B-B')y + 2(C-C')x + 2(D-D')\right\} = 0 \quad , \quad (4)$$

eine Gleichung, welche von den Werthen der Coordinaten aller derjenigen Punkte befriedigt werden muß, welche beiden Flächen gemein sind. Diese Gleichung (4) drückt aber zwei Ebenen, nämlich die Ebene der xy und eine zweite Ebene, aus. Die beiden Flächen (2) und (3), welche sich auf der Ebene der xy schneiden, schneiden sich also noch auf einer zweiten Ebene; was wir vorher behauptet haben.

Wir haben hier Gelegenheit das Princip der Reciprocität anzuwenden. Stellen wir uns zwei Flächen zweiten Grades vor, die von einem und demselben Kegel berührt werden, so entsprechen diesen beiden Flächen und dem gemeinschaftlichen Berührungskegel, in einem reciproken Systeme, zwei Flächen zweiten Grades und eine ebene Durchschnittslinie derselben. Diese letzteren Flächen haben aber, wie wir vorher gezeigt haben, eine zweite ebene (reelle oder imaginaire) Durchschnittslinie, und dieser entspricht in dem Systeme der zuerst genannten Flächen ein zweiter, diesen Flächen gemeinschaftlicher (reeller oder imaginairer) Berührungskegel, wobei wir bemerken müssen, daß wenn jene zweite ebene Durchschnittscurve imaginair ist, doch die Ebene dieser Curve reell ist, und daß folglich wenn jener zweite Berührungskegel imaginair ist, doch sein Scheitel ein reeller Punkt sey. Daher
Haben zwei Flächen zweiten Grades einen gemeinschaftlichen

§. 60. Berührungskegel, so haben sie außerdem noch einen zweiten gemeinschaftlichen Berührungskegel, welcher aber auch in einen Punkt oder in eine Ebene degeneriren kann.

Bezeichnen

$$A = 0 \quad \text{und} \quad B = 0 \qquad (5)$$

die Gleichungen zweier gegebenen Flächen zweiten Grades, so drückt die Gleichung

$$A + \lambda B = 0 \quad , \qquad (6)$$

in welcher λ einen willkürlichen constanten Factor bezeichnet, alle Flächen zweiten Grades aus, welche die Durchschnittscurve der gegebenen Flächen (5) enthalten (§. 56). Ist diese Durchschnittscurve das System zweier ebenen (reellen oder imaginairen) Curven, so giebt es zwei Ebenen, welche diese Durchschnittscurve enthalten, und das System dieser beiden Ebenen muß sich unter der Form (6) darstellen lassen, d. h. es muß einen Werth λ' von λ geben, für welchen die Gleichung (6) in zwei Factoren vom ersten Grade zerlegbar wird, so daß, wenn p und q diese Factoren bezeichnen,

$$A + \lambda' B \equiv pq = 0$$

ist.

Wird eine Fläche zweiten Grades

$$A = 0$$

von zwei anderen Flächen desselben Grades,

$$B = 0 \quad \text{und} \quad C = 0$$

in derselben Linie zweiten Grades geschnitten, deren Ebene durch die Gleichung

$$p = 0$$

ausgedrückt seyn mag, so haben wir, nach dem Vorhergehenden,

$$A + \lambda' B \equiv pq = 0 \quad ,$$
$$A + \mu' C \equiv pr = 0 \quad ,$$

wo $q = 0$ und $r = 0$ die Gleichungen der Ebenen der zweiten Durchschnittscurven bedeuten. Durch Subtraction erhalten wir aus den letzten beiden Gleichungen

$$\lambda' B - \mu' C \equiv p(q - r) = 0 \quad .$$

Die Flächen $B = 0$ und $C = 0$ schneiden sich also in zwei ebenen Curven, deren Ebenen respective durch die Gleichungen

$$p = 0 \quad \text{und} \quad q - r = 0$$

ausgedrückt sind. Nun schneiden sich aber die Ebenen

$$q = 0 \quad ; \quad r = 0 \quad ; \quad q - r = 0$$

in einer und derselben Geraden, da die Gleichung der letzten eine Folge der Gleichungen der beiden ersten ist; und wir haben somit den §. 69.

Lehrsatz [28]. Schneiden sich drei Flächen zweiten Grades in einer und derselben Linie zweiten Grades, so gehen die drei Ebenen der zweiten Durchschnittscurven von je zwei dieser Flächen durch eine und dieselbe gerade Linie.

Hieraus erhalten wir, vermittelst der Reciprocität, den

Lehrsatz [29]. Haben drei Flächen zweiten Grades einen und denselben Berührungskegel, so liegen die drei Scheitel der zweiten Berührungskegel, welche je zwei dieser Flächen gemeinschaftlich umschrieben sind, in einer und derselben Geraden.

Aus dem Satze (28) erhellet unmittelbar, daß drei Flächen zweiten Grades, welche sich in einer und derselben Linie zweiten Grades schneiden, entweder noch eine zweite Linie desselben Grades, oder noch zwei und nicht mehr Punkte mit einander gemein haben können, welche auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der, vorher durch $q = 0$, $r = 0$ und $q - r = 0$ ausgedrückten Ebenen liegen. Und hieraus, vermittelst der Reciprocität, oder aus dem Satze (29) unmittelbar, ergiebt sich, daß drei Flächen zweiten Grades, welche einen und denselben Berührungskegel haben, entweder noch einen zweiten Berührungskegel, oder noch zwei und nicht mehr Tangentialebenen mit einander gemein haben können, welche sich in der, im Satze (29) genannten Geraden schneiden.

Die beiden vorhergehenden Sätze sind nur specielle Fälle der beiden folgenden:

Lehrsatz [30]. Schneiden sich von drei Flächen zweiten Grades je zwei und zwei in ebenen Curven, so gehen von den sechs Ebenen dieser Curven vier mal drei durch eine gerade Linie, und sämmtliche sechs Ebenen durch einen Punkt.

Lehrsatz [31]. Haben von drei Flächen zweiten Grades je zwei und zwei gemeinschaftliche Berührungskegel, so liegen von den sechs Scheiteln dieser Kegel vier mal drei auf einer geraden Linie, und sämmtliche sechs Scheitel auf einer Ebene.

von welchen wir nur den ersten erweisen dürfen, indem der zweite vermittelst der Reciprocität aus jenem abgeleitet ist.

Es seyen

$$A = 0 \;;\; B = 0 \;;\; C = 0$$

die Gleichungen der drei genannten Flächen zweiten Grades. Nehmen wir

§. 69. eine der Durchschnittsebenen der Flächen A u. B zur Ebene der xy ,
eine der Durchschnittsebenen der Flächen A u. C zur Ebene der xz ,
eine der Durchschnittsebenen der Flächen B u. C zur Ebene der yz ,

und ist nun die, in der Ebene der xy befindliche Durchschnittscurve der Flächen A u. B durch die Gleichung

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0$$

ausgedrückt, so ist, weil die Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ sich für $z = 0$ auf eben diese Gleichung zurückziehen müssen,

$$A \equiv \alpha z^2 + 2(\beta y + \gamma x + \delta)z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 ,$$
$$B \equiv \alpha' z^2 + 2(\beta' y + \gamma' x + \delta')z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 .$$

Weil aber die Fläche $C = 0$ durch die beiden Curven gehen soll, in welchen die Fläche $A = 0$ die Ebene der xz, und die Fläche $B = 0$ die Ebene der yz schneidet, so müssen diese beiden Curven sich und die Achse der z in denselben zwei Punkten schneiden (§. 56); und da, wenn wir in den zuletzt aufgestellten Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ setzen,

$$A \equiv \alpha z^2 + 2\delta z + 1 = 0 \quad ; \quad B \equiv \alpha' z^2 + 2\delta' z + 1 = 0$$

kommt, so müssen nothwendigerweise

$$\alpha = \alpha' \quad \text{und} \quad \delta = \delta'$$

seyn. Wir haben daher

$$A \equiv \alpha z^2 + 2(\beta y + \gamma x + \delta)z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 , \quad (7)$$
$$B \equiv \alpha z^2 + 2(\beta' y + \gamma' x + \delta)z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 , \quad (8)$$

und es ist die Gleichung der Durchschnittscurve der Ebene

der xz mit der Fläche $A = 0$, $\alpha z^2 + 2(\gamma x + \delta)z + cx^2 + 2ex + 1 = 0$,
der yz mit der Fläche $B = 0$, $\alpha z^2 + 2(\beta' y + \delta)z + ay^2 + 2dy + 1 = 0$.

Da die Fläche $C = 0$ diese beiden Curven enthalten soll, so ist ihre Gleichung

$$C \equiv \alpha z^2 + 2(\beta' y + \gamma x + \delta)z + ay^2 + 2b' xy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 . \quad (9)$$

Durch Subtraction erhalten wir aus den Gleichungen (7, 8 u. 9)

$$A - B \equiv 2\{(\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')x\}z = 0 ,$$
$$A - C \equiv 2\{(\beta - \beta')z + (b - b')x\}y = 0 ,$$
$$B - C \equiv 2\{(\gamma' - \gamma)z + (b - b')y\}x = 0 ,$$

und die Gleichungen der Ebenen der sechs Durchschnittscurven sind daher, wenn wir, zur Abkürzung, $\beta - \beta' = m$, $\gamma - \gamma' = n$, $b - b' = p$ setzen,

$$my + nx = 0\ ;\quad mz + px = 0\ ;\quad nz + py = 0\ ;$$ §. 69.
$$z = 0\ ;\quad y = 0\ ;\quad x = 0.$$

Von diesen sechs Ebenen schneiden sich aber, wie wir sehen, die 1ste, 2te und 3te; die 1ste, 5te und 6te; die 2te, 4te und 6te; die 3te, 4te und 5te in einer Geraden, und alle sechs Ebenen gehen durch einen Punkt, den Anfangspunkt der Coordinaten, w. z. e. w.

Durch ein Verfahren, welches demjenigen ähnlich ist, das wir in dem letzten Beweise angewandt haben, läßt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes (32) darthun, der auch aus dem vorhergehenden abgeleitet werden kann.

Lehrsatz [32]. Legt man durch eine jede von zwei festen, in einer und derselben gegebenen Ebene befindlichen Linie zweiten Grades eine beliebige Fläche zweiten Grades dergestalt, daß diese beiden Flächen sich in ebenen Curven schneiden, so schneiden die Ebenen dieser Curven die gegebene Ebene in zwei bestimmten geraden Linien, welche immer dieselben bleiben, wie die genannten Flächen zweiten Grades sich auch verändern mögen *).

Lehrsatz [33]. Beschreibt man in eine jede von zwei festen, einen und denselben gegebenen Scheitel habenden Kegelflächen zweiten Grades eine beliebige Fläche zweiten Grades dergestalt, daß diese beiden Flächen gemeinschaftliche Berührungskegel haben, so liegen die Scheitel dieser Berührungskegel auf zwei durch den gegebenen Scheitel gehenden, bestimmten geraden Linien, welche immer dieselben bleiben, wie die genannten Flächen zweiten Grades sich auch verändern mögen.

Der Satz (33) ergiebt sich nach dem Prinzipe der Reciprocität aus dem Satze (32) unmittelbar. Uebrigens erkennen wir in den beiden bestimmten Graden, deren der Satz (32) erwähnt, die Collineationsachsen der beiden festen Linien zweiten Grades (I. §. 45).

§. 70.

Zwei Flächen zweiten Grades berühren sich in einem Punkte, wenn sie diesen Punkt mit einander gemein, und in demselben eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben. Wir bemerken hierbei, daß zwei, sich in einem Punkte berührende Flächen zweiten Grades entweder nur diesen einen Punkt mit einander gemein haben, oder daß sie sich in ebenen Curven oder auch in einer Curve doppelter Krümmung schneiden können. Daß eine Fläche zwei-

*) Dieser Satz ist zuerst im Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik Th. II. S. 46 aufgestellt worden.

§. 70. sich in drei Punkten berühren; zwei, in derselben Ebene liegende Linien zweiten Grades, welche sich in drei Punkten berühren sollen, fallen aber in eine einzige Curve zusammen.

Zwei Flächen zweiten Grades, welche sich in einer Curve berühren, haben in derselben offenbar denselben Berührungskegel. Dieser Berührungskegel hat aber mit einer jeden dieser Flächen nur diese Berührungscurve gemein. Ist demnach

$$p = 0 \tag{1}$$

die Gleichung der Ebene dieser Berührungscurve, sind

$$A = 0 \text{ und } B = 0 \tag{2}$$

die Gleichungen der genannten Flächen zweiten Grades, und ist ferner

$$K = 0$$

die Gleichung des gemeinschaftlichen Berührungskegels, so haben wir, bei einer gehörigen Bestimmung von λ und μ, offenbar

$$K + \lambda A \equiv gp^2 = 0 \quad ,$$
$$K + \mu B \equiv hp^2 = 0 \quad ,$$

wo g und h sowohl als λ und μ constante Factoren bezeichnen. Durch Subtraction erhalten wir

$$\lambda A - \mu B \equiv (g-h)p^2 = 0 \quad ,$$

oder, wenn wir $\frac{\mu}{\lambda}$ durch $-\varkappa$ und $\frac{g-h}{\lambda}$ durch k bezeichnen,

$$A + \varkappa B \equiv kp^2 = 0 \quad . \tag{3}$$

Berühren sich also zwei Flächen zweiten Grades (2) in einer Curve, so lassen sich ihre Gleichungen, nachdem die eine mit einem schicklichen Factor multiplicirt worden, durch Addition zu einer Gleichung (3) verbinden, welche die Ebene der Berührungscurve ausdrückt; woraus denn zugleich folgt, daß zwei solche Flächen keinen, nicht in der Berührungscurve liegenden Punkt mit einander gemein haben können.

Lehrsatz [34]. Wird von zwei Flächen zweiten Grades eine jede von einer dritten Fläche desselben Grades in einer Curve berührt, so schneiden sich jene zwei Flächen in zwei (reellen oder imaginairen) ebenen Curven, und die Ebenen dieser Durchschnittscurven, welche, wenn diese Curven imaginair sind, sowohl reell als imaginair seyn können, schneiden sich in der Durchschnittslinie der Ebenen der Berührungscurven.

Denn sind A = 0 und B = 0 die Gleichungen der beiden zuerst genann-

nannten Flächen und ist $C = 0$ diejenige der berührenden Fläche, so ist nach dem vorher Gefundenen

$$C + \varkappa A \equiv kp^2 = 0 \quad ,$$
$$C + \varkappa' B \equiv k'q^2 = 0 \quad ,$$

wo $p = 0$ und $q = 0$ die Ebenen der Berührungscurven ausdrücken. Durch Subtraction ergiebt sich

$$\varkappa A - \varkappa' B \equiv kp^2 - k'q^2 \equiv (k^{\frac{1}{2}}p + k'^{\frac{1}{2}}q)(k^{\frac{1}{2}}p - k'^{\frac{1}{2}}q) = 0 \quad .$$

Die Flächen $A = 0$ und $B = 0$ schneiden sich also in zwei Curven einfacher Krümmung, deren Ebenen durch die Gleichungen

$$k^{\frac{1}{2}}p + k'^{\frac{1}{2}}q = 0 \quad \text{und} \quad k^{\frac{1}{2}}p - k'^{\frac{1}{2}}q = 0$$

ausgedrückt sind. Diese Ebenen sind reell oder imaginair, je nachdem k und k' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Welcher von diesen beiden Fällen aber auch Statt finden mag, so schneiden sich diese Ebenen offenbar in derjenigen reellen Linie, in welcher sich die Ebenen $p = 0$ und $q = 0$, d. i. in welcher sich die Ebenen der Berührungscurven schneiden.

Aus dem so eben bewiesenen Lehrsatze folgt unmittelbar, daß zwei Flächen zweiten Grades, welche sich in einer Curve doppelter Krümmung schneiden, nicht zugleich von einer und derselben Fläche zweiten Grades in Curven berührt werden können.

Soll demnach zweien Flächen zweiten Grades ein Kegel gemeinschaftlich umschrieben werden können, so müssen diese Flächen sich in (reellen oder imaginairen) ebenen Curven schneiden oder in einer solchen Curve sich berühren.

Confocale Flächen zweiten Grades werden wir diejenigen Rotationsflächen vom zweiten Grade nennen, welche einen Brennpunkt gemein haben.

Lehrsatz [35]. I. Zwei confocale Flächen zweiten Grades schneiden sich in ebenen Curven. II. Jeder Rotationskegel, welcher seinen Mittelpunkt (Scheitel) im Brennpunkte einer Rotationsfläche zweiten Grades hat, schneidet diese Fläche in ebenen Curven. III. Jeder Kegel, welcher seinen Mittelpunkt (Scheitel) im Brennpunkte einer Rotationsfläche zweiten Grades hat und welcher diese Fläche in ebenen Curven schneidet, ist ein Rotationskegel.

I. Zwei confocale Flächen zweiten Grades können, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, immer durch die Gleichungen

$$z^2 + y^2 + x^2 = \frac{1}{\alpha^2 [\text{illegible}]} (az + by + cx + 1)^2 \qquad (4)$$

§. 70.

$$z^2 + y^2 + x^2 = \frac{1}{\alpha'^2 n'^2}(a'z + b'y + c'x + 1)^2 \qquad (5)$$

ausgedrückt werden, wo n und n' so wie $\alpha = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ und $\alpha' = \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}$ reelle Größen sind (§. 52, S. 1). Durch Subtraction ergiebt sich

$$\alpha'^2 n'^2 (az + by + cx + 1)^2 - \alpha^2 n^2 (a'z + b'y + c'x + 1)^2 = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, welche zwei (reelle) Ebenen ausdrückt, was die erste Behauptung des Satzes erweist.

II. Ein Rotationskegel, welcher seinen Scheitel in einem Brennpunkt einer Rotationsfläche zweiten Grades hat, und diese Fläche können, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, immer respective durch die Gleichungen

$$z^2 + y^2 + x^2 = \frac{1}{\alpha^2 n^2}(az + by + cx)^2$$

$$z^2 + y^2 + x^2 = \frac{1}{a'^2 n'^2}(a'z + b'y + c'x + 1)^2$$

ausgedrückt werden, woraus sich, wie in I, durch Subtraction die Gleichungen zweier Ebenen finden, was die zweite Behauptung des Satzes rechtfertigt.

III. Es sey C eine, auf einer Rotationsfläche zweiten Grades A befindliche ebene Curve. Wäre nun der Kegel K, dessen Scheitel in einem Brennpunkte F der Fläche A liegt, und dessen Oberfläche die Curve C enthält, kein Rotationskegel, so nehme man drei Punkte p_1, p_2, p_3 auf der Peripherie der Curve C beliebig an, und ziehe die Geraden Fp_1, Fp_2, Fp_3. Diese drei Linien bestimmen einen Rotationskegel R, und dieser schneidet die Fläche A, nach dem in II. Bewiesenen, in einer ebenen Curve D, welche offenbar die Punkte p_1, p_2, p_3 enthält. Die Ebenen der Curven C und D fallen also, da sie drei Punkte gemein haben, zusammen, und bilden somit eine einzige Ebene, welche die Fläche A in zwei verschiedenen Curven C und D schneiden müßte, was unmöglich ist. Daher ist der Kegel K ein Rotationskegel, was der dritte Theil des Lehrsatzes behauptet.

§. 71.

Wir haben schon mehrere Male Gelegenheit gehabt zu bemerken, daß die krummen Flächen zweiten Grades in drei Hauptarten zerfallen, welche sorgfältig von einander unterschieden werden müssen; namentlich war dies der Fall als wir die reciproken Figuren jener Flächen betrachteten (§. 66). Die erste Art enthält das Ellipsoid, das elliptische Hyperboloid und das elliptische

Paraboloid, die **zweite** Art das hyperbolische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid, und die **dritte** Art die Kegelfläche. (Diese Eintheilung in drei Arten gilt für alle krumme Flächen, von welchem Grade sie auch immer seyn mögen; jede Fläche ist nämlich entweder concav-concav oder convex-concav oder developpabel, was in der Folge ausführlich betrachtet werden wird.) Dieselbe Eintheilung stellt sich sogleich heraus, wenn wir die collinear-verwandten Figuren der Flächen zweiten Grades betrachten. Mit einer Fläche vom zweiten Grade, welche zu der ersten Art gehört, kann nur eine Fläche von derselben Art collinear-verwandt seyn; mit einer solchen Fläche der zweiten Art nur eine Fläche der zweiten Art und mit einer Fläche der dritten Art blos eine Fläche der dritten Art. Denn wenn eine Fläche geradlinig ist, so wird auch die ihr collinear-verwandte Fläche geradlinig seyn, und wenn sich die erzeugenden Geraden sämmtlich in **einem** Punkte schneiden, so werden auch die erzeugenden Geraden der collinearen Fläche sämmtlich durch **einen** Punkt gehen.

Aufgabe [105]. *Es sind zwei Flächen zweiten Grades, welche einen gemeinschaftlichen Berührungskegel haben, gegeben. Man soll untersuchen, unter welchen Bedingungen jene beiden Flächen als centrisch-collinear und collinear-liegend, und der Scheitel dieses Berührungskegels als Collineationscentrum angesehen werden kann.*

Wir nehmen den Scheitel des gemeinschaftlichen Berührungskegels zum Anfangspunkte eines Coordinatensystems, in welchem wir die Coordinaten durch x, y, z oder t, u, v bezeichnen. Die Gleichung dieses Kegels ist alsdann

$$K \equiv az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz = 0 \quad ,$$

oder

$$K \equiv av^2 + bu^2 + ct^2 + 2a'tu + 2b'tv + 2c'uv = 0 \quad .$$

Sind $A = 0$ und $B = 0$ die Gleichungen der beiden gegebenen Flächen, und

$$C \equiv \alpha z + \beta y + \gamma x + 1 = 0 \quad ; \quad D \equiv \alpha' v + \beta' u + \gamma' t + 1 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen der Berührungscurven des Kegels und respective der Flächen $A = 0$ und $B = 0$, so haben wir, zufolge des vor. §.,

$$K + \lambda A \equiv gC^2 = 0 \quad ; \quad K + \mu B \equiv hD^2 = 0 \quad ,$$

also

$$-\lambda A \equiv K - gC^2 = 0 \quad ; \quad -\mu B \equiv K - hD^2 = 0 \quad ,$$

d. i. die Gleichungen der beiden gegebenen Flächen sind

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz - g(\alpha z + \beta y + \gamma x + 1)^2 = 0 \quad , \quad (1)$$

$$av^2 + bu^2 + ct^2 + 2a'tu + 2b'tv + 2c'uv - h(\alpha' v + \beta' u + \gamma' t + 1)^2 = 0 \quad . \quad (2)$$

§. 69. Berührungskegel, so haben sie außerdem noch einen zweiten gemeinschaftlichen Berührungskegel, welcher aber auch in einen Punkt oder in eine Ebene degeneriren kann.

Bezeichnen

$$A = 0 \quad \text{und} \quad B = 0 \tag{5}$$

die Gleichungen zweier gegebenen Flächen zweiten Grades, so drückt die Gleichung

$$A + \lambda B = 0 \quad , \tag{6}$$

in welcher λ einen willkürlichen constanten Factor bezeichnet, alle Flächen zweiten Grades aus, welche die Durchschnittscurve der gegebenen Flächen (5) enthalten (§. 56). Ist diese Durchschnittscurve das System zweier ebenen (reellen oder imaginairen) Curven, so giebt es zwei Ebenen, welche diese Durchschnittscurve enthalten, und das System dieser beiden Ebenen muß sich unter der Form (6) darstellen lassen, d. h. es muß einen Werth λ' von λ geben, für welchen die Gleichung (6) in zwei Factoren vom ersten Grade zerlegbar wird, so daß, wenn p und q diese Factoren bezeichnen,

$$A + \lambda' B \equiv pq = 0$$

ist.

Wird eine Fläche zweiten Grades

$$A = 0$$

von zwei anderen Flächen desselben Grades

$$B = 0 \quad \text{und} \quad C = 0$$

in derselben Linie zweiten Grades geschnitten, deren Ebene durch die Gleichung

$$p = 0$$

ausgedrückt seyn mag, so haben wir, nach dem Vorhergehenden,

$$A + \lambda' B \equiv pq = 0 \quad ,$$
$$A + \mu' C \equiv pr = 0 \quad ,$$

wo $q = 0$ und $r = 0$ die Gleichungen der Ebenen der zweiten Durchschnittscurven bedeuten. Durch Subtraction erhalten wir aus den letzten beiden Gleichungen

$$\lambda' B - \mu' C \equiv p(q - r) = 0 \quad .$$

Die Flächen $B = 0$ und $C = 0$ schneiden sich also in zwei ebenen Curven, deren Ebenen respective durch die Gleichungen

$$p = 0 \quad \text{und} \quad q - r = 0$$

ausgedrückt sind. Nun schneiden sich aber die Ebenen

$$q = 0 \quad ; \quad r = 0 \quad ; \quad q - r = 0$$

in einer und derselben Geraden, da die Gleichung der letzten eine Folge der Gleichungen der beiden ersten ist; und wir haben somit den §. 69.

Lehrsatz [28]. Schneiden sich drei Flächen zweiten Grades in einer und derselben Linie zweiten Grades, so gehen die drei Ebenen der zweiten Durchschnittscurven von je zwei dieser Flächen durch eine und dieselbe gerade Linie.

Hieraus erhalten wir, vermittelst der Reciprocität, den

Lehrsatz [29]. Haben drei Flächen zweiten Grades einen und denselben Berührungskegel, so liegen die drei Scheitel der zweiten Berührungskegel, welche je zwei dieser Flächen gemeinschaftlich umschrieben sind, in einer und derselben Geraden.

Aus dem Satze (28) erhellet unmittelbar, daß drei Flächen zweiten Grades, welche sich in einer und derselben Linie zweiten Grades schneiden, entweder noch eine zweite Linie desselben Grades, oder noch zwei und nicht mehr Punkte mit einander gemein haben können, welche auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der, vorher durch $q = 0$, $r = 0$ und $q - r = 0$ ausgedrückten Ebenen liegen. Und hieraus, vermittelst der Reciprocität, oder aus dem Satze (29) unmittelbar, ergiebt sich, daß drei Flächen zweiten Grades, welche einen und denselben Berührungskegel haben, entweder noch einen zweiten Berührungskegel, oder noch zwei und nicht mehr Tangentialebenen mit einander gemein haben können, welche sich in der, im Satze (29) genannten Geraden schneiden.

Die beiden vorhergehenden Sätze sind nur specielle Fälle der beiden folgenden:

Lehrsatz [30]. Schneiden sich von drei Flächen zweiten Grades je zwei und zwei in ebenen Curven, so gehen von den sechs Ebenen dieser Curven vier mal drei durch eine gerade Linie, und sämmtliche sechs Ebenen durch einen Punkt.

Lehrsatz [31]. Haben von drei Flächen zweiten Grades je zwei und zwei gemeinschaftliche Berührungskegel, so liegen von den sechs Scheiteln dieser Kegel vier mal drei auf einer geraden Linie, und sämmtliche sechs Scheitel auf einer Ebene.

von welchen wir nur den ersten erweisen dürfen, indem der zweite vermittelst der Reciprocität aus jenem abgeleitet ist.

Es seyen

$$A = 0 \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad C = 0$$

die Gleichungen der drei genannten Flächen zweiten Grades. Nehmen wir

§. 69. eine der Durchschnittsebenen der Flächen A u. B zur Ebene der xy ,
eine der Durchschnittsebenen der Flächen A u. C zur Ebene der xz ,
eine der Durchschnittsebenen der Flächen B u. C zur Ebene der yz ,

und ist nun die, in der Ebene der xy befindliche Durchschnittscurve der Flächen A u. B durch die Gleichung

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0$$

ausgedrückt, so ist, weil die Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ sich für $z = 0$ auf eben diese Gleichung zurückziehen müssen,

$$A \equiv \alpha z^2 + 2(\beta y + \gamma x + \delta)z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 ,$$
$$B \equiv \alpha' z^2 + 2(\beta' y + \gamma' x + \delta')z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 .$$

Weil aber die Fläche $C = 0$ durch die beiden Curven gehen soll, in welchen die Fläche $A = 0$ die Ebene der xz, und die Fläche $B = 0$ die Ebene der yz schneidet, so müssen diese beiden Curven sich und die Achse der z in denselben zwei Punkten schneiden (§. 56); und da, wenn wir in den zuletzt aufgestellten Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ setzen,

$$A \equiv \alpha z^2 + 2\delta z + 1 = 0 \quad ; \quad B \equiv \alpha' z^2 + 2\delta' z + 1 = 0$$

kommt, so müssen nothwendigerweise

$$\alpha = \alpha' \quad \text{und} \quad \delta = \delta'$$

seyn. Wir haben daher

$$A \equiv \alpha z^2 + 2(\beta y + \gamma x + \delta)z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 , \quad (7)$$
$$B \equiv \alpha z^2 + 2(\beta' y + \gamma' x + \delta)z + ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 , \quad (8)$$

und es ist die Gleichung der Durchschnittscurve der Ebene

der xz mit der Fläche $A = 0$, $\alpha z^2 + 2(\gamma x + \delta)z + cx^2 + 2ex + 1 = 0$,
der yz mit der Fläche $B = 0$, $\alpha z^2 + 2(\beta' y + \delta)z + ay^2 + 2dy + 1 = 0$.

Da die Fläche $C = 0$ diese beiden Curven enthalten soll, so ist ihre Gleichung

$$C \equiv \alpha z^2 + 2(\beta' y + \gamma x + \delta)z + ay^2 + 2b'xy + cx^2 + 2dy + 2ex + 1 = 0 . \quad (9)$$

Durch Subtraction erhalten wir aus den Gleichungen (7, 8 u. 9)

$$A - B \equiv 2\{(\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')x\}z = 0 ,$$
$$A - C \equiv 2\{(\beta - \beta')z + (b - b')x\}y = 0 ,$$
$$B - C \equiv 2\{(\gamma' - \gamma)z + (b - b')y\}x = 0 ,$$

und die Gleichungen der Ebenen der sechs Durchschnittscurven sind daher, wenn wir, zur Abkürzung, $\beta - \beta' = m$, $\gamma - \gamma' = n$, $b - b' = p$ setzen,

$my + nx = 0$; $mz + px = 0$; $nz + py = 0$; §. 69.
$z = 0$; $y = 0$; $x = 0$.

Von diesen sechs Ebenen schneiden sich aber, wie wir sehen, die 1ste, 2te und 3te; die 1ste, 5te und 6te; die 2te, 4te und 6te; die 3te, 4te und 5te in einer Geraden, und alle sechs Ebenen gehen durch einen Punkt, den Anfangspunkt der Coordinaten, w. z. e. w.

Durch ein Verfahren, welches demjenigen ähnlich ist, das wir in dem letzten Beweise angewandt haben, läßt sich die Richtigkeit des folgenden Satzes (32) darthun, der auch aus dem vorhergehenden abgeleitet werden kann.

Lehrsatz [32]. Legt man durch eine jede von zwei festen, in einer und derselben gegebenen Ebene befindlichen Linie zweiten Grades eine beliebige Fläche zweiten Grades dergestalt, daß diese beiden Flächen sich in ebenen Curven schneiden, so schneiden die Ebenen dieser Curven die gegebene Ebene in zwei bestimmten geraden Linien, welche immer dieselben bleiben, wie die genannten Flächen zweiten Grades sich auch verändern mögen *).

Lehrsatz [33]. Beschreibt man in eine jede von zwei festen, einen und denselben gegebenen Scheitel habenden Kegelflächen zweiten Grades eine beliebige Fläche zweiten Grades dergestalt, daß diese beiden Flächen gemeinschaftliche Berührungskegel haben, so liegen die Scheitel dieser Berührungskegel auf zwei durch den gegebenen Scheitel gehenden, bestimmten geraden Linien, welche immer dieselben bleiben, wie die genannten Flächen zweiten Grades sich auch verändern mögen.

Der Satz (33) ergiebt sich nach dem Prinzipe der Reciprocität aus dem Satze (32) unmittelbar. Uebrigens erkennen wir in den beiden bestimmten Graden, deren der Satz (32) erwähnt, die Collineationsachsen der beiden festen Linien zweiten Grades (I. §. 45).

§. 70.

Zwei Flächen zweiten Grades berühren sich in einem Punkte, wenn sie diesen Punkt mit einander gemein, und in demselben eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben. Wir bemerken hierbei, daß zwei sich in einem Punkte berührende Flächen zweiten Grades entweder nur diesen einen Punkt mit einander gemein haben, oder daß sie sich in ebenen Curven oder auch in einer Curve doppelter Krümmung schneiden können. Daß eine Fläche zwei-

*) Dieser Satz ist zuerst im Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik Th. II S. 46 aufgestellt worden.

§. 70. ten Grades eine gegebene Fläche desselben Grades in einem gegebenen Punkte berührt, gilt für drei Bedingungen. Eine gegebene Fläche zweiten Grades kann daher von unzählig vielen Flächen desselben Grades in zwei gegebenen Punkten berührt werden.

Schneiden sich zwei Flächen zweiten Grades in zwei ebenen Curven, so berühren sie sich, im Allgemeinen, zugleich in zwei (reellen oder imaginairen) Punkten, und zwar in denjenigen, in welchen sich die beiden ebenen Curven schneiden. Denn ziehen wir an einer jeden der beiden Durchschnittscurven in einem der eben genannten Durchschnittspunkte eine Tangente, so sind diese beiden Geraden Berührungslinien sowohl der einen als der andern Fläche, und die Ebene, welche dieselben Geraden bestimmen, ist nothwendigerweise eine Tangentialebene sowohl der einen als der andern Fläche. Die beiden Flächen berühren sich also in dem einen Durchschnittspunkte, und, aus denselben Gründen, auch in dem andern Durchschnittspunkte der beiden Curven.

Wenn sich zwei Flächen zweiten Grades in zwei Punkten berühren, so können nur zwei Fälle Statt finden, nämlich die beiden Flächen haben nur diese Punkte mit einander gemein, oder sie schneiden sich in zwei ebenen Curven. Es ist unmöglich, daß zwei Flächen zweiten Grades, welche sich in zwei Punkten berühren, sich in einer Curve doppelter Krümmung schneiden. Um diese Behauptungen allgemein zu erweisen, verfahren wir folgendermaßen. Es seyen A und B zwei Flächen zweiten Grades, welche sich in zwei Punkten berühren. Wir nehmen die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte zur Achse der z, die beiden andern Achsen aber beliebig an. Die Gleichungen der beiden Flächen A und B seyen nun

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+1 = 0 \quad ,$$
$$\alpha z^2+\beta y^2+\gamma x^2+2\alpha'xy+2\beta'xz+2\gamma'yz+2\alpha''z+2\beta''y+2\gamma''x+1 = 0 \quad .$$

Setzen wir in beiden Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$, so erhalten wir

$$az^2+2a''z+1 = 0 \quad ,$$
$$\alpha z^2+2\alpha''z+1 = 0 \quad ;$$

und die Achse der z schneidet die Flächen A und B in zwei Punkten, deren Ordinaten die Wurzeln dieser letzten Gleichungen sind. Da sie sie aber in denselben beiden Punkten schneiden soll, so müssen diese Wurzeln z_1 und z_2 dieselben, also auch die letzten beiden Gleichungen dieselben seyn, woraus wir

$$\alpha = a \quad ; \quad \alpha'' = a''$$

erhalten. — Die Gleichungen der Tangentialebenen der beiden Flächen in einem Punkte $x'y'z'$, welchen beide Flächen gemein haben, sind

$$(az'+c'y'+b'x'+a'')z+(c'z'+by'+a'x'+b'')y+(b'z'+a'y'+cx'+c'')x+a''z'+b''y'+c''x'+1=0$$
$$(\alpha z'+\gamma'y'+\beta'x'+\alpha'')z+(\gamma'z'+\beta y'+\alpha'x'+\beta'')y+(\beta'z'+\alpha'y'+\gamma x'+\gamma'')x+\alpha''z'+\beta''y'+\gamma''x'+1=0$$

und demnach für denjenigen Punkt, für welchen $x'=0$, $y'=0$, $z'=z_1$

$$(az_1+a'')z+(c'z_1+b'')y+(b'z_1+c'')x+a''z_1+1=0 \quad ,$$
$$(\alpha z_1+\alpha'')z+(\gamma'z_1+\beta'')y+(\beta'z_1+\gamma'')x+\alpha''z_1+1=0 \quad ,$$

so wie für denjenigen Punkt, für welchen $x'=0$, $y'=0$, $z'=z_2$

$$(az_2+a'')z+(c'z_2+b'')y+(b'z_2+c'')x+a''z_2+1=0 \quad ,$$
$$(\alpha z_2+\alpha'')z+(\gamma'z_2+\beta'')y+(\beta'z_2+\gamma'')x+\alpha''z_2+1=0$$

Da nun die Flächen A und B sich in den, so eben genannten Punkten berühren sollen, so müssen die Tangentialebenen in diesen Punkten dieselben seyn. Es sind aber die ersten und letzten Glieder in den so eben angegebenen Gleichungen, weil $\alpha=a$ und $\alpha''=a''$ ist, dieselben; es muß also noch

$$c'z_1+b''=\gamma'z_1+\beta'' \quad ; \quad b'z_1+c''=\beta'z_1+\gamma''$$
$$c'z_2+b''=\gamma'z_2+\beta'' \quad ; \quad b'z_2+c''=\beta'z_2+\gamma''$$

seyn, woraus wir

$$\gamma'=c' \quad ; \quad \beta''=b'' \quad ; \quad \beta'=b' \quad ; \quad \gamma''=c''$$

finden. Die Gleichungen der Flächen A und B sind daher respective

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+1=0 \quad ,$$
$$az^2+\beta y^2+\gamma x^2+2\alpha'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+1=0 \quad ,$$

und durch Subtraction finden wir

$$(b-\beta)y^2+(c-\gamma)x^2+2(a'-\alpha')xy=0 \quad .$$

Alle Punkte, welche den beiden Flächen A und B gemein sind, liegen in einem Orte, den die letzte Gleichung darstellt. Diese Gleichung drückt aber eine Gerade, nämlich die Achse der z, oder das System zweier, durch die Achse der z gehenden Ebenen aus, je nachdem $(a'-\alpha')^2-(b-\beta)(c-\gamma) < 0$ oder ≥ 0 ist; in keinem Falle drückt sie eine krumme Fläche aus. In dem zuerst genannten Falle haben die Flächen A und B nur die beiden Berührungspunkte gemein, in dem zweiten Falle schneiden sie sich in ebenen Curven; in keinem Falle aber schneiden sie sich in einer Curve von doppelter Krümmung.

Wenn eine Fläche zweiten Grades von einer andern Fläche desselben Grades in drei Punkten berührt wird, so findet die Berührung in allen Punkten derjenigen Curve Statt, in welcher die, durch jene drei Punkte bestimmte Ebene die erste Fläche schneidet. Denn da die beiden Flächen in jenen drei Punkten dieselben Tangentialebenen haben müssen, so wird die genannte Ebene diese Flächen in Linien zweiten Grades schneiden, welche

§. 72. Fläche können die beiden Curven sowohl eine solche Lage haben, daß die Durchmesser, welche der Richtung der Durchschnittslinie der Ebenen dieser Curven conjugirt sind, beide ihre Curven schneiden oder beide sie nicht schneiden, als eine soche Lage, daß der eine der genannten Durchmesser seine Curve schneidet und der andere sie nicht schneidet.

Wir haben in der Lösung der vorigen Aufgabe den Fall nicht besonders betrachtet, in welchem die Ebenen der beiden Curven einander parallel sind; aber es ist aus §. 35 unmittelbar klar, daß in diesem Falle nur dann Kegelflächen durch die beiden Curven gelegt werden können, wenn diese Curven einander ähnlich sind, und wenn sie eine solche Lage haben, daß die Verbindungslinien ihrer Scheitel, ihrer Brennpunkte und ihrer Mittelpunkte sich in einem und demselben Punkte schneiden.

§. 73.

Aufgabe [107]. Welche Relationen müssen zwischen den Coefficienten der, auf dasselbe Coordinatensystem sich beziehenden Gleichungen

$$av^2+bu^2+ct^2+2a'tu+2b'tv+2c'uv+2a''v+2b''u+2c''t+d = 0 \quad (1)$$

$$\alpha z^2+\beta y^2+\gamma x^2+2\alpha' xy+2\beta' xz+2\gamma' yz+2\alpha'' z+2\beta'' y+2\gamma'' x+\delta = 0 \quad (2)$$

Statt finden, wenn diese zwei ähnliche und ähnlich liegende Flächen zweiten Grades ausdrücken sollen?

Bezeichnen wir die Coordinaten der Mittelpunkte beider Flächen respective durch t', u', v' und x', y', z', so können wir den beiden Gleichungen (1) und (2) die Form

$$\left.\begin{array}{l} a(v-v')^2+b(u-u')^2+c(t-t')^2+2a'(t-t')(u-u') \\ \quad +2b'(t-t')(v-v')+2c'(u-u')(v-v')+\dfrac{\Delta'_1}{D_1} \end{array}\right\} = 0 \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(z-z')^2+\beta(y-y')^2+\gamma(x-x')^2+2\alpha'(x-x')(y-y') \\ \quad +2\beta'(x-x')(z-z')+2\gamma'(y-y')(z-z')+\dfrac{\Delta'_2}{D_2} \end{array}\right\} = 0 \quad (4)$$

geben, wo Δ'_1, D_1 und Δ'_2, D_2 diejenigen, respective aus den Coefficienten der Gleichung (1) und den Coefficienten der Gleichung (2) zusammen gesetzten, Ausdrücke bezeichnen, welche wir in §. 43 angegeben haben.

Wenn nun die beiden Flächen ähnlich sind und ähnlich liegen, so seyen

---

gelfläche legen läßt, eine Behauptung, die eben deshalb falsch ist, obgleich sie sich in mehreren ausgezeichneten mathematischen Werken befindet. M. s. Corresp. sur l'école polyt. T. II. p. 219; Annales de math. T. XIII. p. 310 und T. XVIII. p. 306; Journal f. d. r. u a. Mathem. Bd. I. p. 45.

f, g, h die Coordinaten des Aehnlichkeitspunktes. Wir transformiren die Gleichungen (3) und (4) indem wir diesen Aehnlichkeitspunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nehmen, und also $v+h$ für v, $u+g$ für u, $t+f$ für t, ferner $z+h$ für z, $y+g$ für y, $x+f$ für x setzen, wodurch wir §. 73.

$$\left.\begin{array}{l} a(v+V)^2+b(u+U)^2+c(t+T)^2+2a'(t+T)(u+U) \\ \quad +2b'(t+T)(v+V)+2c'(u+U)(v+V)+\frac{\Delta'_1}{D_1} \end{array}\right\} = 0 \quad , \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(z+Z)^2+\beta(y+Y)^2+\gamma(x+X)^2+2\alpha'(x+X)(y+Y) \\ \quad +2\beta'(x+X)(z+Z)+2\gamma'(y+Y)(z+Z)+\frac{\Delta'_2}{D_2} \end{array}\right\} = 0 \quad , \qquad (6)$$

erhalten, wenn wir, der Kürze wegen, $h-v'$, $g-u'$, $f-t'$ und $h-z'$, $g-y'$, $f-x'$ respective durch V, U, T und Z, Y, X bezeichnen. Setzen wir jetzt, zufolge der Gleichungen (13) des §. 20,

$$v = kz \quad , \quad u = ky \quad , \quad t = kx$$

in die Gleichung (5), und identificiren die dadurch hervorgehende Gleichung mit der Gleichung (6), so ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha} \; ; \; \frac{c}{a} = \frac{\gamma}{\alpha} \; ; \; \frac{a'}{a} = \frac{\alpha'}{\alpha} \; ; \; \frac{b'}{a} = \frac{\beta'}{\alpha} \; ; \; \frac{c'}{a} = \frac{\gamma'}{\alpha} \; ;$$

$$\frac{V}{k} = Z \; ; \; \frac{bU}{ak} = \frac{\beta}{\alpha}Y \; ; \; \frac{cT}{ak} = \frac{\gamma}{\alpha}X \; ; \; \frac{\Delta'_1}{ak^2D_1} = \frac{\Delta'_2}{\alpha D_2} \; .$$

Die fünf ersten dieser neun Gleichungen sind von f, g, h und k unabhängig, und aus der neunten Gleichung finden wir

$$k = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{D_2}{\Delta'_2}\cdot\frac{\Delta'_1}{D_1}} \quad , \qquad (7)$$

so daß also, da wir a und α, wie schon in §. 43 bemerkt worden, immer als positive Größe betrachten können, k nur dann reell wird, wenn die Werthe der Ausdrücke $\frac{\Delta'_1}{D_1}$ und $\frac{\Delta'_2}{D_2}$ von gleichen Zeichen sind. Wir haben demnach als Bedingung für die Aehnlichkeit und das Aehnlich-liegen der beiden Flächen (1) und (2) die Gleichungen

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha'}{a'} = \frac{\beta'}{b'} = \frac{\gamma'}{c} \qquad (8)$$

und

$$\frac{\Delta'_2}{D_2} \text{ von demselben Zeichen als } \frac{\Delta'_1}{D_1} \; . \qquad (9)$$

§. 73. **Werden diese Bedingungsgleichungen erfüllt, so ergiebt sich, aus der sechsten, siebenten und achten der obigen neun Gleichungen,**

$$V = kZ \quad ; \quad U = kY \quad ; \quad T = kX \quad ; \qquad (10)$$

und vermittelst dieser Gleichungen (10) können die Coordinaten f, g, h, des Aehnlichkeitspunktes bestimmt werden. Da aber der Werth (7) von k mit doppeltem Vorzeichen zu nehmen ist, so giebt es bei ähnlichen und ähnlich-liegenden Flächen zweiten Grades zwei Aehnlichkeitspunkte.

Aus den vorher aufgestellten Bedingungen ergiebt sich

$$\frac{c'^2}{a^2} - \frac{b}{a} = \frac{\gamma'^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} \quad ,$$

also

$$\alpha^2(c'^2 - ab) = a^2(\gamma'^2 - \alpha\beta) \quad ;$$

folglich involviren die gefundenen Bedingungsgleichungen, da a^2 und α^2 positive Größen sind, auch die Bedingung: es muß

$$c'^2 - ab \text{ von demselben Zeichen als } \gamma'^2 - \alpha\beta \qquad (11)$$

seyn. Die Bedingungen (9) und (11) zeigen uns, wenn wir die geometrischen Bedeutungen der, in §. 43 zusammen gestellten analytischen Bedingungen betrachten, daß zwei ähnliche Flächen zweiten Grades immer von gleicher Art sind, daß also einem Ellipsoide nur ein Ellipsoid, einem elliptischen Hyperboloide nur ein elliptisches Hyperboloid, einem hyperbolischen Hyperboloide nur ein hyperbolisches Hyperboloid, ꝛc., ähnlich seyn kann, wie denn auch in der That zwei ähnliche Figuren nur in der Größe, nicht aber in der Gestaltung von einander verschieden sind.

Wir sehen leicht ein, daß die Aehnlichkeitspunkte zweier ähnlichen und ähnlich-liegenden Flächen zweiten Grades auch als Collineationspunkte und die Ebene ihrer (reellen oder imaginairen) Durchschnittscurve als Collineationsebene betrachtet werden kann.

Zwei Flächen zweiten Grades, deren Gleichungen den Bedingungen (8) genügen, sey es, daß sie auch der Bedingung (9) Genüge leisten oder nicht, heißen homothetische Flächen zweiten Grades. Aehnliche und ähnlich-liegende Flächen zweiten Grades sind daher homothetisch, aber homothetische Flächen zweiten Grades sind nicht immer ähnlich, und es kann ein elliptisches Hyperboloid einem hyperbolischen homothetisch seyn.

Zwei homothetische Flächen zweiten Grades haben gleiche Asymptotenkegel, was aus §. 43 (S. 12) klar ist.

Dividiren wir die Gleichungen zweier homothetischen Flächen zweiten Grades durch die Coefficienten respective eines ihrer Glieder höchster Di-

mension, so bekommt dieses Glied in beiden Gleichungen die Einheit zum Coefficienten und die Coefficienten der übrigen fünf Glieder zweier Dimensionen werden, in Folge der Gleichungen (8), einander gleich. Wir können also zwei homothetische Flächen zweiten Grades immer durch zwei, auf dasselbe Coordinatensystem bezogene Gleichungen von der Form §. 73.

$$z^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (12)$$
$$z^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2\alpha''z+2\beta''y+2\gamma''x+\delta = 0 \quad (13)$$

ausdrücken. Ziehen wir die zweite dieser Gleichungen von der ersten ab, so kommt

$$(a''-\alpha'')z+(b''-\beta'')y+(c''-\gamma'')x+\tfrac{1}{2}(d-\delta) = 0 \ ; \quad (14)$$

und da alle diejenigen Werthe von x, y und z, welche den Gleichungen (12) und (13) zugleich genügen, auch die Gleichung (14) befriedigen müssen, so liegen alle diejenigen (reellen oder imaginairen) Punkte, welche den beiden Flächen (12) und (13) gemein sind, in der, durch die Gleichung (14) ausgedrückten Ebene. Zwei homothetische Flächen zweiten Grades schneiden sich daher immer in einer und nur in einer (reellen oder imaginairen) Curve einfacher Krümmung, deren Ebene reell ist. Degenerirt diese Curve in einen Punkt oder in ein System zweier, sich schneidenden Geraden, so berühren sich die beiden homothetischen Flächen in diesem Punkte oder in dem Durchschnitte der beiden Geraden. Zwei homothetische Flächen können sich nicht in einer Curve berühren, es sey denn, daß diese Curve in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkt läge.

§. 74.

Lehrsatz [37]. *Wenn eine Fläche zweiten Grades, A, von einer Reihe homothetischer Flächen desselben Grades, S', S'', S''' ꝛc., in einer und derselben ebenen Curve, C, geschnitten wird, so sind die Ebenen der zweiten Durchschnittscurven, in welchen die Fläche A von einer jeden Fläche der Reihe S', S'', S''' ꝛc. außerdem geschnitten wird, einander parallel.*

Es sey die Ebene der Curve C die Ebene der xy, und

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (1)$$

die Gleichung der Fläche A. Setzen wir z = 0, so ergiebt sich

$$by^2+cx^2+2a'xy+2b''y+2c''x+d = 0$$

als Gleichung der Curve C. Eine Fläche S', welche dieselbe Curve C enthält, wird durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha z^2+by^2+cx^2+2a'xy+2\beta'xz+2\gamma'yz+2\alpha''z+2b''y+2c''x+d = 0 \ , \quad (2)$$

§. 74. eine Fläche S'' aber, welche ebenfalls durch die Curve C gehet und der Fläche S' homothetisch ist, durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha z^2+by^2+cx^2+2a'xy+2\beta'xz+2\gamma'yz+2\alpha''_1z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (3)$$

darzustellen seyn. Durch Subtraction der Gleichungen (2) und (3) von der Gleichung (1) erhalten wir

$$\left\{(a-\alpha)z+2(b'-\beta')x+2(c'-\gamma')y+2(a''-\alpha'')\right\}\cdot z = 0$$

$$\left\{(a-\alpha)z+2(b'-\beta')x+2(c'-\gamma')y+2(a''-\alpha''_1)\right\}.z = 0$$

zwei Gleichungen, deren erste Factoren die Ebenen der zweiten Durchschnitts-curven der Fläche A respective mit den Flächen S' und S'' ausdrücken, und diese Ebenen sind, wie wir sehen, einander parallel, w. z. e. w.

Lehrsatz [38]. *Wenn eine Fläche zweiten Grades, A, von einer Reihe Flächen desselben Grades, S', S'', S''' ꝛc. in einer und derselben ebenen Curve C_1 geschnitten wird, und wenn die Flächen S', S'', S''', ꝛc. sich außerdem noch in einer und derselben ebenen Curve C_2 schneiden, so gehen die Ebenen der zweiten Durchschnittscurven, in welchen die Fläche A von einer jeden Fläche der Reihe S', S'', ꝛc. außerdem geschnitten wird, durch eine und dieselbe, in der Ebene der Curve C_2 liegende Gerade.*

Wir nehmen die Ebene der Curve C_1 zur Ebene der xy und die der Curve C_2 zur Ebene der xz. Ist nun die Gleichung der Fläche S'

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0\ , \quad (4)$$

so ist die Gleichung der Curve C_1

$$by^2+cx^2+2a'xy+2b''y+2c''x+d = 0\ ,$$

und die Gleichung der Curve C_2

$$az^2+cx^2+2b'xz+2a''z+2c''x+d = 0\ .$$

Die Gleichung der Fläche S'' wird daher die Form

$$az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2b'xz+2c'_1yz+2a''z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (5)$$

haben; und die Gleichung der Fläche A, welche nur die Curve C_1 enthält, wird von der Form

$$Az^2+by^2+cx^2+2a'xy+2B'xz+2C'yz+2A''z+2b''y+2c''x+d = 0 \quad (6)$$

seyn. Ziehen wir die Gleichungen (4) und (5) nach einander von der Gleichung (6) ab, und dividiren die Reste durch z, so kommen

$$(A-a)z+2(B'-b')x+2(C'-c')y+2(A''-a'') = 0\ , \quad (7)$$

$$(A-a)z+2(B'-b')x+2(C'-c'_1)y+2(A''-a'') = 0\ , \quad (8)$$

zwei Gleichungen, welche die Ebenen der zweiten Durchschnittscurven der

Fläche A respective mit den Flächen S' und S'' ausdrücken. Setzen wir §. 74.
darin $y = 0$, so giebt die eine sowohl als die andere

$$(A - a)z + 2(B' - b')x + 2(A'' - a'') = 0$$

d. i. beide Ebenen (7) und (8) schneiden die Ebene der xz, welches die Ebene der Curve C_2 ist, in einer und derselben Geraden, w. z. e. w.

Aus diesem letzten Satze ergiebt sich vermittelst des Prinzips der Reciprocität der folgende

Lehrsatz [39]. *Wenn eine Fläche zweiten Grades, A, mit einer Reihe Flächen desselben Grades, S', S'', S''', ꝛc. von einer und derselben Kegelfläche K_1 in Curven berührt wird, und wenn die Flächen S', S'', S''' ꝛc. außerdem noch von einer und derselben Kegelfläche K_2 in Curven berührt werden, so liegen die Mittelpunkte der zweiten Kegelflächen, welche der Fläche A und einer jeden Fläche der Reihe S', S'', ꝛc. außerdem umschrieben werden können, in einer und derselben, durch den Mittelpunkt der Kegelfläche K_2 gehenden Geraden.*

Lehrsatz [40]. *Wird eine Reihe homothetischer Flächen zweiten Grades, welche durch eine und dieselbe ebene Curve C gehen, von einer beliebigen Ebene E geschnitten, so sind alle Durchschnittscurven ähnlich und ähnlich-liegend oder doch Hyperbeln, in welchen die Haupt- und Nebenachsen in umgekehrtem Verhältnisse stehen; diese Durchschnittscurven gehen sämmtlich durch zwei feste Punkte wenn die Ebene E die Ebene der Curve C schneidet, und sie sind concentrisch wenn jene Ebene dieser parallel ist.*

Nehmen wir die Ebene der Curve C zur Ebene der xy, so sind alle Flächen der Reihe durch die Gleichung

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz + 2Az + 2b''y + 2c''x + d = 0$$

ausgedrückt, wenn wir sämmtliche Coefficienten, bis auf A, constant setzen, A aber als veränderlich betrachten; und diese allgemeine Form der Gleichung ist immer dieselbe welches auch die beiden anderen Coordinatenebenen seyn mögen. Nehmen wir nun an, daß die Ebene der yz der Ebene E parallel sey, so haben wir nur x constant, $= h$, zu setzen, um die Gleichung aller Durchschnittscurven zu finden, wodurch sich

$$az^2 + by^2 + 2c'yz + 2(b'h + A)z + 2(a'h + b'')y + ch^2 + 2c''h + d = 0$$

ergiebt, eine Gleichung, in welcher alle Coefficienten bis auf denjenigen von z constant sind, dieser letztere, nämlich $b'h + A$, wegen der Veränderlichkeit von A, aber veränderlich ist. Alle Durchschnittscurven sind demnach ähnlich und ähnlich-liegend, oder doch Hyperbeln, in welchen Haupt- und Ne-

§. 74. benachsen in umgekehrtem Verhältnisse stehen, und diese Curven gehen durch zwei feste (reelle oder imaginaire) Punkte (I. §. 48). — Nehmen wir aber an, daß die schneidende Ebene E der Ebene der Curve C parallel sey, so haben wir, um die Gleichung aller Durchschnittscurven zu erhalten, blos z constant, gleich k zu setzen, wodurch wir

$$by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2(c'k + b'')y + 2(b'k + c'')x + (ak^2 + 2Ak + d) = 0$$

finden, eine Gleichung, in welcher alle Coefficienten, bis auf das letzte Glied, constant sind, dieses Glied, nämlich $ak^2 + 2Ak + d$, wegen der Veränderlichkeit von A, aber veränderlich ist. Alle Durchschnittscurven sind demnach ähnlich und ähnlich-liegend, oder doch Hyperbeln mit umgekehrtem Achsen-Verhältniß, und concentrisch (I. §. 48).

Lehrsatz [41]. *Wird eine Reihe von Flächen zweiten Grades, welche durch eine und dieselbe ebene Curve C gehen, von einer Ebene, welche der Ebene dieser Curve C parallel ist, geschnitten; so sind alle Durchschnittscurven ähnlich und ähnlich-liegend oder doch Hyperbeln, in welchen Haupt- und Nebenachsen in umgekehrtem Verhältnisse stehen.*

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich unmittelbar aus §. 44; inzwischen können wir sie auch sehr leicht direct darthun. Die Gleichung

$$Az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2B'xz + 2C'yz + 2A''z + 2b''y + 2c''x + d = 0$$

drückt nämlich alle Flächen zweiten Grades aus, welche sich in einer und derselben Curve auf der Ebene der xy schneiden, wenn wir b, c, a', b'', c'' und d als constant, A, B', C' und A'' aber als veränderlich betrachten. Setzen wir z constant, gleich k, so kommt

$$by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2(C'k + b'')y + 2(B'k + c'')x + Ak^2 + 2A''k + d = 0$$

eine Gleichung, in welcher die Coefficienten der Glieder zweier Dimensionen constant sind, wodurch die Richtigkeit des Satzes erwiesen ist (I. §. 46).

Aus diesem Satze läßt sich der folgende

Lehrsatz [42]. *Wird eine Reihe von Kegelflächen K', K'', K''', 2c., welche ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt (Scheitel) in einem festen Punkte p einer Fläche zweiten Grades A haben, und welche diese Fläche in ebenen Curven C', C'', C''', 2c., schneiden, von einer Ebene e geschnitten, welche der Tangentialebene der Fläche A im Punkte p parallel ist, so sind alle Durchschnittscurven E', E'', E''', 2c., einander ähnlich und ähnlich liegend oder Hyperbeln mit umgekehrtem Achsenverhältniß.*

ableiten, den wir aber direct erweisen wollen.

Wir nehmen die Tangentialebene im Punkte p zur Ebene der xy, und diesen

diesen Punkt p zum Anfangspunkt der Coordinaten, deren Achse der z wir so legen, daß die Gleichung der Fläche A die Form

$$az^2 + by^2 + cx^2 + a''z = 0 \qquad (9)$$

bekommt, was nach §. 45 (S. 11) immer möglich ist. Die Gleichung einer Kegelfläche, welche ihren Mittelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten p hat, ist

$$\alpha z^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 + \alpha' xy + \beta' xz + \gamma' yz = 0 \quad . \qquad (10)$$

Soll diese Gleichung (10) aber eine Kegelfläche der Reihe K', K'', ꝛc. ausdrücken, welche, der Voraussetzung zufolge, die Fläche A in ebenen Curven schneidet, so muß sich diese Gleichung (10) mit der Gleichung (9) zu der Gleichung eines Systems von zwei Ebenen verbinden lassen. Es müssen also die Coefficienten α, β, γ, α', β', γ' von der Art seyn, daß, für ein gehörig bestimmtes λ, der Ausdruck

$$(\alpha + \lambda a)z^2 + (\beta + \lambda b)y^2 + (\gamma + \lambda c)x^2 + \alpha' xy + \beta' xz + \gamma' yz + \lambda a'' z \quad (11)$$

dem Producte zweier Factoren ersten Grades identisch ist. Es sey nun $z + my + nx + p$ der eine dieser beiden Factoren, so kann der andere offenbar nur z seyn, da, wenn dieser zweite Factor noch andere Glieder gy, hx, k enthielte, die Glieder pgy, phx, pk in dem Producte vorkommen müßten, was der Form (11) widerspricht. Setzen wir also den Ausdruck (11) dem Producte

$$z^2 + nxz + myz + pz$$

identisch, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\alpha + \lambda a = 1 \;\; ; \;\; \beta + \lambda b = 0 \;\; ; \;\; \gamma + \lambda c = 0 \;\; ; \;\; \alpha' = 0$$
$$\beta' = n \;\; ; \;\; \gamma' = m \;\; ; \;\; \lambda a'' = p \quad ,$$

woraus wir die Coefficienten der Gleichung (10) bestimmen können. Substituiren wir die sich ergebenden Ausdrücke in die eben genannte Gleichung (10), so erhalten wir

$$(ap - a'')z^2 + bpy^2 + cpx^2 - a''nxz - a''myz = 0 \quad , \qquad (12)$$

und dieses ist die Gleichung einer der Kegelflächen K', K'', ꝛc., welche die Fläche A in einer Curve schneidet, deren Ebene durch die Gleichung

$$z + my + nx + p = 0$$

ausgedrückt ist. Schneiden wir nun die Kegelfläche (12) durch eine, der Ebene der xy parallele Ebene, deren Gleichung

$$z = \delta \qquad (13)$$

sey, so erhalten wir als Gleichung der Durchschnittscurve

§. 74. $$by^2 + cx^2 - \frac{a''}{p}\delta my - \frac{a''}{p}\delta nx + \left(a - \frac{a''}{p}\right)\delta^2 = 0 \quad , \qquad (14)$$

während dieselbe Ebene (13) die Fläche A (9) in einer Curve schneidet, deren Gleichung

$$by^2 + cx^2 + a''\delta + a\delta^2 = 0 \qquad (15)$$

ist. Da nun die beiden ersten Glieder der Gleichung (14) immer dieselben sind, welches auch die Größen m, n, p seyn mögen, so sind alle Durchschnittscurven E', E'', E''', rc. einander ähnlich und ähnlich liegend oder Hyperbeln mit umgekehrtem Achsenverhältniß; und dieselbe Beziehung findet auch zwischen diesen Curven und der Durchschnittscurve (15) Statt.

Aus diesem Beweise sehen wir, daß, wenn der Punkt p, in welchem die Scheitel der Kegelflächen K', K'', rc. liegen, ein Kreispunkt der Fläche A ist, alle Durchschnitte auf den Kegelflächen, welche der Tangentialebene in p parallel sind, Kreise seyn werden. Ist die Fläche A eine Kugelfläche, so ist jeder ihrer Punkte ein Kreispunkt; nimmt man daher einen beliebigen Punkt p auf einer Kugelfläche zum Scheitel, und einen beliebigen Kreis auf derselben Fläche zur Basis eines Kegels, so ist jeder auf dem, durch den Punkt p gehenden Durchmesser senkrecht geführte Schnitt des Kegels ein Kreis *).

§. 75.

Lehrsatz [43]. *Die Polarebenen eines und desselben Punktes in Beziehung auf alle Flächen zweiten Grades, welche durch dieselben sieben Punkte gehen, schneiden sich in einem und demselben Punkte.*

Sind

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \equiv a_1z^2 + b_1y^2 + c_1x^2 + a'_1xy + b'_1xz + \cdots\cdots + d_1 = 0 \\ A_2 \equiv a_2z^2 + b_2y^2 + c_2x^2 + a'_2xy + b'_2xz + \cdots\cdots + d_2 = 0 \\ A_3 \equiv a_3z^2 + b_3y^2 + c_3x^2 + a'_3xy + b'_3xz + \cdots\cdots + d_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

die Gleichungen von drei Flächen zweiten Grades, welche durch sieben feste Punkte gehen, so werden alle Flächen desselben Grades, welche durch diese selbigen Punkte gehen, durch die Gleichung

$$A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3 = 0 \quad , \qquad (2)$$

in welcher λ und μ zwei willkürliche Constanten bedeuten, ausgedrückt werden können (§. 56). Bezeichnen wir, der Kürze wegen,

$a_1z + c'_1y + b'_1x + a''_1$ durch m_1 ; $c'_1z + b_1y + a'_1x + b''_1$ durch n_1 ;
$a_2z + c'_2y + b'_2x + a''_2$ durch m_2 ; $c'_2z + b_2y + a'_2x + b''_2$ durch n_2 ;
$a_3z + c'_3y + b'_3x + a''_3$ durch m_3 ; $c'_3z + b_3y + a'_3x + b''_3$ durch n_3 ;

*) Dies ist die bekannte Eigenschaft der stereographischen Projectionsart.

$b'_1z+a'_1y+c_1x+c''_1$ durch p_1 ; $a''_1z+b''_1y+c''_1x+d_1$ durch q_1 ; §. 75.
$b'_2z+a'_2y+c_2x+c''_2$ durch p_2 ; $a''_2z+b''_2y+c''_2x+d_2$ durch q_2 ;
$b'_3z+a'_3y+c_3x+c''_3$ durch p_3 ; $a''_3z+b''_3y+c''_3x+d_3$ durch q_3 ;
so ist die Gleichung der Polarebene eines Punktes xyz in Beziehung auf die Fläche (2)

$$(m_1+\lambda m_2+\mu m_3)v+(n_1+\lambda n_2+\mu n_3)u+(p_1+\lambda p_2+\mu p_3)t+q_1+\lambda q_2+\mu q_3=0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$m_1v+n_1u+p_1t+q_1+\lambda(m_2v+n_2u+p_2t+q_2)+\mu(m_3v+n_3u+p_3t+q_3)=0. \quad (3)$$

Wie nun auch λ und μ geändert werden mögen, so gehet die Ebene (3) doch immer durch den Durchschnittspunkt der drei Ebenen

$$m_1v+n_1u+p_1t+q_1=0 \ ; \ m_2v+n_2u+p_2t+q_2=0 \ ; \ m_3v+n_3u+p_3t+q_3=0,$$

d. i. die Polarebenen des Punktes xyz in Beziehung auf alle Flächen (2) gehen durch einen und denselben Punkt, w. z. e. w.

Wir bemerken hierbei, daß, wenn sich die, in Rede stehenden Polarebenen eines Punktes a in dem Punkte α schneiden, so schneiden sich hinwiederum die Polarebenen des Punktes α in dem Punkte a, weil x, y, z und t, u, v in der Gleichung (3) gegenseitig vertauscht werden können ohne daß diese Gleichung sich ändert.

Vermittelst des Prinzips der Reciprocität erhalten wir aus dem eben bewiesenen Satze den folgenden

Lehrsatz [44]. *Die Pole einer und derselben Ebene in Beziehung auf alle Flächen zweiten Grades, welche dieselben sieben Ebenen berühren, liegen in einer und derselben Ebene.*

Sehen wir die Diametralebenen einer Fläche zweiten Grades als die Polarebenen unendlich entfernter Punkte, und den Mittelpunkt einer solchen Fläche als den Pol unendlich entfernter Ebenen an, so ergeben sich aus den beiden letzten Sätzen die beiden folgenden

Lehrsatz [45]. *Die Diametralebenen aller durch sieben feste Punkte gehenden Flächen zweiten Grades, welche parallelen Durchmessern conjugirt sind, schneiden sich in einem und demselben Punkte.*

Lehrsatz [46]. *Die Mittelpunkte aller Flächen zweiten Grades, welche dieselben sieben festen Ebenen berühren, liegen in einer und derselben Ebene.*

Aus dem Satze (43) kann auch der folgende

Lehrsatz [47]. *Die Polarebenen eines und desselben Punktes in*

§. 75. Beziehung auf alle Flächen zweiten Grades, welche eine und dieselbe Durchschnittscurve haben, schneiden sich in einer und derselben Geraden.

abgeleitet werden. Wir können ihn aber auch sehr leicht direct beweisen. Denn behalten wir die oben angegebenen Bezeichnungen bei, so sind alle Flächen zweiten Grades, welche durch die Durchschnittscurve der beiden Flächen $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ gehen, durch die Gleichung

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \quad ,$$

in welcher λ eine willkürliche Constante bedeutet, auszudrücken, und die Polarebene eines Punktes xyz hat alsdann

$$(m_1 + \lambda m_2)v + (n_1 + \lambda n_2)u + (p_1 + \lambda p_2)t + q_1 + \lambda q_2 = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$m_1 v + n_1 u + p_1 t + q_1 + \lambda(m_2 v + n_2 u + p_2 t + q_2) = 0$$

zur Gleichung; sie gehet also, was auch λ seyn mag, durch diejenige Gerade, in welcher sich die beiden Ebenen

$$m_1 v + n_1 u + p_1 t + q_1 = 0 \quad ; \quad m_2 v + n_2 u + p_2 t + q_2 = 0$$

schneiden, d. i. durch eine und dieselbe Gerade.

Da alle Flächen zweiten Grades, welche durch beliebige acht feste Punkte gehen, eine und dieselbe Durchschnittscurve haben (§. 56), so erhalten wir aus dem letzten Satze, und dann vermittelst der Reciprocität die beiden folgenden.

Lehrsatz [48]. Die Polarebenen eines und desselben Punktes in Beziehung auf alle Flächen zweiten Grades, welche durch beliebige acht feste Punkte gehen, schneiden sich in einer und derselben Geraden.

Lehrsatz [49]. Die Pole einer und derselben Ebene in Beziehung auf alle Flächen zweiten Grades, welche beliebige acht feste Ebenen berühren, liegen in einer und derselben Geraden.

Aus diesen beiden Sätzen erhalten wir wieder, nach der oben angegebenen Schlußart, die beiden folgenden.

Lehrsatz [50]. Die Diametralebenen aller, durch beliebige acht feste Punkte gehenden Flächen zweiten Grades, welche parallelen Durchmessern conjugirt sind, schneiden sich in einer und derselben Geraden.

Lehrsatz [51]. Die Mittelpunkte aller, beliebige acht feste Ebenen berührenden Flächen zweiten Grades liegen in einer und derselben Geraden.

§. 76.

Die Resultate, welche wir in dem vorigen §. erhalten haben, geben Veranlassung zu der folgenden

Aufgabe [108]. *Sieben Punkte im Raume und irgend eine Ebene sind gegeben. Es soll der Ort des Durchschnittspunktes der Polarebenen aller Punkte der gegebenen Ebene, in Beziehung auf die Flächen zweiten Grades, welche die sieben Punkte enthalten, gefunden werden.*

Haben A_1, A_2, A_3 dieselbe Bedeutung wie in dem vorigen §, so können wir die Gleichung der genannten Flächen durch

$$A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3 = 0 \qquad (1)$$

ausdrücken, wo λ und μ willkürliche Constanten bedeuten. Es sey nun

$$fv + gu + ht + k = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung der gegebenen Ebene, so ist die Gleichung der Polarebene irgend eines Punktes tuv der Ebene (2), in Beziehung auf eine der Flächen (1),

$$m_1v+n_1u+p_1t+q_1+\lambda(m_2v+n_2u+p_2t+q_2)+\mu(m_3v+n_3u+p_3t+q_3) = 0 \;,$$

wenn m_1, n_1, p_1, q_1, m_2, rc. dieselbe Bedeutung wie im vorigen §. haben, und darin x, y, z als die veränderlichen, t, u, v aber als constante Größen betrachtet werden. Diese Polarebene gehet, wie wir im vorigen §. schon gesehen, immer durch den Durchschnittspunkt der drei Ebenen

$$\left.\begin{aligned} m_1v + n_1u + p_1t + q_1 &= 0 \;, \\ m_2v + n_2u + p_2t + q_2 &= 0 \;, \\ m_3v + n_3u + p_3t + q_3 &= 0 \;. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Um nun den gesuchten Ort zu finden, ist weiter nichts nöthig als t, u und v aus den Gleichungen (3) zu entwickeln und die resultirenden Ausdrücke in die gegebene Gleichung (2) zu substituiren. Diese drei Ausdrücke für t, u und v haben, im Allgemeinen, einen und denselben Nenner; dieser und die Zähler sind, in Beziehung auf m_1, n_1 rc. von drei Dimensionen, also in Beziehung auf x, y, z vom dritten Grade. Die genannte Substitution giebt demnach eine Gleichung, welche im Allgemeinen vom dritten Grade ist. Wir wollen jetzt einige specielle Fälle betrachten.

I. Es seyen die sieben gegebenen Punkte Eckpunkte eines Parallelepipeds. In diesem Falle werden alle genannten Flächen zweiten Grades sämmtliche acht Eckpunkte dieses Körpers enthalten (§. 56. Lhrs. 21), und wenn wir die Ebenen, welche den Seitenebenen des Parallelepipeds parallel

§. 76. laufen und ihre Entfernungen halbiren, zu Coordinatenebenen nehmen, so können wir alle jene Flächen zweiten Grades durch die Gleichung

$$z^2 + \lambda y^2 + \mu x^2 = a^2 + \lambda b^2 + \mu c^2$$

ausdrücken, in welcher 2a, 2b, 2c die Kanten des Parallelepipeds, und λ und μ willkürliche Constanten bezeichnen. — Die Gleichung der Polarebene eines Punktes tuv ist nun

$$vz + \lambda uy + \mu tx = a^2 + \lambda b^2 + \mu c^2 \quad ,$$

und diese Ebene gehet immer, welche Werthe λ und μ auch haben mögen, durch den Durchschnittspunkt der drei Ebenen

$$vz = a^2 \quad ; \quad uy = b^2 \quad ; \quad tx = c^2 \quad ,$$

woraus

$$v = \frac{a^2}{z} \quad ; \quad u = \frac{b^2}{y} \quad ; \quad t = \frac{c^2}{x} \quad .$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (2), so kommt

$$a^2fxy + b^2gxz + c^2hyz + kxyz = 0 \qquad (4)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes.

II. Wenn von den sieben gegebenen Punkten fünf in einer Ebene E liegen, so gehen alle, sie enthaltende Flächen zweiten Grades durch eine und dieselbe in der Ebene E liegende Curve (§. 56). Nehmen wir diese Ebene zur Ebene der xy und die Verbindungslinie der beiden übrigen Punkte zur Achse der z, also den Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinie mit der Ebene E zum Anfangspunkt der Coordinaten, so lassen sich alle in Rede stehende Flächen zweiten Grades durch eine Gleichung von der Form

$$az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy + 2\beta xz + 2\gamma yz + 2a''z + 2b''y + 2c''x + d = 0 \qquad (5)$$

ausdrücken, in welcher die Coefficienten β und γ willkürlich zu verändernde, alle übrigen Coefficienten aber gegebene Größen bedeuten. Die Polarebene eines Punktes tuv in Beziehung auf diese Fläche (5) hat zur Gleichung:

$$(av + \beta t + \gamma u + a'')z + (bu + a't + \gamma v + b'')y + (ct + a'u + \beta v + c'')x + a''v + b''u + c''t + d = 0,$$

und diese Polarebene gehet, welche Werthe β und γ auch haben mögen, durch den Durchschnittspunkt von drei unveränderlichen Ebenen, welche durch die Gleichungen

$$(av + a'')z + (bu + a't + b'')y + (ct + a'u + c'')x + a''v + b''u + c''t + d = 0$$

$$tz + vx = 0 \quad ; \quad uz + vy = 0$$

ausgedrückt sind. Entwickeln wir aus diesen Gleichungen v, u und t, so ergiebt sich, wenn wir, um abzukürzen,

$$-az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy - a''z + b''y + c''x$$ durch D

$$a''z + b''y + c''x + d$$ durch N

bezeichnen,

$$v = \frac{Nz}{D} \quad ; \quad u = -\frac{Ny}{D} \quad ; \quad t = -\frac{Nx}{D} \quad . \qquad (6)$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in die Gleichung (2), so kommt

$$(fz - gy - hx)N + kD = 0 \qquad (7)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher, wie wir sehen, eine Fläche zweiten Grades ist. Diese Fläche geht, was auch f, g, h und k seyn mögen, durch diejenige Linie zweiten Grades, in welcher die Fläche $D = 0$ von der Ebene $N = 0$ geschnitten wird, und außerdem durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. i. durch denjenigen Punkt, in welchem die Ebene E der ersten fünf gegebenen Punkte von der Verbindungslinie der letzten beiden geschnitten wird.

III. Wenn, wie vorher, die ersten fünf gegebenen Punkte in einer Ebene E befindlich sind, die letzten beiden aber so liegen, daß ihre Verbindungslinie durch den Mittelpunkt der Curve geht, welche die ersten fünf Punkte bestimmen, und daß diese Linie von dem eben genannten Mittelpunkte halbirt wird, so ist, in der Gleichung (5), $a'' = b'' = c'' = 0$, wodurch sich der Ausdruck

$$D \text{ auf } -az^2 + by^2 + cx^2 + 2a'xy \quad ,$$
$$N \text{ auf } d$$

zurück zieht, so daß die Gleichung (7) in diesem Falle

$$d(fz - gy - hx) - k(az^2 - by^2 - cx^2 - 2a'xy) = 0 \qquad (8)$$

ist. Da nun durch eine Veränderung der Werthe von f, g, h und k das Verhältniß der Coefficienten der Glieder zweier Dimensionen in dieser Gleichung (8) nicht geändert wird, so sind alle Flächen (8), welche verschiedenen Ebenen (2) entsprechen, homothetisch und gehen durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

IV. Wenn die ersten fünf Punkte in einer Kreislinie liegen, deren Gleichung, unter der Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, $y^2 + x^2 = r^2$ ist, und wenn ferner die letzten zwei Punkte auf der Achse der z dieses Systems sich befinden und respective $r\sqrt{-1}$ und $-r\sqrt{-1}$ zu Ordinaten haben, so ist die Gleichung (5)

$$z^2 - y^2 - x^2 + 2\beta xz + 2\gamma yz + r^2 = 0 \quad .$$

Alsdann findet sich auf dieselbe Weise wie vorher, statt der Gleichungen (6),

§. 76.

$$v = \frac{-r^2z}{z^2+y^2+x^2} \quad ; \quad u = \frac{r^2y}{z^2+y^2+x^2} \quad ; \quad t = \frac{r^2x}{z^2+y^2+x^2} \quad (9)$$

und dadurch

$$z^2+y^2+x^2 - \frac{fr^2}{k}z + \frac{gr^2}{k}y + \frac{hr^2}{k}x = 0 \quad (10)$$

als die Gleichung des gesuchten Ortes, welcher demnach eine Kugelfläche ist, die, was auch f, g, h und k für Werthe haben mögen, immer durch den Mittelpunkt des, durch die gegebenen ersten fünf Punkte bestimmten Kreises gehet.

Flächen höherer Grade und transscendente Flächen.

§. 77.

Eine Oberfläche heißt Fläche vom n^{ten} Grade wenn ihre Gleichung in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten x, y, z, vom n^{ten} Grade ist und diese Gleichung sich nicht in Factoren zerlegen läßt, die in Beziehung auf x, y, z rational sind. Läßt sich eine gegebene Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z in rationale Factoren zerlegen, so drückt sie das System derjenigen Flächen aus, welche durch diese einzelnen Factoren dargestellt werden, und daher kann auch das System zweier Flächen, von denen die eine vom p^{ten}, und die andere vom q^{ten} Grade ist, als eine Fläche des $(p+q)^{ten}$ Grades angesehen werden.

Wenn eine Gleichung vom n^{ten} Grade zwischen x, y, z so beschaffen ist, erstens daß sie für keine reellen Werthe von x und y, oder zweitens daß sie nur für einzelne, nicht continuirlich auf einander folgende, reelle Werthe von x und y, oder drittens daß sie nur für solche reelle Werthe von x und y, welche einer zweiten Gleichung genügen, reelle Werthe von z giebt; so hat sie in dem ersten Falle keine geometrische Bedeutung (sie drückt eine imaginaire Fläche aus), so stellt sie in dem zweiten Falle einzelne Punkte, endlich in dem dritten Falle eine Curve im Raume dar. So z. B., wenn A, B, C und D ganze rationale Functionen von x, y, z bedeuten, die nicht zu gleicher Zeit verschwinden, drückt die Gleichung

$$A^2+B^2+C^2+D^2=0$$

keinen einzigen Punkt aus, weil ihr erster Theil, als die Summe von mehreren Quadraten, nur gleich Null seyn kann, wenn jedes einzelne Glied gleich Null wäre, was vier Gleichungen zwischen x, y und z geben würde, die nicht zu gleicher Zeit befriedigt werden können. — Die Gleichung

$$A^2+B^2+C^2=0$$

§. 77. drückt einzelne Punkte aus, weil sie nur von denjenigen Werthen von x, y, z befriedigt werden kann, welche den Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ und $C = 0$ zu gleicher Zeit genügen. — Ferner drückt die Gleichung

$$A^2 + B^2 = 0$$

eine Curve im Raume aus, weil sie nur von denjenigen Werthen von x, y und z befriedigt werden kann, welche zu gleicher Zeit den Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ Genüge leisten.

Die allgemeine Gleichung des n^{ten} Grades zwischen x, y und z kann auf zweierlei Weise geordnet werden. Man faßt entweder die Glieder, welche eine und dieselbe Potenz einer der Veränderlichen enthalten, zusammen und ordnet sie nach diesen Potenzen, oder man nimmt die Glieder gleicher Dimensionen zusammen und ordnet sie nach diesen Dimensionen. Im ersten Falle haben wir

$$\left.\begin{array}{l}\alpha z^n + \left.\begin{array}{l}\beta_1 y\\ +\beta_2 x\\ +\beta_3\end{array}\right\} z^{n-1} + \left.\begin{array}{l}\gamma_1 y^2\\ +\gamma_2 xy\\ +\gamma_3 x^2\\ +\gamma_4 y\\ +\gamma_5 x\\ +\gamma_6\end{array}\right\} z^{n-2} + \ldots\ldots + \begin{array}{l}\mu_1 y^n\\ +\mu_2 xy^{n-1}\\ +\mu_3 x^2 y^{n-2}\\ \vdots\\ \vdots\\ +\mu_{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}\end{array}\end{array}\right\} = 0 \quad . \quad (1)$$

Durch Transformation der Coordinaten können die Glieder nter Dimension aus einer Gleichung vom nten Grade nicht weggeschafft werden; demnach ist der Grad einer Fläche immer derselbe, auf welches rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinatensystem dieselbe auch bezogen seyn mag.

Aufgabe [109]. Die Anzahl der Punkte zu finden, welche nöthig sind eine Fläche nten Grades zu bestimmen.

Die Gleichung (1) hat

1 Glied , welches z^n enthält ,
3 Glieder, welche z^{n-1} enthalten,
6 » , » z^{n-2} » ,
⋮
$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ » , » kein z » ,

wie sich aus der Aufgabe (83) (I. §. 53) ergiebt. Sie enthält demnach in allem

$1 + 3 + 6 + \ldots . \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ Glieder,
und wenn wir sie durch einen der Coefficienten dividiren, oder, was hier dasselbe ist, diesen Coefficienten gleich 1 setzen, und ihn nicht mit zählen,

$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1 = \frac{1}{6}n(n^2 + 6n + 11)$ Coefficienten,

welche zu bestimmen sind. Nehmen wir also $[\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1]$ Punkte beliebig an, und setzen ihre Coordinaten nach einander für x, y, z in die Gleichungen (1), so erhalten wir eben so viele, nämlich $[\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1]$ Gleichungen, aus welchen sich die, in gleicher Anzahl vorhandenen Coefficienten, welche nur in erster Potenz in diesen Gleichungen vorkommen, auf reelle, und im Allgemeinen nur auf eine einzige Weise bestimmen lassen.

Eine Fläche nten Grades ist daher im Allgemeinen durch $[\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1]$ Punkte bestimmt. So z. B. gehören zur Bestimmung einer Fläche ersten Grades, d. i. einer Ebene 3, zur Bestimmung einer Fläche zweiten Grades 9, einer Fläche dritten Grades 19, einer Fläche vierten Grades 34 Punkte, u. s. f.

Es kann sich aber in besonderen Fällen treffen, daß von den $[\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1]$ Gleichungen, welche die gleiche Anzahl gegebener Punkte liefert, eine oder mehrere eine Folge der übrigen sind. Alsdann sind diese Punkte nicht hinreichend eine Fläche nten Grades zu bestimmen, und es können durch diese selbigen Punkte unzählig viele Flächen nten Grades gelegt werden.

Aufgabe [110]. *Es sind die, auf dieselben Coordinatenachsen bezogenen Gleichungen einer geraden Linie und einer Fläche nten Grades gegeben. Es sollen die Coordinaten der Punkte gefunden werden, in welchen die gerade Linie die Fläche schneidet.*

Es sey die Gleichung (1) diejenige der gegebenen Fläche nten Grades und

$$y = nz + n' \quad ; \quad x = mz + m' \qquad (2)$$

das Gleichungssystem der geraden Linie. Da die gesuchten Durchschnittspunkte sowohl auf der Fläche (1) als auf der Geraden (2) liegen, so müssen ihre Coordinaten die Gleichungen (1) und (2) zu gleicher Zeit befriedigen; und es ist daher zur Bestimmung dieser Coordinaten nichts weiter erforderlich als die Werthe von x, y und z aus den drei Gleichungen (1) und (2) zu entwickeln. Setzen wir die Ausdrücke (2) für y und x in die Gleichung (1), so ergiebt sich eine Gleichung in z, welche im Allgemeinen vom nten Grade ist. Hat nun diese Gleichung n reelle Wurzeln, so ergeben sich, durch Substitution derselben in die Gleichungen (2), für y und x

§. 77. sodann n zugehörige reelle Werthe, und die Gerade schneidet die Fläche alsdann in n reellen Punkten, deren Coordinaten gefunden sind. Hat aber die Gleichung in z einige oder lauter imaginaire Wurzeln, so schneidet die gerade Linie die Fläche in weniger als n Punkten oder sie schneidet sie nicht.

Demnach kann eine gerade Linie eine Fläche n^{ten} Grades in nicht mehr als n Punkten schneiden.

Wenn es sich trifft, daß das Resultat der Substitution der Ausdrücke (2) für y und x in die Gleichung (1) identisch gleich Null ist, so wird die Gleichung (1) offenbar von allen Werthen von x, y und z befriedigt, zwischen welchen die Relationen (2) Statt finden, d. i. von den Coordinaten aller Punkte der Geraden (2), und die Gerade (2) liegt daher alsdann gänzlich auf der Fläche (1).

Hieraus folgt, daß eine Fläche nten Grades, welche eine gegebene Gerade (2) und $\frac{1}{6}[n^3+6n^2+5n-6]$ gegebene Punkte im Raume enthalten soll, im Allgemeinen völlig bestimmt ist. Denn setzen wir die Ausdrücke (2) für y und x in die allgemeine Gleichung (1), so erhalten wir eine Gleichung in z, die, weil sie vom nten Grade ist, $(n+1)$ Glieder enthält. Da nun diese Gleichung unabhängig von z gleich Null seyn muß, so haben wir $(n+1)$ Gleichungen, welche außer den gegebenen Größen n, n′, m und m′ nur noch die zu bestimmenden Coefficienten der Gleichung (1) enthalten. Setzen wir ferner für x, y und z die Coordinaten der gegebenen Punkte in die Gleichung (1), so erhalten wir zwischen ihren Coefficienten neue $\frac{1}{6}(n^3+6n^2+5n-6)$ Gleichungen. Wir haben demnach, zur Bestimmung der

$\frac{1}{6}[n^3+6n^2+11n]$ Coefficienten, $[(n+1)+\frac{1}{6}(n^3+6n^2+5n-6)]$ Gleichungen,

d. i. eben so viele Gleichungen als zu bestimmende Coefficienten.

Wir sehen hieraus, daß die Bestimmung: eine Fläche nten Grades soll eine gegebene gerade Linie enthalten, für $(n+1)$ Bedingungen gilt. So z. B. gilt es für 3 Bedingungen wenn eine Fläche zweiten Grades, für 4 Bedingungen wenn eine Fläche dritten Grades eine gegebene gerade Linie enthalten soll, u. s. f.

Legen wir durch eine Fläche nten Grades eine Ebene, so wird die dadurch entstehende Durchschnittscurve von einer geraden Linie, eben so wie jene Fläche, aufs Höchste in n Punkten geschnitten werden können. Daraus folgt, daß die Durchschnittscurve einer Fläche nten Grades und einer Ebene von keinem höhern als vom nten Grade seyn

kann. Hiervon können wir uns auch sehr leicht auf folgende Weise überzeugen. Nehmen wir die schneidende Ebene zur Ebene der xy, so haben wir, um die Gleichung der Durchschnittscurve zu finden, in der Gleichung der Fläche vom $n$ten Grade überall $z = 0$ zu setzen. Das Resultat dieser Substitution kann nur vom $n$ten Grade oder von einem niedrigern seyn, daher ist die Durchschnittscurve höchstens vom $n$ten Grade. §. 77.

Aufgabe [111]. *Es sind die, auf dasselbe Coordinatensystem bezogenen Gleichungen dreier Flächen vom $n$ten, $p$ten und $q$ten Grade gegeben. Es sollen die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte gefunden werden.*

Da die Coordinaten der Durchschnittspunkte die drei gegebenen Gleichungen zugleich befriedigen müssen, so ist nichts weiter nöthig als die Werthe von x, y und z aus den drei gegebenen Gleichungen zu entwickeln, wodurch die Aufgabe für jeden gegebenen Fall gelöst seyn wird.

Da diese Entwicklung bekanntermaßen, im Allgemeinen, zu npq Systemen von Werthen von x, y, z führt, die reell, oder zum Theil imaginair, oder sämmtlich imaginair seyn können, so folgt, daß drei Flächen, welche respective vom $n$ten, $p$ten und $q$ten Grade sind, sich höchstens in npq Punkten, und drei Flächen $n$ten Grades sich höchstens in n^3 Punkten schneiden können.

Hieraus ergiebt sich, daß die Durchschnittscurve C zweier Flächen $n$ten und $p$ten Grades von einer Fläche $q$ten Grades höchstens in npq Punkten geschnitten werden kann. Setzen wir $q = 1$, so folgt, daß dieselbe Durchschnittscurve C von einer Ebene höchstens in np Punkten geschnitten wird.

§. 78.

Lehrsatz [52]. *Wenn durch beliebig gegebene*

$$\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-2$$

Punkte drei oder mehrere Flächen $n$ten Grades gelegt werden, so schneiden sich alle diese Flächen in einer und derselben Curve.

Wir bemerken zunächst, daß, um die Coefficienten der allgemeinen Gleichung $n$ten Grades zu bestimmen, welche von den Coordinaten der gegebenen $[\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-2]$ Punkte befriedigt wird, eben so viele Gleichungen gebildet werden können, und daß also, da die Anzahl dieser Coefficienten um 1 größer ist, der Werth irgend eines Coefficienten beliebig angenommen werden kann. Machen wir zwei solche, von einander verschiedene Annahmen für einen und denselben Coefficienten, so erhalten wir

§. 78. zwei Systeme von Werthen für die Coefficienten, und somit zwei Gleichungen nten Grades, welche zwei Flächen desselben Grades ausdrücken, die durch die gegebenen Punkte gehen. Wir wollen diese Gleichungen durch $N = 0$ und $N' = 0$ bezeichnen. Jede andere Fläche nten Grades, welche durch die gegebenen Punkte geht, kann nun durch die Gleichung

$$N + \lambda N' = 0 \qquad (1)$$

ausgedrückt werden. Denn welches auch diese andere Fläche seyn mag, so ist sie durch $[\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1]$ Punkte (Aufg. 109), also durch die gegebenen Punkte und durch noch einen andern in ihr liegenden, beliebigen Punkt völlig bestimmt. Die Gleichung (1) aber wird von den Coordinaten der gegebenen Punkte befriedigt, da ihre beiden Glieder durch die Substitution der Coordinaten dieser Punkte annullirt werden; und wenn wir die Coordinaten des zuletzt genannten beliebigen Punktes substituiren, so können wir λ, welches nur in erster Potenz vorkommt, immer so bestimmen, daß auch bei dieser Substitution die Gleichung (1) erfüllt wird.

Da nun eine jede der, in Rede stehenden Flächen durch die Gleichung (1) auszudrücken ist, und diese Gleichung durch alle diejenigen Werthe von x, y und z befriedigt wird, welche die beiden Gleichungen

$$N = 0 \quad ; \quad N' = 0$$

zugleich befriedigen, so enthält jede Fläche, welche durch die gegebenen Punkte geht, alle Punkte, welche den Flächen $N = 0$ und $N' = 0$ gemein sind, d. h. die Durchschnittscurve dieser beiden Flächen. Alle Flächen nten Grades, welche durch die gegebenen Punkte gehen, schneiden sich demnach in einer und derselben Curve.

Es schneiden sich also alle Flächen zweiten Grades, welche durch dieselben acht Punkte gehen, in einer und derselben Curve, wie wir schon im §. 56 gefunden haben; ferner haben dieselbe Durchschnittscurve alle Flächen dritten Grades, welche durch dieselben 18 Punkte, alle Flächen vierten Grades, welche durch dieselben 33 Punkte, alle Flächen fünften Grades, welche durch dieselben 54 Punkte gehen, u. s. f.

Lehrsatz [53]. Wenn durch beliebig gegebene

$$\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 3$$

Punkte vier oder mehrere Flächen nten Grades gelegt werden, so schneiden sich alle diese Flächen nicht nur in diesen gegebenen, sondern noch in anderen

$$n^3 - \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) + 3$$

festen Punkten.

§. 78. Durch eine Betrachtung, welche der in dem Beweise des vorigen Satzes angestellten ähnlich ist, überzeugen wir uns leicht, daß alle Flächen nten Grades, welche durch die gegebenen $[\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-3]$ Punkte gehen, durch eine Gleichung von der Form

$$N+\lambda N'+\mu N''=0 \qquad (2)$$

ausgedrückt werden können, in welcher λ und μ zwei willkürliche Constanten bezeichnen, $N=0$, $N'=0$ und $N''=0$ aber die Gleichungen von irgend drei Flächen nten Grades sind, welche die gegebenen Punkte enthalten. Da nun die Gleichung (2) von allen denjenigen Coordinatenwerthen befriedigt wird, welche den Gleichungen $N=0$, $N'=0$ und $N''=0$ zugleich genügen, so gehen alle durch die Gleichung (2) ausgedrückten Flächen durch die Durchschnittspunkte der drei Flächen $N=0$, $N'=0$ und $N''=0$, deren Anzahl gleich n^3 ist (§. 77. Aufg. 111). Alle in Rede stehenden Flächen enthalten demnach außer den gegebenen noch

$[n^3-\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)+3]$ feste Punkte, was zu zeigen war*).

Es ist jetzt klar, daß die Bestimmung: eine Fläche nten Grades soll die Durchschnittscurve, C, zweier gegebenen Flächen nten Grades enthalten, für $[\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-2]$ Bedingungen gelte, und daß, wenn die gegebenen Flächen durch die Gleichungen $N=0$ und $N'=0$ ausgedrückt sind, alle Flächen nten Grades, welche diesen Bedingungen genügen, durch die Gleichung

$$N+\lambda N'=0 \qquad (1)$$

auszudrücken sind, wo λ einen willkürlichen constanten Factor bedeutet. — Die genannte Durchschnittscurve, C, der beiden Flächen nten Grades, welche, zufolge des vorigen §., von einer Ebene höchstens in n^2 Punkten geschnitten werden kann, ist durch das Gleichungssystem

$$\left\{\quad N=0 \quad ; \quad N'=0 \quad\right\} \qquad (3)$$

ausgedrückt; und es leuchtet ein, daß wir an die Stelle einer dieser beiden Gleichungen auch die Gleichung (1), nachdem wir darin dem λ irgend einen bestimmten Werth beigelegt haben, setzen können. Um die Projection dieser Curve, C, auf einer der Cordinatenebenen, z. B. auf der Ebene der xy zu finden, brauchen wir nur eine der veränderlichen Coordinaten, z. B. z, zwischen den beiden Gleichungen (3) zu eliminiren, und die Finalgleichung der

*) Dieser Satz und der vorhergehende ist zuerst von Herrn Plücker in den Annales de mathém. T. XIX. aufgestellt und bewiesen worden.

 Elimination, welche, im Allgemeinen, vom n^2ten Grade seyn wird, ist die Gleichung jener Projection. Wir können daher die Durchschnittscurve C, wenn uns das Gleichungssystem (3) gegeben ist, auch durch die Gleichungen ihrer Projectionen ausdrücken, wobei indessen nicht außer Acht zu lassen ist, daß ein Gleichungssystem von zwei dieser Projectionen, im Allgemeinen, einen größeren Umfang hat als das Gleichungssystem (3). Denn die Gleichungen der beiden Projectionen, welche, im Allgemeinen, vom n^2ten Grade seyn werden, sind zugleich die Gleichungen zweier projicirenden Cylinderflächen (§. 32), und da diese vom n^2ten Grade sind, so schneiden sie sich nicht nur in der Curve C, welche das Gleichungssystem (3) ausdrückt, sondern noch in einer oder mehreren anderen Curven, welche, in Beziehung auf zwei Coordinatenebenen, dieselben Projectionen als die Curve C haben. Ein Gleichungssystem von zwei Projectionen der Durchschnittscurve zweier Flächen nten Grades drückt also, im Allgemeinen, mehr als diese Curve aus. Auf ähnliche Weise erhellet, daß ein Gleichungssystem von zwei Projectionen der Durchschnittscurve einer Fläche nten und einer Fläche pten Grades, im Allgemeinen, mehr als diese Durchschnittscurve ausdrückt. Um dies durch ein Beispiel noch mehr zu verdeutlichen, wollen wir annehmen die Curve C sey die Durchschnittscurve einer Fläche zweiten Grades und einer Ebene, und also eine Linie zweiten Grades (§. 44). Die Gleichungen von zwei Projectionen dieser Curve C sind zugleich die Gleichungen zweier Cylinderflächen zweiten Grades; diese Flächen aber schneiden sich nicht nur in der Curve C sondern noch in einer zweiten ebenen Curve C′ (§. 69), und es hat also die Curve C′, in Beziehung auf zwei Coordinatenebenen, dieselben Projectionen als die Curve C.

§. 79.

Wenn $N = 0$ und $N' = 0$ die Gleichungen zweier Flächen nten Grades bedeuten, so gehet, wie wir im vorigen §. gesehen haben, jede Fläche deren Gleichung die Form

$$N + \lambda N' = 0 \qquad (1)$$

hat, durch die Durchschnittscurve jener beiden Flächen. Es ist leicht einzusehen, daß auch umgekehrt die Gleichung einer jeden Fläche, welche die Durchschnittscurve der beiden zuerst genannten Flächen enthält, auf die Form (1) wird gebracht werden können. Besteht diese Durchschnittscurve aus zwei von einander abgesonderten Curven, und läßt sich durch die eine derselben eine Fläche vom Grade p legen, welcher niedriger als der nte Grad ist, so wird sich, in der Gleichung (1), λ so bestimmen lassen, daß

der

der erste Theil derselben in zwei Factoren zerlegbar wird, von welchen der eine gleich Null gesetzt, die Gleichung der Fläche pten Grades giebt, oder mit anderen Worten, daß, wenn $P = 0$ die Gleichung dieser Fläche bedeutet, für ein gehörig bestimmtes λ,

$$N + \lambda N' \equiv PQ = 0$$

ist. Da nun aber der Ausdruck $N + \lambda N'$ im Allgemeinen vom Grade n, und der Ausdruck P, nach der Voraussetzung, vom Grade p, so ist der Ausdruck Q, im Allgemeinen, vom Grade (n–p); woraus, wie man leicht einsieht, der

Lehrsatz [54]. Wenn unter den Curven von einfacher oder doppelter Krümmung, in welchen sich zwei Flächen nten Grades schneiden, eine oder mehrere vorhanden sind, durch welche eine Fläche vom pten Grade gelegt werden kann, so kann, im Allgemeinen, durch die übrigen eine Fläche vom (n—p)ten Grade gelegt werden.

folgt.

Wenn also zwei Flächen zweiten Grades sich in zwei Curven schneiden, von welchen die eine von einfacher Krümmung ist, so ist es auch die andere, was wir schon in §. 69 gefunden haben. — Wenn ferner zwei Flächen dritten Grades sich in zwei Curven schneiden, von welchen die eine von einfacher Krümmung ist, so kann durch die andere eine Fläche zweiten Grades gelegt werden; u. s. f.

Aus dem vorigen Lehrsatze lassen sich manche interessante Corollare ableiten. Nehmen wir z. B. eine geradlinige Fläche zweiten Grades und beschreiben auf derselben ein schiefes Sechseck, so können wir das System der drei Ebenen, welche respective die erste und zweite, die dritte und vierte, die fünfte und sechste Seitenlinien bestimmen, als eine Fläche dritten Grades, ferner das System der drei Ebenen, welche respective die zweite und dritte, die vierte und fünfte, die sechste und erste Seitenlinie bestimmen, als eine andere Fläche dritten Grades ansehen. Diese beiden Flächen dritten Grades schneiden sich in neun geraden Linien, von welchen sechs, nämlich die Seiten des Sechsecks, auf der Fläche zweiten Grades liegen; die übrigen drei Durchschnittslinien, nämlich diejenigen Geraden, in welchen sich die Ebenen der einander gegenüber liegenden Winkel schneiden, liegen also, zufolge unseres Lehrsatzes, auf einer Ebene. Wir haben demnach den folgenden Satz, aus welchem wir den daneben stehenden vermittelst der Reciprocität ableiten.

Lehrsatz [55]. In jedem auf einer geradlinigen Fläche zweiten Gra-

Lehrsatz [56]. In jedem auf einer geradlinigen Fläche zweiten Gra-

§. 79. des befindlichen Sechsecke liegen die geraden Linien, in welchen sich die Ebenen der einander gegenüber stehenden Winkel schneiden, in einer Ebene.

des befindlichen Sechsecke schneiden sich die geraden Linien, welche die Eckpunkte der einander gegenüber stehenden Winkel verbinden, in einem Punkte.

Es seyen

$$N = 0 \quad ; \quad N' = 0 \quad ; \quad N'' = 0$$

die Gleichungen von drei Flächen nten Grades, welche eine Fläche vom pten Grade, deren Gleichung

$$P = 0$$

ist, in einer und derselben Curve C schneiden, und es sey $p < n$. Je zwei der zuerst genannten drei Flächen schneiden sich alsdann, zufolge des Satzes (54), nicht nur in der Curve C, sondern noch in einer andern Curve, E, E′, E″, und durch jede dieser andern Curven kann eine Fläche gelegt werden, welche vom Grade $(n-p)$ ist. Wir haben daher

$$N + \lambda' N' \equiv PQ'' = 0 \quad ; \quad N + \lambda'' N'' \equiv PQ' = 0 \quad ,$$

wo λ' und λ'' gehörig bestimmte constante Factoren, $Q' = 0$ und $Q'' = 0$ aber die Gleichungen von zwei bestimmten Flächen $(n-p)$ten Grades bedeuten, welche respective die Curven E″ und E′ enthalten. Durch Subtraction ergiebt sich

$$\lambda' N' - \lambda'' N'' \equiv P(Q'' - Q') = 0 \quad .$$

Die Gleichung $\lambda' N' - \lambda'' N'' = 0$ drückt, im Allgemeinen, eine Fläche aus, welche den Durchschnitt der Flächen $N' = 0$ und $N'' = 0$, d. i. die Curven C und E enthält; und da der erste Theil dieser Gleichung dem Producte $P(Q'' - Q')$ identisch ist, so liegen diese Curven, C und E, auf der Fläche $P = 0$ und der Fläche $Q'' - Q' = 0$; da ferner die Curve C, der Voraussetzung zufolge, auf der Fläche $P = 0$ liegt, so liegt die Curve E auf der Fläche $Q'' - Q' = 0$, welche vom Grade $(n-p)$ ist, und durch den Durchschnitt der Flächen $Q'' = 0$ und $Q' = 0$ geht. Wir haben daher den

Lehrsatz [57]. Wenn drei Flächen nten Grades durch eine und dieselbe Curve gehen, welche auf einer Fläche pten Grades liegt, so schneiden sich die drei Flächen $(n-p)$ten Grades, welche sich durch jede der zweiten Durchschnittscurven von je zwei jener Flächen legen lassen, in einer und derselben Curve.

Drei Flächen nten Grades

$$N = 0 \quad ; \quad N' = 0 \quad ; \quad N'' = 0 \qquad (2)$$

schneiden sich, im Allgemeinen, in n^3 Punkten (§. 77). Jede andere Fläche nten Grades, welche durch dieselben n^3 Punkte geht, ist durch die Gleichung

§. 79.

$$N + \lambda' N' + \lambda'' N'' = 0 \qquad (3)$$

darzustellen, und die Coordinaten der genannten n^3 Durchschnittspunkte können durch Entwickelung eben sowohl aus den drei Gleichungen (2) als aus irgend zwei derselben und der Gleichung (3) gefunden werden. Haben nun die Flächen (2) eine solche Gestalt und Lage, daß sich unter den n^3 Durchschnittspunkten eine Anzahl gleich pn^2 befindet, welche auf einer Fläche, $P = 0$, vom pten Grade liegt, und $p < n$ ist, so muß nothwendigerweise der erste Theil der Gleichung (3) durch eine gehörige Bestimmung von λ' und λ'' in zwei rationale Factoren zerlegbar werden, von welchen der eine gleich P, also vom Grade p, und der andere folglich vom Grade $(n-p)$ ist, und hieraus ergiebt sich leicht, daß alle übrigen Durchschnittspunkte der Flächen (2) auf einer Fläche vom Grade $(n-p)$ liegen. Daher der

Lehrsatz [58]. Wenn von den Durchschnittspunkten dreier Flächen nten Grades, deren Anzahl n^3 ist, pn^2 Durchschnittspunkte sich auf einer Fläche pten Grades befinden; so liegen die übrigen $(n-p)n^2$ Durchschnittspunkte auf einer Fläche $(n-p)$ten Grades.

Wir erhalten hieraus, und vermittelst der Reciprocität:

Lehrsatz [59]. Wenn von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades vier in einer Ebene liegen, so liegen die vier übrigen gleichfalls in einer Ebene.

Lehrsatz [60]. Wenn von den acht gemeinschaftlichen Tangentialebenen dreier Flächen zweiten Grades vier durch einen Punkt gehen; so gehen die vier übrigen gleichfalls durch einen Punkt.

§. 80.

Aufgabe [112]. Es ist eine Fläche nten Grades und die Richtung einer geraden Linie gegeben. Man soll den Ort des Punktes P finden, welcher so liegt, daß, wenn man durch ihn eine Gerade der gegebenen Richtung parallel zieht, die algebraische Summe aller Abschnitte dieser Geraden, welche einerseits von dem Punkte P und andererseits von der gegebenen Fläche begrenzt werden, eine gegebene Größe habe.

Es sey die gegebene Fläche vom dritten Grade, und ihre Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

§. 80.
$$\left.\begin{array}{l} az^3+by^3+cx^3+dxz^2+eyz^2+fxy^2+gzy^2+hyx^2+kzx^2+mxyz \\ +a'z^2+b'y^2+c'x^2+d'xz+e'yz+f'xy \\ +a''z+b''y+c''x \\ +a''' \end{array}\right\} = 0 \;. \quad (1)$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des gesuchten Punktes P durch x', y', z', und transformiren die Gleichung (1), indem wir $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ respective für x, y, z setzen, so erhalten wir eine Gleichung, die wir durch B bezeichnen wollen. In dieser Gleichung B ist das Aggregat der Glieder, welche drei Dimensionen der laufenden Coordinaten enthalten,

$$az^3+by^3+cx^3+dxz^2+eyz^2+fxy^2+gzy^2+hyx^2+kzx^2+mxyz \;, \quad (2)$$

und das Aggregat der Glieder, in welchen nur zwei Dimensionen der laufenden Coordinaten x, y, z vorkommen,

$$\begin{array}{l} \{3az^2+2dxz+2eyz+gy^2+kx^2+mxy\}\cdot z' \\ +\{3by^2+2fxy+2gyz+ez^2+hx^2+mxz\}\cdot y' \\ +\{3cx^2+2hxy+2kxz+dz^2+fy^2+myz\}\cdot x' \\ +a'z^2+b'y^2+c'x^2+d'xz+e'yz+f'xy \;. \end{array} \quad (3)$$

Transformiren wir nun die Gleichung B wiederum und zwar in Polarcoordinaten der dritten Art, indem wir

$$x = u\cos\alpha \;\;;\;\; y = u\cos\beta \;\;;\;\; z = u\cos\gamma$$

setzen (§. 1 F. 7), so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$M_3u^3+M_2u^2+M_1u+M_0 = 0 \;,$$

worin M_3, M_2, 2c. Functionen von α, β, γ, x', y' und z' sind. Aus dieser Gleichung erhält u drei Werthe, deren algebraische Summe gleich $-\frac{M_2}{M_3}$ ist. Legen wir den Größen α, β, γ diejenigen Werthe bei, welche die Winkel ausdrücken, die die gegebene Richtung mit den drei Coordinatenachsen bildet, und bezeichnen wir die gegebene Größe der Summe der in der Aufgabe genannten Abschnitte durch C, so haben wir nun

$$-\frac{M_2}{M_3} = C \quad \text{oder} \quad M_2+CM_3 = 0 \;. \quad (4)$$

Die Ausdrücke von M_3 und M_2 ergeben sich durch die genannte Substitution unmittelbar aus den Ausdrücken (2) und (3), und die Gleichung (4) ist demnach

$$\left.\begin{array}{l}[3a\cos^2\gamma+2d\cos\alpha\cos\gamma+2e\cos\beta\cos\gamma+g\cos^2\beta+k\cos^2\alpha+m\cos\alpha\cos\beta]\cdot z'\\ +[3b\cos^2\beta+2f\cos\alpha\cos\beta+2g\cos\beta\cos\gamma+e\cos^2\gamma+h\cos^2\alpha+m\cos\alpha\cos\gamma]\cdot y'\\ +[3c\cos^2\alpha+2h\cos\alpha\cos\beta+2k\cos\alpha\cos\gamma+d\cos^2\gamma+f\cos^2\beta+m\cos\beta\cos\gamma]\cdot x'\\ +a'\cos^2\gamma+b'\cos^2\beta+c'\cos^2\alpha+d'\cos\alpha\cos\gamma+e'\cos\beta\cos\gamma+f'\cos\alpha\cos\beta\\ +C\left\{\begin{array}{l}a\cos^3\gamma+b\cos^3\beta+c\cos^3\alpha+d\cos\alpha\cos^2\gamma+e\cos\beta\cos^2\gamma+f\cos\alpha\cos^2\beta\\ \quad+g\cos\gamma\cos^2\beta+h\cos\beta\cos^2\alpha+k\cos\gamma\cos^2\alpha+m\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\end{array}\right\}\end{array}\right\}=0\;. \quad (5)$$

Diese Gleichung, welche außer x', y', z' nur gegebene Größen enthält, ist in Beziehung auf x', y' und z' vom ersten Grade. Der Ort des Punktes P ist demnach eine Ebene.

Ebenso wie wir hier mit der Gleichung einer Fläche dritten Grades verfahren sind, können wir offenbar mit der Gleichung einer Fläche von irgend einem Grade n verfahren, und daraus folgt, daß der gesuchte Ort für eine Fläche nten Grades gleichfalls eine Ebene seyn wird.

Wenn die gegebene Größe C gleich Null ist, d. h. wenn die Summe der, auf der einen Seite des Punktes P liegenden Abschnitte der Summe der, auf der andern Seite liegenden gleich ist, so wird die Ebene, welche der Ort des Punktes P ist, eine Diametralebene der Fläche genannt. Wird die gegebene Richtung verändert, so verändern sich die Werthe von α, β und γ, und dann verändert sich, im Allgemeinen, auch die Lage der Diametralebene (5). Einer jeden Richtung ist daher eine Diametralebene einer gegebenen Fläche zugeordnet, und jede Fläche hat, im Allgemeinen, unendlich viele Diametralebenen.

Fehlen in der Gleichung (1) alle Glieder von zwei Dimensionen, oder in der Gleichung einer Fläche nten Grades alle Glieder von $(n-1)$ Dimensionen, so gehen alle ihre Diametralebenen durch einen und denselben Punkt, nämlich durch den Anfang der Coordinaten. Auf allen Geraden, welche durch diesen Punkt gezogen werden, ist dann die Summe der auf der einen Seite liegenden Abschnitte der Summe der auf der andern Seite liegenden gleich.

Enthalten die Glieder von n Dimensionen der Gleichung einer Fläche nten Grades nur zwei von den veränderlichen Coordinaten x, y, z, so sind alle Diametralebenen der Fläche auf einer und derselben Ebene senkrecht.

Finden die beiden zuletzt genannten Fälle zugleich Statt, so schneiden sich alle Diametralebenen der Fläche nten Grades, im Allgemeinen, in einer und derselben Geraden.

Enthält die Gleichung einer Fläche nten Grades nur das eine Glied az^n oder by^n oder cx^n von n Dimensionen, so sind, im Allgemeinen, alle Diametralebenen einander parallel.

§. 80. Fehlen in diesem letzten Falle zugleich die Glieder $(n-1)$ter Dimension, so hat die Fläche nur eine einzige Diametralebene, und diese Ebene theilt jede Sehne der Fläche, welche Richtung sie auch haben mag, so, daß die Summe der auf der einen Seite der Ebene liegenden Abschnitte der Summe der auf der andern Seite liegenden gleich ist.

Alle diese besonderen Fälle ergeben sich leicht durch die Betrachtung der Gleichung (5), so daß wir uns begnügen, sie genannt zu haben.

Hat die Gleichung einer Fläche nten Grades nur Glieder von einer geraden Anzahl Dimensionen oder nur Glieder von einer ungeraden Anzahl Dimensionen, so wird jede durch den Anfangspunkt gezogene gerade Linie von der Fläche so geschnitten, daß sich auf beiden Seiten des Anfangspunktes eine gleiche Anzahl Abschnitte befindet, die einzeln einander gleich sind. Der Anfangspunkt der Coordinaten heißt alsdann der Mittelpunkt der Fläche. Eine Fläche kann unendlich viele Mittelpunkte haben.

Aufgabe [113]. Es sind zwei Flächen nten Grades und die Richtungen zweier geraden Linien gegeben. Man soll den Ort des Punktes P finden, welcher so liegt, daß, wenn man durch ihn eine Gerade an die eine Fläche der einen Richtung parallel, und eine andere Gerade an die andere Fläche der zweiten Richtung parallel zieht, das Product der Abschnitte auf der einen Geraden und das Product der Abschnitte auf der andern Geraden, welche Abschnitte einerseits von dem Punkte P und andererseits respective von den Flächen begrenzt werden, in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Es seyen

$$N_1 = 0 \text{ und } N_2 = 0$$

die Gleichungen der gegebenen Flächen in rechtwinkligen Coordinaten. Bezeichnen wir die Aggregate der Glieder von n Dimensionen respective durch A_1 und A_2, die constanten Glieder durch C_1 und C_2, endlich die Aggregate aller übrigen Glieder durch B_1 und B_2, so ist

$$\begin{aligned} N_1 &\equiv A_1 + B_1 + C_1 = 0 \\ N_2 &\equiv A_2 + B_2 + C_2 = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Sind x', y', z' die Coordinaten des Punktes P, und setzen wir $x + x'$, $y + y'$, $z + z'$ respective für x, y, z, so verwandeln sich die Gleichungen (6) in

$$\begin{aligned} A_1 + D_1 + N'_1 &= 0 \\ A_2 + D_2 + N'_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

wo D_1, D_2 die Aggregate aller Glieder bezeichnen, welche in Beziehung auf x, y und z von der 1sten, 2ten ...(n—2)ten und (n—1)ten Dimension sind, N'_1, N'_2 aber diejenigen Ausdrücke bedeuten, welche aus N_1, N_2 durch bloße Substitution von x', y', z' für x, y, z hervorgehen. Transformiren wir die Gleichungen (7) indem wir

§. 80.

$$x = u\cos\alpha \quad ; \quad y = u\cos\beta \quad ; \quad z = u\cos\gamma$$

setzen, so kommt

$$\left.\begin{array}{l} Q_1u^n + R_1 + N'_1 = 0 \quad , \\ Q_2u^n + R_2 + N'_2 = 0 \quad , \end{array}\right\} \quad (8)$$

worin R_1, R_2 die Aggregate aller Glieder bezeichnen, welche in Beziehung auf u von der ersten bis (n—1)ten Dimension sind, Q_1, Q_2 aber Ausdrücke bedeuten, die nicht u sondern nur α, β, γ enthalten und die blos aus den Aggregaten A_1, A_2 hervorgegangen sind. Aus einer jeden dieser Gleichungen erhält u eine Anzahl von n Werthen, deren Producte bekanntermaßen

$$\pm\frac{N'_1}{Q_1} \quad \text{und} \quad \pm\frac{N'_2}{Q_2}$$

sind. Legen wir den Größen α, β, γ in diesen beiden Ausdrücken respective diejenigen Werthe bei, welche die in der Aufgabe genannten Richtungen bestimmen, und nennen das gegebene Verhältniß 1 : λ, so haben wir, in Folge der Bedingung der Aufgabe,

$$\frac{N'_1}{Q_1} = \lambda\frac{N'_2}{Q_2} \quad \text{oder} \quad Q_2N'_1 - \lambda Q_1N'_2 = 0 \quad .$$

Es enthalten Q_1 und Q_2 nicht x', y', z' sondern nur α, β, γ, welchen Größen constante Werthe beigelegt worden sind, und N'_1, N'_2 gehen wieder in N_1, N_2 über, wenn wir die, jetzt nicht mehr nöthigen Accente von x', y', z' weglassen, so daß, wenn wir die Constante $\frac{\lambda Q_1}{Q_2}$ durch $-\mu$ bezeichnen,

$$N_1 + \mu N_2 = 0 \qquad (9)$$

hervorgehet, welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist. Dieser Ort ist demnach eine Fläche nten Grades, welche die Durchschnittscurve der beiden gegebenen Flächen $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ enthält (§. 78).

Nachdem wir diese Aufgabe gelöst haben, wollen wir drei Flächen nten Grades betrachten, welche sich in einer und derselben Curve schneiden. Sind

$$N_1 = 0 \quad \text{und} \quad N_2 = 0$$

die Gleichungen von zwei dieser Flächen, so kann die dritte immer durch die Gleichung

§. 80. Fehlen in diesem letzten Falle zugleich ... (10)
sion, so hat die Fläche nur eine ... constanten Werth hat (§. 78).
theilt jede Sehne der Flä... mit dieser dritten Fläche (10)
die Summe der ...
Summe der ...

$$\mu' = -\frac{\lambda Q_1}{Q_2}$$

Alle ...
der G... Da nun in dieser letzten Gleichung λ nur in erster Potenz vorkommt, so kann diese Größe, die wir jetzt als nicht gegeben betrachten, immer, und zwar auf reelle Weise, so bestimmt werden, daß die eben genannte Gleichung befriedigt wird, und hieraus fließt der folgende

Lehrsatz [61]. Wenn drei Flächen nten Grades eine und dieselbe Durchschnittscurve haben, und von einem Punkte P einer dieser Flächen zwei Gerade an die beiden andern Flächen zweien beliebigen aber unveränderlichen Richtungen parallel gezogen werden, so ist das Product der Abschnitte, welche auf der einen Geraden von dem genannten Punkte P und der zweiten Fläche begrenzt werden, zu dem Producte der Abschnitte, welche auf der andern Geraden von demselben Punkte P und der dritten Fläche begrenzt werden, in einem constanten Verhältnisse, wo auch jener Punkt P auf der ersten Fläche mag angenommen worden seyn.

Wir wollen noch bemerken, daß die vorige Aufgabe (113) folgendermaßen leicht verallgemeinert werden kann. „Es sind eine Anzahl, m, Flächen nten Grades und die Richtungen eben so vieler Geraden gegeben; es soll der Ort des Punktes P gefunden werden, welcher so liegt, daß, wenn man durch ihn m gerade Linien den gegebenen Richtungen parallel zieht, das Product der Abschnitte auf der ersten Geraden, welche von der ersten gegebenen Fläche begrenzt werden, das Product der Abschnitte auf der zweiten Geraden, welche von der zweiten gegebenen Fläche begrenzt werden u. s. f. eine ebenfalls gegebene Gleichung oder zwei solche Gleichungen befriedigen." Auch ist leicht einzusehen, daß der gesuchte Ort des Punktes P, in dem Falle einer gegebenen Gleichung vom Grade r zwischen den genannten Producten, eine Fläche vom Grade rn, in dem Falle zweier gegebenen Gleichungen zwischen jenen Producten aber, eine Curve von doppelter Krümmung seyn wird.

Aufgabe [114]. Es ist eine Fläche nten Grades und ein Punkt P, der nicht auf dieser Fläche liegt, gegeben. Um den Punkt P dreht sich eine gerade Linie, welche von der Fläche in n veränderlichen (reellen oder imaginairen) Punkten $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$ geschnitten wird, und auf dieser Geraden bewegt sich ein Punkt P_1 so, daß immer

$$\frac{1}{Pp_1} + \frac{1}{Pp_2} + \frac{1}{Pp_3} + \dots + \frac{1}{Pp_n} = \frac{1}{PP_1}$$

ist. Es soll der Ort des Punktes P_1 gefunden werden.

Wir nehmen den gegebenen Punkt P zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten, und alsdann sey

$$A + az + by + cx + d = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche, in welcher A das Aggregat aller Glieder bezeichnet, deren Dimensionen höher als die erste sind. Transformiren wir diese Gleichung in Polarcoordinaten indem wir $x = u\cos\alpha$, $y = u\cos\beta$, $z = u\cos\gamma$ setzen, so erhalten wir eine Gleichung, welche in Beziehung auf u vom nten Grade ist, und deren letzte Glieder

$$(a\cos\gamma + b\cos\beta + c\cos\alpha)u + d$$

sind. Bezeichnen wir ihre n verschiedenen Wurzeln durch $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$, so ist bekanntermaßen

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = -\frac{a\cos\gamma + b\cos\beta + c\cos\alpha}{d} \,.$$

Da aber augenscheinlich $Pp_1 = u_1$, $Pp_2 = u_2$, ... $Pp_n = u_n$, so haben wir auch, zufolge der Bedingung der Aufgabe,

$$\frac{1}{PP_1} = -\frac{a\cos\gamma + b\cos\beta + c\cos\alpha}{d} \,,$$

oder, wenn wir den Radius vector von P_1 durch u' bezeichnen und die Nenner wegschaffen,

$$au'\cos\gamma + bu'\cos\beta + cu'\cos\alpha + d = 0 \,.$$

Kehren wir zu rechtwinkligen Coordinaten zurück, und bezeichnen diejenigen des Punktes P_1 durch x', y', z', so daß also $u'\cos\gamma = z'$, $u'\cos\beta = y'$, $u'\cos\alpha = x'$, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung

$$az' + by' + cx' + d = 0$$

als die Gleichung des gesuchten Ortes, welcher demnach eine Ebene ist.

§. 81.

Nehmen wir irgend einen Punkt P auf einer Fläche nten Grades zum Anfangspunkte rechtwinkliger oder schiefwinkliger Coordinaten, und beziehen diese Fläche auf ein solches Coordinatensystem, so wird ihre Gleichung

$$N = 0 \qquad (1)$$

kein constantes Glied enthalten, weil für $x = 0$ und $y = 0$ auch $z = 0$

§. 81. aus dem Vorhergehenden klar, daß sich diese Tangente der Curve C im Punkte P zugleich in den beiden Tangentialebenen befindet, [illegible] im Punkte P an der Fläche M und an der Fläche N gelegt werden [illegible], und daß sie folglich die Durchschnittslinie dieser beiden Tangentialebenen ist. Hieraus folgt zugleich, daß, wenn sich drei oder mehrere Flächen in einer und derselben Curve C schneiden, die verschiedenen Tangentialebenen dieser Flächen in einem, auf der Curve C befindlichen Punkte P nicht nur diesen Punkt P, sondern eine und dieselbe Gerade, nämlich die Tangente der Curve C im Punkte P, mit einander gemein haben. Ferner ist klar, daß, um die Tangente einer Curve C in einem Punkte P zu erhalten, nichts weiter erforderlich ist, als die Tangentialebenen zweier, diese Curve enthaltender Flächen im Punkte P zu construiren, daß also dieselbe Tangente auch als die Durchschnittslinie der Tangentialebenen zweier projicirenden Cylinder im Punkte P construirt werden kann, und endlich daß die Projectionen der Tangente einer Curve C im Punkte P Tangenten der Projectionen der Curve C in den Projectionen des Punktes P sind. Die Tangente einer Curve im Raume kann daher immer durch die Gleichungen der Tangenten von zwei Projectionen der Curve dargestellt werden. Ist z. B. die Tangente derjenigen Curve, deren Gleichungen

$$\left\{ \quad y^2 + x^2 = r_1^2 \quad ; \quad z^2 + x^2 = r_2^2 \quad \right\} \qquad (5)$$

sind, auszudrücken, und ist $x'y'z'$ der gegebene Berührungspunkt, so haben wir auf der Stelle

$$\left\{ \quad y'y + x'x = r_1^2 \quad ; \quad z'z + x'x = r_2^2 \quad \right\} \qquad (6)$$

als Gleichungssystem dieser Tangente. — Ist ferner die Tangente an der sphärischen Linie zweiten Grades (§. 41), deren Gleichungen

$$\left\{ \quad z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \quad ; \quad a^2z^2 - b^2y^2 - c^2x^2 = 0 \quad \right\} \qquad (7)$$

sind, darzustellen, und ist wieder $x'y'z'$ der gegebene Berührungspunkt, so können wir das System der beiden Gleichungen

$$\left\{ \quad z'z + y'y + x'x = r^2 \quad ; \quad a^2z'z - b^2y'y - c^2x'x = 0 \quad \right\}, \qquad (8)$$

von welchen die eine die Tangentialebene an der Kugelfläche und die andere die Tangentialebene an der Kegelfläche ausdrückt, als Gleichungssystem für die Tangente der Curve nehmen. Wir können aber auch dieselbe Curve (7), indem wir nach einander x und y zwischen ihren Gleichungen (7) eliminiren, durch die Gleichungen

$$\left\{ \quad (a^2+c^2)z^2 + (c^2-b^2)y^2 = c^2r^2 \quad ; \quad (a^2+b^2)z^2 + (b^2-c^2)x^2 = b^2r^2 \quad \right\} \qquad (9)$$

darstellen, und demgemäß die Tangente im Punkte $x'y'z'$ durch das Gleichungssystem §. 81.

$$\left\{ (a^2+c^2)z'z+(c^2-b^2)y'y=c^2r^2 \; ; \; (a^2+b^2)z'z+(b^2-c^2)x'x=b^2r^2 \right\} (10)$$

ausdrücken, wobei wir sogleich bemerken, daß sich diese Gleichungen (10) aus den Gleichungen (8) ergeben, wenn wir zwischen diesen nach einander x und y eliminiren, wie es, nach dem vorher Gezeigten, offenbar auch seyn muß.

Ist der Punkt P einer Curve doppelter Krümmung C, welche die Durchschnittscurve zweier Flächen M und N vom mten und nten Grade ist, ein vielfacher oder isolirter Punkt einer dieser Flächen, oder liegt er auf einer vielfachen oder isolirten Linie einer dieser selbigen Flächen, so ist er ein vielfacher oder isolirter Punkt der Curve C. Die vielfachen und isolirten Punkte der Curven im Raume werden wir also auffinden können, wenn wir im Stande sind, die vielfachen und isolirten Punkte und Linien der Flächen aufzufinden.

Aufgabe [115]. **Die Gleichung einer Fläche nten Grades in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten ist gegeben. Es sollen die vielfachen und isolirten Punkte und Linien der Fläche gefunden werden, wenn sie dergleichen hat.**

Wir setzen $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ respective für x, y, z in die gegebene Gleichung der Fläche, wodurch wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem noch unbestimmten Punkte $x'y'z'$ verlegen. Sind nun

$$Az+By+Cx+D$$

die vier letzten Glieder der resultirenden Gleichung, worin A, B, C und D Functionen von x', y' und z' bedeuten, so setze man

$$A=0 \quad ; \quad B=0 \quad ; \quad C=0 \quad ; \quad D=0 \quad .$$

Findet sich alsdann ein System von Werthen von x', y', z', welches diese vier Gleichungen zu gleicher Zeit befriedigt, oder finden sich mehrere solche Systeme, so hat die gegebene Fläche einen oder mehrere vielfachen Punkte, deren Coordinaten x', y', z' auf diese Weise gefunden sind, und welche auch isolirte Punkte seyn können. Finden sich aber zwei Functionen $x'=\varphi(z')$ und $y'=\psi(z')$ von der Beschaffenheit, daß sie an die Stelle von x' und y' in die genannten vier Gleichungen gesetzt, diese Gleichungen für jeden Werth von z' zugleich befriedigen, so hat die Fläche eine vielfache Linie, deren Gleichungen

$$x=\varphi(z) \quad ; \quad y=\psi(z) \quad ,$$

auf diese Weise gefunden sind, und welche auch eine isolirte Linie seyn

§. 81. kann. — Die Richtigkeit des Verfahrens ist aus dem oben Gesagten einleuchtend.

(Wenn man im Stande ist die gegebene Gleichung der Fläche nach einer der drei Größen x, y, z aufzulösen, so läßt sich zuweilen aus dem Ausdrucke der Wurzel eine Gleichung der vielfachen oder isolirten Linie der Fläche unmittelbar auffinden. Wir werden hiervon später (in §. 92) ein Beispiel geben.)

Beispiel I. Es sey

$$z^3 - ky^2 - kx^2 = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche in rechtwinkligen Coordinaten. Wir setzen $x + x'$, $y + y'$, $z + z'$ respective für x, y, z, und finden dann die letzten vier Glieder der transformirten Gleichung, nämlich

$$3z'^2z - 2ky'y - 2kx'x + (z'^3 - ky'^2 - kx'^2) \quad ,$$

woraus wir die Gleichungen

$$z'^2 = 0 \quad ; \quad y' = 0 \quad ; \quad x' = 0 \quad ; \quad z'^3 - ky'^2 - kx'^2 = 0$$

bilden, welche sämmtlich von den Werthen $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ befriedigt werden. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist daher ein vielfacher Punkt der Fläche. Daß dieser Punkt kein isolirter sey, sehen wir daraus, daß jede, die positive Seite der Achse der z schneidende und der Ebene der xy parallele Ebene, $z = h$, die Fläche in einem reellen Kreise, $y^2 + x^2 = \frac{h^3}{k}$, schneidet, wie klein auch der Abstand h von der Ebene der xy seyn mag.

Beispiel II. Es sey ferner in rechtwinkligen Coordinaten

$$z^3 - az^2 - ky^2 - kx^2 = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche, worin a eine positive Größe bedeute. Hier finden wir, nach dem angegebenen Verfahren, die vier Gleichungen

$$3z'^2 - 2az' = 0 \; ; \; y' = 0 \; ; \; x' = 0 \; ; \; z'^3 - az'^2 - ky'^2 - kx'^2 = 0 \; ,$$

welche ebenfalls sämmtlich durch $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ befriedigt werden. Eine, der Ebene der xy parallele Ebene, deren Gleichung $z = h$, schneidet die Fläche in einer Curve, deren Gleichung

$$y^2 + x^2 = \frac{h^2}{k}(h - a)$$

sich durch Elimination von z ergiebt. Diese Gleichung drückt einen Kreis aus, wenn $h > a$, und sie drückt eine imaginaire Curve aus, wenn nicht $h > a$, mit Ausnahme des einzigen Falles, in welchem $h = 0$, wo sie

dann einen Punkt, den Anfangspunkt der Coordinaten nämlich, darstellt. §. 81.
Hieraus ist klar, daß der Anfangspunkt der Coordinaten ein isolirter Punkt der Fläche ist.

Beispiel III. Es sey

$$(z^2+y^2+x^2+8c^2)^2(y^2+x^2)-c^2(5y^2+5x^2+4c^2)^2=0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche. Hier finden wir, nach derselben Verfahrungsart, die folgenden vier Gleichungen

$$(y^2+x^2)(z^2+y^2+x^2+8c^2)z=0\ ,$$

$$\{2(y^2+x^2)(z^2+y^2+x^2+8c^2)+(z^2+y^2+x^2+8c^2)^2-10c^2(5y^2+5x^2+4c^2)\}y=0\ ,$$

$$\{2(y^2+x^2)(z^2+y^2+x^2+8c^2)+(z^2+y^2+x^2+8c^2)^2-10c^2(5y^2+5x^2+4c^2)\}x=0\ ,$$

$$(z^2+y^2+x^2+8c^2)^2(y^2+x^2)-c^2(5y^2+5x^2+4c^2)^2=0\ ,$$

in welchen wir, der Kürze wegen, die Accente weggelassen haben. Die erste Gleichung wird befriedigt, wenn

1) $y^2+x^2=0$, oder 2) $z^2+y^2+x^2+8c^2=0$, oder 3) $z=0$.

Es kann aber nicht $y^2+x^2=0$ seyn, weil dies die letzte Gleichung auf $c^4=0$ reducirt, und eben so wenig kann $z^2+y^2+x^2+8c^2=0$ seyn, weil diese Gleichung durch keine reellen Werthe von x, y und z zu befriedigen ist. Wohl aber kann $z=0$ seyn; denn dies reducirt die letzte Gleichung auf

$$(y^2+x^2+8c^2)^2(y^2+x^2)-c^2(5y^2+5x^2+4c^2)^2=0\ ,$$

eine Gleichung, welcher wir auch die Form

$$(y^2+x^2-c^2)(y^2+x^2-4c^2)^2=0$$

geben können. Setzen wir nun in die zweite und dritte Gleichung $z=0$ und $y^2+x^2-c^2=0$, so reduciren sie sich auf $9c^4y=0$ und $9c^4x=0$, und stehen dann mit $y^2+x^2-c^2=0$ im Widerspruche. Setzen wir aber $z=0$ und $y^2+x^2-4c^2=0$, so werden jene beiden Gleichungen zugleich befriedigt. Sämmtlichen vier Gleichungen wird also zu gleicher Zeit genügt durch die beiden Relationen

$$z=0 \quad \text{und} \quad y^2+x^2-4c^2=0\ .$$

Diese letzten Gleichungen drücken einen in der Ebene der xy liegenden Kreis aus; und dieser Kreis ist eine doppelte und zwar isolirte Linie der Fläche.

Aufgabe [116]. Es ist die Gleichung einer Fläche $n$ten Grades und ein Punkt A gegeben. Man soll den Ort des Punktes P finden,

§. 81. welcher so liegt, daß die Gerade AP der Summe der Abschnitte auf dieser selbigen (verlängerten) Geraden gleich sey, welche einerseits von dem Punkte A und andererseits von der gegebenen Fläche begrenzt werden.

Nehmen wir den Punkt A zum Anfangspunkt rechtwinkliger oder schiefwinkliger Coordinaten, so ist irgend eine Gerade AP durch die Gleichungen

$$x = \alpha z \quad ; \quad y = \beta z \qquad (11)$$

ausgedrückt, wo α und β zwei unbestimmte Coefficienten bedeuten. Setzen wir diese Werthe von x und y in die Gleichung der gegebenen Fläche nten Grades, so erhalten wir eine Gleichung in z vom nten Grade, welche wir durch

$$B_n z^n + B_{n-1} z^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + B_1 z + B_0 = 0$$

bezeichnen. Die Wurzeln dieser Gleichung sind offenbar die auf die Achse der z projicirten Abschnitte der Geraden AP, welche sämmtlich von dem Punkte A und von der gegebenen Fläche begrenzt werden; der Ausdruck $-\frac{B_{n-1}}{B_n}$ ist demnach der Summe dieser Projectionen gleich, und wenn wir jetzt die Coordinaten des Punktes P x, y und z nennen, so ist

$$z = -\frac{B_{n-1}}{B_n},$$

woraus wir

$$B_n z + B_{n-1} = 0 \qquad (12)$$

erhalten. Nun sind aber B_n und B_{n-1} diejenigen Ausdrücke, welche aus den Gliedern der nten und (n—1)ten Dimension der gegebenen Gleichung durch Substitution von α und β für x und y hervorgehen. Bezeichnen wir daher die beiden Aggregate jener Glieder durch A_n und A_{n-1}, setzen in die Gleichung (12), zufolge der Gleichungen (11), für α und β wieder $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$, und schaffen sodann den gemeinschaftlichen Nenner z^{n-1} fort, so kommt

$$A_n + A_{n-1} = 0 \qquad (13)$$

als die Gleichung des gesuchten Ortes. Dieser Ort ist demnach ebenfalls eine Fläche nten Grades, deren Gleichung aus den Gliedern nter und (n—1)ter Dimension der Gleichung der gegebenen Fläche besteht. Zufolge des oben Gesagten ist daher der Punkt A im Allgemeinen ein vielfacher oder isolirter Punkt der gesuchten Fläche.

§. 82.

Aufgabe [117]. Drei gegebene feste Ebenen werden von einer vierten

vierten veränderlichen Ebene so geschnitten, daß die dadurch entstehenden Tetraeder einen gegebenen constanten Rauminhalt haben; es soll der Ort desjenigen Punktes O gefunden werden, in welchem die Verbindungslinien der Halbirungspunkte je zweier einander gegenüber liegender Kanten eines jeden dieser Tetraeder sich schneiden. §. 82.

Wir nehmen die drei gegebenen festen Ebenen zu Coordinatenebenen, und bezeichnen den gegebenen constanten Rauminhalt durch a^3. Sind nun x', y', z' die Abschnitte, welche die vierte veränderliche Seitenebene des Tetraeders respective auf den Achsen der x, der y, der z abschneidet, so ist der Rauminhalt des Körpers

$$\tfrac{1}{6}\Omega x'y'z' = a^3 \quad ,$$

wo Ω die, in §. 14 angegebene Bedeutung hat. Die Coordinaten x, y, z des Punktes O aber sind, zufolge §. 12 (Lehrs. 2),

$$x = \tfrac{1}{4}x' \quad ; \quad y = \tfrac{1}{4}y' \quad ; \quad z = \tfrac{1}{4}z' \quad .$$

Eliminiren wir x', y' und z' zwischen den aufgestellten vier Gleichungen, und bezeichnen, der Kürze wegen, $\frac{3a^3}{32\Omega}$ durch m^3, so kommt

$$xyz = m^3 \qquad (1)$$

als Gleichung des gesuchten Ortes, welcher demnach eine Fläche des 3ten Grades ist.

Was die Gestalt dieser Fläche betrifft, so sehen wir zunächst, daß sie sich ins Unendliche erstreckt, da für alle Werthe von x und y, wie groß sie auch seyn mögen, z reell ist. Legen wir der Ebene der xy eine parallele Ebene, deren Gleichung

$$z = h$$

seyn mag, so finden wir für die Projection des Durchschnitts oder für die Durchschnittscurve selbst

$$xy = \frac{m^3}{h} \quad .$$

Diese Durchschnittscurve ist also eine Hyperbel, deren Asymptoten in den Ebenen der xz und yz liegen. Alle Durchschnitte, welche von Ebenen gebildet werden, die der Ebene der xy parallel liegen, sind demnach ähnliche Hyperbeln. Dasselbe findet Statt bei den Durchschnitten der Ebenen, welche den anderen Coordinatenebenen parallel sind. Je weiter eine solche Durchschnittsebene von der ihr parallelen Coordinatenebene entfernt ist, desto kleiner ist die Potenz der Hyperbel.

§. 80. Fehlen in diesem letzten Falle zugleich die Glieder $(n-1)$ter Dimension, so hat die Fläche nur eine einzige Diametralebene, und diese Ebene theilt jede Sehne der Fläche, welche Richtung sie auch haben mag, so, daß die Summe der auf der einen Seite der Ebene liegenden Abschnitte der Summe der auf der andern Seite liegenden gleich ist.

Alle diese besonderen Fälle ergeben sich leicht durch die Betrachtung der Gleichung (5), so daß wir uns begnügen, sie genannt zu haben.

Hat die Gleichung einer Fläche nten Grades nur Glieder von einer geraden Anzahl Dimensionen oder nur Glieder von einer ungeraden Anzahl Dimensionen, so wird jede durch den Anfangspunkt gezogene gerade Linie von der Fläche so geschnitten, daß sich auf beiden Seiten des Anfangspunktes eine gleiche Anzahl Abschnitte befindet, die einzeln einander gleich sind. Der Anfangspunkt der Coordinaten heißt alsdann der Mittelpunkt der Fläche. Eine Fläche kann unendlich viele Mittelpunkte haben.

Aufgabe [113]. **Es sind zwei Flächen nten Grades und die Richtungen zweier geraden Linien gegeben. Man soll den Ort des Punktes P finden, welcher so liegt, daß, wenn man durch ihn eine Gerade an die eine Fläche der einen Richtung parallel, und eine andere Gerade an die andere Fläche der zweiten Richtung parallel zieht, das Product der Abschnitte auf der einen Geraden und das Product der Abschnitte auf der andern Geraden, welche Abschnitte einerseits von dem Punkte P und andererseits respective von den Flächen begrenzt werden, in einem gegebenen Verhältnisse stehen.**

Es seyen

$$N_1 = 0 \quad \text{und} \quad N_2 = 0$$

die Gleichungen der gegebenen Flächen in rechtwinkligen Coordinaten. Bezeichnen wir die Aggregate der Glieder von n Dimensionen respective durch A_1 und A_2, die constanten Glieder durch C_1 und C_2, endlich die Aggregate aller übrigen Glieder durch B_1 und B_2, so ist

$$\begin{aligned} N_1 &\equiv A_1 + B_1 + C_1 = 0 \\ N_2 &\equiv A_2 + B_2 + C_2 = 0 \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Sind x', y', z' die Coordinaten des Punktes P, und setzen wir $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ respective für x, y, z, so verwandeln sich die Gleichungen (6) in

$$\begin{aligned} A_1 + D_1 + N'_1 &= 0 \\ A_2 + D_2 + N'_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

wo D_1, D_2 die Aggregate aller Glieder bezeichnen, welche in Beziehung auf x, y und z von der 1sten, 2ten ...(n—2)ten und (n—1)ten Dimension sind, N'_1, N'_2 aber diejenigen Ausdrücke bedeuten, welche aus N_1, N_2 durch bloße Substitution von x', y', z' für x, y, z hervorgehen. Transformiren wir die Gleichungen (7) indem wir

$$x = u\cos\alpha \quad ; \quad y = u\cos\beta \quad ; \quad z = u\cos\gamma$$

setzen, so kommt

$$\begin{aligned} Q_1u^n + R_1 + N'_1 &= 0 \quad , \\ Q_2u^n + R_2 + N'_2 &= 0 \quad , \end{aligned} \qquad (8)$$

worin R_1, R_2 die Aggregate aller Glieder bezeichnen, welche in Beziehung auf u von der ersten bis (n—1)ten Dimension sind, Q_1, Q_2 aber Ausdrücke bedeuten, die nicht u sondern nur α, β, γ enthalten und die blos aus den Aggregaten A_1, A_2 hervorgegangen sind. Aus einer jeden dieser Gleichungen erhält u eine Anzahl von n Werthen, deren Producte bekanntermaßen

$$\pm\frac{N'_1}{Q_1} \quad \text{und} \quad \pm\frac{N'_2}{Q_2}$$

sind. Legen wir den Größen α, β, γ in diesen beiden Ausdrücken respective diejenigen Werthe bei, welche die in der Aufgabe genannten Richtungen bestimmen, und nennen das gegebene Verhältniß $1:\lambda$, so haben wir, in Folge der Bedingung der Aufgabe,

$$\frac{N'_1}{Q_1} = \lambda\frac{N'_2}{Q_2} \quad \text{oder} \quad Q_2N'_1 - \lambda Q_1N'_2 = 0 \quad .$$

Es enthalten Q_1 und Q_2 nicht x', y', z' sondern nur α, β, γ, welchen Größen constante Werthe beigelegt worden sind, und N'_1, N'_2 gehen wieder in N_1, N_2 über, wenn wir die, jetzt nicht mehr nöthigen Accente von x', y', z' weglassen, so daß, wenn wir die Constante $\frac{\lambda Q_1}{Q_2}$ durch $-\mu$ bezeichnen,

$$N_1 + \mu N_2 = 0 \qquad (9)$$

hervorgehet, welches die Gleichung des gesuchten Ortes ist. Dieser Ort ist demnach eine Fläche nten Grades, welche die Durchschnittscurve der beiden gegebenen Flächen $N_1 = 0$, $N_2 = 0$ enthält (§. 78).

Nachdem wir diese Aufgabe gelöst haben, wollen wir drei Flächen nten Grades betrachten, welche sich in einer und derselben Curve schneiden. Sind

$$N_1 = 0 \quad \text{und} \quad N_2 = 0$$

die Gleichungen von zwei dieser Flächen, so kann die dritte immer durch die Gleichung

§. 83. genden Punkten des Systems (Σ) eben so viele Punkte des Systems (S) entsprechen, die, im Allgemeinen, nicht in gerader Linie liegen; es wird somit einer Geraden nicht eine Gerade und auch einer Ebene nicht eine Ebene entsprechen.

Der Kürze wegen wollen wir die Zähler in den Ausdrücken (1) durch A, B, C, und die Nenner durch A_1, B_1, C_1 bezeichnen. Ist

$$cv + bu + at + 1 = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung irgend einer Ebene im Systeme (S), so entspricht ihr im Systeme (Σ) eine Fläche, deren Gleichung

$$c\frac{C}{C_1} + b\frac{B}{B_1} + a\frac{A}{A_1} + 1 = 0 \quad ,$$

oder, nachdem die Nenner fortgeschafft sind,

$$cA_1B_1C + bA_1BC_1 + aAB_1C_1 + A_1B_1C_1 = 0 \quad , \qquad (3)$$

ist. Diese Fläche ist im Allgemeinen, wie wir sehen, vom dritten Grade. Einer Ebene im Systeme (S) entspricht daher, im Allgemeinen, eine Fläche dritten Grades im Systeme (Σ). Welches nun auch die Ebene (2) seyn mag, d. i. welche Werthe die Constanten a, b, c auch haben mögen, so enthält die Fläche (3) immer sechs feste gerade Linien; denn die Gleichung (3) wird befriedigt, wenn

1stens $A = 0$ und $A_1 = 0$, oder 2tens $B = 0$ und $B_1 = 0$,
oder 3tens $C = 0$ und $C_1 = 0$, oder 4tens $A_1 = 0$ und $B_1 = 0$,
oder 5tens $A_1 = 0$ und $C_1 = 0$, oder 6tens $B_1 = 0$ und $C_1 = 0$,

welche sechs Gleichungssysteme sechs gerade Linien ausdrücken, von denen drei sich in einem Punkte schneiden, und drei mal drei in einer Ebene liegen.

In dem besondern Falle, in welchem die Ebene (2) einer Coordinatenachse, z. B. der Achse der v, parallel ist und also

$$bu + at + 1 = 0 \qquad (4)$$

zur Gleichung hat, entspricht ihr eine Fläche, deren Gleichung

$$b\frac{B}{B_1} + a\frac{A}{A_1} + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad bA_1B + aAB_1 + A_1B_1 = 0, \qquad (5)$$

und welche also vom zweiten Grade ist. — Auf gleiche Weise entspricht einer, der Achse der u parallelen Ebene

$$c'v + a't + 1 = 0 \qquad (6)$$

die Fläche zweiten Grades

$$c'A_1C + a'AC_1 + A_1C_1 = 0 \quad ; \qquad (7)$$

und einer, der Achse der t parallelen Ebene

$$c''v + b''t + 1 = 0 \qquad (8)$$ §. 83.

die Fläche zweiten Grades

$$c''B_1C + b''BC_1 + B_1C_1 = 0 \quad . \qquad (9)$$

Die Fläche (5) enthält, was auch a und b seyn mögen, die drei Geraden, welche respective durch die drei Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = 0 \\ B_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ A_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} B = 0 \\ B_1 = 0 \end{array}\right\}$$

ausgedrückt sind.

Die Fläche (7) enthält die drei Geraden

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = 0 \\ C_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ A_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} C = 0 \\ C_1 = 0 \end{array}\right\} .$$

Die Fläche (9) enthält die drei Geraden

$$\left\{\begin{array}{l} B_1 = 0 \\ C_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} B = 0 \\ B_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} C = 0 \\ C_1 = 0 \end{array}\right\}$$

In demjenigen besondern Falle, in welchem die Ebene (2) durch eine der Coordinatenachsen, z. B. durch die Achse der v gehet und also

$$u = gt \qquad (10)$$

zur Gleichung hat, entspricht ihr eine Fläche

$$\frac{B}{B_1} = g\frac{A}{A_1} \quad \text{oder} \quad A_1B = gAB_1 \quad , \qquad (11)$$

welche somit vom zweiten Grade ist, und, was auch g seyn mag, die vier Geraden

$$\left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ A_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} B = 0 \\ B_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} A_1 = 0 \\ B_1 = 0 \end{array}\right\}$$

enthält. — Auf gleiche Weise entspricht einer, durch die Achse der u gehenden Ebene

$$v = ht \qquad (12)$$

die Fläche zweiten Grades

$$A_1C = hAC_1 \quad , \qquad (13)$$

welche durch die vier Geraden

$$\left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ A_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} C = 0 \\ C_1 = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} A_1 = 0 \\ C_1 = 0 \end{array}\right\}$$

gehet; und einer, durch die Achse der t gehenden Ebene

$$v = ku \qquad (14)$$

die Fläche zweiten Grades

$$B_1C = kBC_1 \quad , \qquad (15)$$

§. 83. welche die vier Geraden

$$\left\{\begin{matrix} B = 0 \\ B_1 = 0 \end{matrix}\right\} ; \left\{\begin{matrix} C = 0 \\ C_1 = 0 \end{matrix}\right\} ; \left\{\begin{matrix} B = 0 \\ C = 0 \end{matrix}\right\} ; \left\{\begin{matrix} B_1 = 0 \\ C_1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

enthält.

In demjenigen besondern Falle aber, in welchem die Ebene (2) einer Coordinatenebene, z. B. der Ebene der tu parallel ist, und also

$$v = \gamma$$

zur Gleichung hat, entspricht ihr eine Ebene, welche durch die Gleichung

$$C = \chi C_1$$

dargestellt ist, und die, was auch γ seyn mag, durch die Gerade

$$\{ C = 0 \;\; ; \;\; C_1 = 0 \}$$

geht. — Auf gleiche Weise entspricht einer, der Ebene der tv parallelen Ebene

$$u = \beta$$

eine Ebene

$$B = \beta B_1$$

welche durch die Gerade

$$\{ B = 0 \;\; ; \;\; B_1 = 0 \}$$

geht; und einer, der Ebene der uv parallelen Ebene

$$t = \alpha$$

eine Ebene

$$A = \alpha A_1$$

welche die Gerade

$$\{ A = 0 \;\; ; \;\; A_1 = 0 \}$$

enthält.

Den drei Coordinatenebenen $t = 0$; $u = 0$; $v = 0$ entsprechen respective die drei Ebenen $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$.

Zweien Ebenen E, E', deren Gleichungen

$$cv + bu + at + 1 = 0 \quad ; \quad c'v + b'u + a't + 1 = 0 \quad (16)$$

sind, entsprechen, nach dem vorher Gezeigten, zwei Flächen dritten Grades, welche sich in den, vorher angegebenen sechs Geraden und außerdem in einer Curve λ schneiden, die im Allgemeinen von doppelter Krümmung, und deren Projectionen im Allgemeinen vom dritten Grade seyn werden. Denn diese beiden Flächen schneiden sich als Flächen dritten Grades in einer Linie, deren Projectionen vom neunten Grade sind; da aber die genannten sechs Geraden in der Projection wiederum sechs Gerade geben, so besteht die Pro-

jection der Durchschnittscurve aus diesen letzten sechs Geraden und aus einer Linie dritten Grades. Der Durchschnittslinie l der beiden Ebenen, E, E′, entspricht offenbar jene Curve λ.

Diese Curve λ läßt sich jedesmal auch als Durchschnittscurve zweier geradlinigen Flächen zweiten Grades construiren. Denn drücken wir die Durchschnittslinie l der beiden Ebenen E, E′ durch zwei ihrer Projectionen aus, indem wir nach einander u und t zwischen den Gleichungen (16) eliminiren, so haben wir

$$(cb' - bc')v + (ab' - ba')t + (b' - b) = 0 \quad ,$$
$$(ac' - ca')v + (ab' - ba')u + (a - a') = 0 \quad ,$$

oder kürzer

$$\alpha v + \gamma t + h = 0 \quad ,$$
$$\beta v + \gamma u + k = 0 \quad .$$

Diesen projicirenden Ebenen entsprechen, nach dem vorher Gezeigten, die beiden Flächen zweiten Grades:

$$\alpha A_1 C + \gamma A C_1 + h A_1 C_1 = 0 \quad ,$$
$$\beta B_1 C + \gamma B C_1 + k B_1 C_1 = 0 \quad ;$$

und diese Flächen schneiden sich in der Geraden

$$\left\{ \; C = 0 \quad ; \quad C_1 = 0 \; \right\}$$

und in der Curve λ.

Ist die Durchschnittslinie l der beiden Ebenen E und E′ einer der Coordinatenebenen, z. B. der Ebene der tu parallel, so sind ihre Projectionen durch

$$v = \gamma \quad \text{und} \quad \beta u + \alpha t + 1 = 0$$

darzustellen, und diesen projicirenden Ebenen entsprechen die Flächen

$$C = \gamma C_1 \quad \text{und} \quad \beta A_1 B + \alpha A B_1 + A_1 B_1 = 0 \quad ,$$

von welchen die erste eine Ebene darstellt; die der Geraden l entsprechende Curve λ ist daher in diesem Falle eine ebene Curve und zwar eine Linie zweiten Grades.

Ist die Durchschnittslinie l der beiden Ebenen E und E′ einer der Coordinatenachsen, z. B. der Achse der v parallel, so sind ihre Projectionen durch

$$u = \beta \quad \text{und} \quad t = \alpha,$$

auszudrücken, und den projicirenden Ebenen entsprechen die Ebenen

$$B = \beta B_1 \quad \text{und} \quad A = \alpha A_1 \quad ,$$

deren Durchschnitt λ eine gerade Linie ist.

§. 83. Wir überlassen es dem Leser, die hier erhaltenen Resultate noch einmal zusammen zu fassen, und wenden uns zu einer allgemeinern Verwandtschaft, von welcher die im gegenwärtigen §. aufgestellte ein besonderer Fall ist.

§. 84.

Es seyen x, y, z die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines Systems von Punkten (Σ), und t, u, v die, auf dieselben oder auf andere Achsen bezogenen Coordinaten eines Systems (S). Die Punkte beider Systeme seyen durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(a_1z+b_1y+c_1x+d_1)v+(a'_1z+b'_1y+c'_1x+d'_1)u\\ +(a''_1z+b''_1y+c''_1x+d''_1)t+a'''_1z+b'''_1y+c'''_1x+1\end{array}\right\}=0\\ \left.\begin{array}{l}(a_2z+b_2y+c_2x+d_2)v+(a'_2z+b'_2y+c'_2x+d'_2)u\\ +(a''_2z+b''_2y+c''_2x+d''_2)t+a'''_2z+b'''_2y+c'''_2x+1\end{array}\right\}=0\\ \left.\begin{array}{l}(a_3z+b_3y+c_3x+d_3)v+(a'_3z+b'_3y+c'_3x+d'_3)u\\ +(a''_3z+b''_3y+c''_3x+d''_3)t+a'''_3z+b'''_3y+c'''_3x+1\end{array}\right\}=0\end{array}\right\} \quad (1)$$

auf einander bezogen, in welchen a, b 2c. 45 willkürliche Constanten bedeuten. Da diese Gleichungen sowohl in Beziehung auf x, y und z als in Beziehung auf t, u und v vom ersten Grade sind, so gehören zu bestimmten Werthen x', y', z' von x, y, z bestimmte und einfache Werthe t', u', v' von t, u, v, und umgekehrt. Es entspricht daher einem reellen Punkte α im System (Σ) ein reeller Punkt a im Systeme (S), und umgekehrt.

Bezeichnen wir die Gleichungen (1), der Kürze wegen, durch

$$\left.\begin{array}{l}A_1v+B_1u+C_1t+D_1=0\\ A_2v+B_2u+C_2t+D_2=0\\ A_3v+B_3u+C_3t+D_3=0\end{array}\right\}, \quad (2)$$

wo denn A_1, B_1, 2c. lineare Functionen von x, y, z bedeuten, so erhalten wir durch Entwicklung

$$t=\frac{M}{R} \;;\; u=\frac{N}{R} \;;\; v=\frac{Q}{R} \quad (3)$$

wenn wir nämlich

$$\begin{array}{l}A_1B_2D_3-A_1B_3D_2+A_2B_3D_1-A_2B_1D_3+A_3B_1D_2-A_3B_2D_1\equiv M\\ A_1C_3D_2-A_1C_2D_3+A_2C_1D_3-A_2C_3D_1+A_3C_2D_1-A_3C_1D_2\equiv N\\ B_1C_2D_3-B_1C_3D_2+B_2C_3D_1-B_2C_1D_3+B_3C_1D_2-B_3C_2D_1\equiv Q\\ A_1B_3C_2-A_1B_2C_3+A_2B_1C_3-A_2B_3C_1+A_3B_2C_1-A_3B_1C_2\equiv R\end{array}$$

setzen, so daß M, N, Q, R Functionen vom dritten Grade bedeuten. Wir bemerken nun zunächst Folgendes: Die Gleichungen

$$M=0 \;;\; N=0 \;;\; Q=0 \;;\; R=0$$

stellen vier Flächen dritten Grades dar, und diese vier Flächen gehen sämmtlich durch eine und dieselbe bestimmte Curve, deren Projectionen vom sechsten Grade sind. Um diese Behauptung zu erweisen, bringen wir zuvörderst die Gleichungen $M = 0$ und $N = 0$ auf die Formen

§. 84.

$$M \equiv (A_3D_2 - A_2D_3)B_1 + (A_1D_3 - A_3D_1)B_2 + (A_2D_1 - A_1D_2)B_3 = 0,$$
$$N \equiv -(A_3D_2 - A_2D_3)C_1 - (A_1D_3 - A_3D_1)C_2 - (A_2D_1 - A_1D_2)C_3 = 0,$$

und setzen zu gleicher Zeit

$$A_3D_2 - A_2D_3 = 0 \quad \text{und} \quad A_1D_3 - A_3D_1 = 0 \ .$$

Diese beiden letzten Gleichungen drücken zwei Flächen zweiten Grades aus, welche sich in der Durchschnittslinie, G, der beiden Ebenen

$$A_3 = 0 \quad , \quad D_3 = 0$$

schneiden. Da sich diese selbigen Flächen aber in einer Curve schneiden, deren Projectionen vom vierten Grade sind, so schneiden sie sich nicht nur in der Geraden G, sondern noch in einer Curve K, deren Projectionen vom dritten Grade seyn müssen. Für alle Punkte dieser Curve K ist nun zu gleicher Zeit

$$A_3D_2 - A_2D_3 = 0 \quad \text{und} \quad A_1D_3 - A_3D_1 = 0 \ ,$$

also

$$\frac{A_3}{D_3} = \frac{A_2}{D_2} \quad \text{und} \quad \frac{A_3}{D_3} = \frac{A_1}{D_1} \ ,$$

folglich auch

$$\frac{A_2}{D_2} = \frac{A_1}{D_1} \quad \text{oder} \quad A_2D_1 - A_1D_2 = 0 \ .$$

Für alle Punkte der Curve K werden somit die drei Glieder der Gleichung $M = 0$ und die drei Glieder der Gleichung $N = 0$ annullirt. Die beiden Flächen $M = 0$ und $N = 0$ schneiden sich also in der Curve K, deren Projectionen vom dritten Grade sind. Da aber die Projectionen ihrer Durchschnittscurve vom neunten Grade sind, so schneiden sie sich nicht nur in der Curve K, sondern noch in einer Curve L, deren Projectionen vom sechsten seyn müssen.

Multipliciren wir die Gleichung $M = 0$ mit $(C_1D_2 - C_2D_1)$, die Gleichung $N = 0$ mit $(B_1D_2 - B_2D_1)$, und addiren die Producte, so kommt

$$(C_1D_2 - C_2D_1)M + (B_1D_2 - B_2D_1)N = 0 \ ,$$

wodurch eine Fläche vom fünften Grade dargestellt wird, welche nothwendigerweise die Durchschnittscurve der beiden Flächen $M = 0$, $N = 0$ enthält. Setzen wir für M und N die von ihnen vertretenen Ausdrücke, und

§. 84. verrichten dann die angedeuteten Multiplicationen, so ergiebt sich, daß die Gleichung dieser Fläche fünften Grades in zwei Factoren, nämlich in

$$\left\{B_1C_2D_3-B_1C_3D_2+B_2C_3D_1-B_2C_1D_3+B_3C_1D_2-B_3C_2D_1\right\}\cdot\left\{A_2D_1-A_1D_2\right\}=0$$

oder, was dasselbe ist, in

$$Q\cdot\left\{A_2D_1-A_1D_2\right\}=0$$

zerfällt. Diese Fläche fünften Grades besteht daher aus der Fläche $Q=0$ und der Fläche $A_2D_1-A_1D_2=0$, von welchen die letztere, wie wir gezeigt haben, die Curve K enthält; es muß folglich die Fläche $Q=0$ die Curve L enthalten.

Multipliciren wir die Gleichung $M=0$ mit $(A_1C_2-A_2C_1)$, die Gleichung $N=0$ mit $(A_1B_2-A_2B_1)$, und addiren die Producte, so kommt

$$(A_1C_2-A_2C_1)M+(A_1B_2-A_2B_1)N=0\quad,$$

wodurch eine Fläche fünften Grades ausgedrückt wird, welche nothwendigerweise die Durchschnittscurve der beiden Flächen $M=0$ und $N=0$ enthält. Setzen wir für M und N die von ihnen vertretenen Ausdrücke, so ergiebt sich, daß die Gleichung dieser Fläche fünften Grades in zwei Factoren, nämlich in

$$R\cdot\left\{A_2D_1-A_1D_2\right\}=0$$

zerfällt. Diese Fläche fünften Grades besteht demnach aus der Fläche $R=0$ und der Fläche $A_2D_1-A_1D_2=0$, von welchen die letztere die Curve $K=0$ enthält; es muß folglich die Fläche $R=0$ die Curve $L=0$ enthalten.

Es enthalten also sämmtliche vier Flächen dritten Grades

$$M=0\quad;\quad N=0\quad;\quad Q=0\quad;\quad R=0$$

eine und dieselbe Curve L, deren Projectionen vom sechsten Grade sind, was wir behauptet haben.

Einer Ebene im Systeme (S), deren Gleichung

$$v+gu+ht+k=0 \tag{4}$$

seyn mag, entspricht im Systeme (Σ) eine Fläche, deren Gleichung

$$Q+gN+hM+kR=0\quad, \tag{5}$$

und welche folglich vom dritten Grade ist. Welche Werthe nun auch g, h und k haben mögen, so enthält die Fläche (5) immer die Curve L, weil die Coordinaten eines jeden Punktes dieser Curve die Functionen M, N, Q und R zu gleicher Zeit annulliren und also die Gleichung (5) befriedigen. Diese Curve L werden wir die Cardinalcurve des Systems (Σ) nennen.

Zweien Ebenen im Systeme (S) entsprechen zwei Flächen dritten Grades im Systeme (Σ), welche sich in der Cardinalcurve dieses Systems, und außerdem in einer zweiten Curve schneiden, die im Allgemeinen von doppelter Krümmung ist, und deren Projectionen vom dritten Grade sind. Der Durchschnittslinie l jener beiden Ebenen entspricht demnach die zweite Durchschnittscurve λ dieser beiden Flächen, deren Projectionen vom dritten Grade sind. §. 84.

Allen Ebenen im Systeme (S), welche einer und derselben Ebene parallel sind, entsprechen Flächen dritten Grades im Systeme (Σ), welche sich in der Cardinalcurve dieses Systems und in einer und derselben zweiten Curve λ' schneiden. Denn setzen wir in der Gleichung (4) g und h constant, k aber veränderlich, so drückt sie unendlich viele parallele Ebenen aus; die Gleichung (5) stellt aber unter derselben Annahme eine Unendlichkeit von Flächen dritten Grades dar, welche durch die Cardinalcurve und durch eine und dieselbe Curve λ' gehen, die die zweite Durchschnittscurve der beiden Flächen

$$Q + gN + hM = 0 \quad \text{und} \quad R = 0$$

ist. Alle diese zweiten Durchschnittscurven λ' der, parallelen Ebenen entsprechenden, Flächen dritten Grades bilden in ihrer Continuität eine Fläche dritten Grades, welche durch die Gleichung

$$R = 0$$

dargestellt wird. Diese Fläche $R = 0$ enthält demnach alle Punkte des Systems (Σ), welche unendlich entfernten Punkten des Systems (S) entsprechen, und umgekehrt entsprechen allen Punkten der Fläche $R = 0$ im Systeme (Σ) unendlich entfernte Punkte im Systeme (S), was auch schon daraus hervorgeht, daß, zufolge der Gleichungen (3), für $R = 0$ im Allgemeinen t, u, v gleich ∞ werden.

Ordnen wir die Gleichungen (1) nach z, y, x, und entwickeln diese Größen aus ihnen, so erhalten wir

$$x = \frac{M'}{R'} \quad ; \quad y = \frac{N'}{R'} \quad ; \quad z = \frac{Q'}{R'}$$

wo M', N', Q' und R' Functionen des dritten Grades von t, u, v sind. Auf gleiche Weise wie vorher läßt sich nun zeigen, daß jeder Ebene im Systeme (Σ) eine Fläche dritten Grades im Systeme (S) entspricht, und daß alle diese Flächen dritten Grades eine und dieselbe Curve L', die Cardinalcurve des Systems (S), enthalten, deren Projectionen vom sechsten Grade sind, und daß allen unendlich entfernten Punkten im Systeme (Σ)

§. 84. Punkte im Systeme (S) entsprechen, welche sämmtlich auf der Fläche $\mathfrak{P}' = 0$ liegen.

Die in dem vorigen §. dargestellte Art der Verwandtschaft zweier Systeme von Punkten ist offenbar in der hier betrachteten als ein specieller Fall enthalten. Denn setzen wir in den Gleichungen (2) die Constanten der linearen Functionen B_1, C_1, A_2, C_2, A_3 und B_3 gleich Null, so ziehen diese Gleichungen sich auf

$$A_1 v + D_1 = 0 \;;\; B_2 u + D_2 = 0 \;;\; C_3 t + D_3 = 0$$

zurück, woraus wir

$$v = -\frac{D_1}{A_1} \;;\; u = -\frac{D_2}{B_2} \;;\; t = -\frac{D_3}{C_3}$$

erhalten, welches Ausdrücke von der Form (1) des vorigen §. sind.

Es können aber die Constanten in den linearen Functionen A_1, B_1, ꝛc. auch so bestimmt werden, daß einer Ebene in dem einen der beiden Systeme eine Fläche zweiten Grades in dem andern Systeme entspricht.

§. 85.

Diese Art der Verwandtschaft erhalten wir z. B., wenn wir die eben genannten Constanten so bestimmen, daß die Gleichungen (1) des vorigen §. die Form

$$(az+by+cx+d)v+(a'z+b'y+c'x+d')u+(a''z+b''y+c''x+d'')t+a'''z+b'''y+c'''x+d''' = 0,$$
$$yv + zu = 0 \;,$$
$$xv + zt = 0 \;,$$

oder, indem wir die linearen Functionen von x, y, z, in der ersten Gleichung zur Abkürzung durch A, B, C und D bezeichnen, die Form

$$\left.\begin{aligned} Av + Bu + Ct + D &= 0 \\ yv + zu &= 0 \\ xv + zt &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

annehmen. Alsdann ergiebt sich durch Entwicklung

$$v = \frac{-Dz}{Az-By-Cx} \;;\; u = \frac{Dy}{Az-By-Cx} \;;\; t = \frac{Dx}{Az-By-Cx} \;; \quad (2)$$

und einer Ebene

$$v + gu + ht + k = 0 \quad (3)$$

in dem einen System entspricht eine Fläche in dem andern, deren Gleichung

$$D(z - gy - hx) = k(Az - By - Cx) \quad (4)$$

durch Substitution der Ausdrücke (2) in die Gleichung (3) hervorgehet.

Diese Fläche ist augenscheinlich vom zweiten Grade, da A, B, C und D Functionen vom ersten Grade sind. Sie enthält, welche Werthe g, h und k auch haben mögen, diejenige Linie zweiten Grades, in welcher die Ebene $D = 0$ die Fläche $Az - By - Cx = 0$ schneidet, und den Anfangspunkt der Coordinaten. §. 85.

Bei der in Rede stehenden Art der Verwandtschaft entspricht demnach einer Ebene des Systems (S) eine Fläche zweiten Grades im Systeme (Σ), und alle diese Flächen zweiten Grades enthalten eine feste Linie zweiten Grades, welche wir die Cardinalcurve des Systems (Σ) nennen werden, und einen festen Punkt, welcher der Cardinalpunkt des Systems (Σ) heißen mag. Es ist leicht einzusehen, daß auch jeder Ebene des Systems (Σ) eine Fläche zweiten Grades im Systeme (S) entspricht, welche durch eine feste Linie zweiten Grades und einen festen Punkt, durch die Cardinalcurve und den Cardinalpunkt des Systems (S), geht.

Verändern wir in der Gleichung (3) blos die Constante k, so drückt sie eine Reihe paralleler Ebenen aus. Die Gleichung (4) aber stellt unter derselben Annahme eine Reihe Flächen zweiten Grades dar, welche sämmtlich nicht nur die Cardinalcurve und den Cardinalpunkt, sondern auch eine zweite feste Linie zweiten Grades enthalten, diejenige nämlich in welcher die Fläche $Az - By - Cx = 0$ von der Ebene $z - gy - hx = 0$ geschnitten wird, und welche daher durch den Cardinalpunkt geht. Allen unendlich entfernten Punkten des Systems (S) entsprechen demnach nur Punkte des Systems (Σ), welche auf der Fläche $Az - By - Cx = 0$ liegen. Es wird also die Fläche zweiten Grades im Systeme (S), welche einer Ebene im Systeme (Σ) entspricht, sich ins Unendliche erstrecken, wenn diese Ebene die Fläche $Az - By - Cx = 0$ schneidet oder berührt, und jene Fläche wird in einem endlichen Raume enthalten seyn wenn diese Ebene mit der Fläche $Az - By - Cx = 0$ keinen Punkt gemein hat.

Zweien sich schneidenden Ebenen

$$v + gu + ht + k = 0 \quad ; \quad v + g'u + h't + k' = 0$$

entsprechen zwei Flächen zweiten Grades

$$D(z - gy - hx) = k(Az - By - Cx) \quad ;$$
$$D(z - g'y - h'x) = k'(Az - By - Cx) \quad ,$$

welche die Cardinalcurve und den Cardinalpunkt, und folglich noch eine zweite, durch den Cardinalpunkt gehende, Linie zweiten Grades mit einander

§. 85. gemein haben. Diese letzte Linie zweiten Grades ist es, welche der Durchschnittslinie jener beiden Ebenen entspricht.

Bei der in Rede stehenden Verwandtschaft entsprechen demnach geraden Linien des einen Systems Linien zweiten Grades in dem andern Systeme, welche sämmtlich durch den Cardinalpunkt dieses letztern gehen, und die Cardinalcurve desselben in zwei reellen oder imaginairen Punkten schneiden oder in einem Punkte berühren.

Einer Ebene im Systeme (S), welche durch dessen Cardinalpunkt geht, und deren Gleichung $v + gu + ht = 0$ ist, entspricht in dem Systeme (Σ) eine Ebene, deren Gleichung $z - gy - hx = 0$ ist, und welche also durch den Cardinalpunkt dieses letztern Systems geht. Den durch den Cardinalpunkt eines Systems gehenden Geraden entsprechen daher blos Gerade, welche durch den Cardinalpunkt des andern gehen.

Einer Fläche nten Grades in einem der beiden Systeme entspricht in dem andern eine Fläche, welche im Allgemeinen vom 2nten Grade ist, und welcher der Cardinalpunkt als vielfacher Punkt und die Cardinalcurve als vielfache Linie angehört. Namentlich entspricht einer Fläche zweiten Grades eine Fläche vom vierten Grade; geht jene Fläche zweiten Grades nur durch den Cardinalpunkt, nicht aber durch die Cardinalcurve ihres Systems, so reducirt sich diese Fläche vierten Grades auf eine Fläche vom dritten Grade; geht aber jene Fläche zweiten Grades durch die Cardinalcurve ohne den Cardinalpunkt zu enthalten, so reducirt sich dieselbe Fläche vierten Grades auf eine Fläche vom zweiten Grade, welche die Cardinalcurve, nicht aber den Cardinalpunkt in ihrem Systeme enthält. Alles dies ergiebt sich, wie man leicht einsehen wird, aus den Gleichungen (1) oder (2) unmittelbar.

Particularisiren wir die in Rede stehende Verwandtschaft dadurch, daß wir $a''' = b''' = c''' = d = d' = d'' = 0$ setzen, so enthält der erste Theil der Gleichung (4) keine Glieder zweiter Dimension, sondern diese Glieder sind sämmtlich in dem zweiten Theile befindlich, und das Verhältniß ihrer Coefficienten ist daher für alle Werthe von g, h und k ein und dasselbe. Daher sind alsdann alle Flächen (4), welche den Ebenen (3) entsprechen, homothetisch; und es entsprechen den Ebenen des einen Systems in dem andern Systeme Flächen zweiten Grades, welche homothetisch sind und den Cardinalpunkt dieses letztern Systems enthalten.

Particularisiren wir diese Verwandtschaft ferner, indem wir noch

$a = -b' = -c''$ und $b = c = a' = c' = a'' = b'' = 0$ setzen, wodurch
die Gleichungen (1), wenn wir $\frac{d'''}{a}$ durch $-r^2$ bezeichnen, in

$$zv - yu - xt = r^2 \quad ; \quad yv + zu = 0 \quad ; \quad xv + zt = 0 \quad (5)$$

übergehen, so ist

$$v = \frac{r^2 z}{z^2 + y^2 + x^2} \quad ; \quad u = -\frac{r^2 y}{z^2 + y^2 + x^2} \quad ; \quad t = -\frac{r^2 x}{z^2 + y^2 + x^2} \quad (6)$$

und einer Ebene

$$v + gu + ht + k = 0$$

entspricht eine Fläche, deren Gleichung

$$r^2(z - gy - hx) + k(z^2 + y^2 + x^2) = 0 \quad ,$$

und welche somit, wenn die Coordinaten, wie wir es annehmen wollen, rechtwinklig sind, eine durch den Anfangspunkt der x, y, z gehende Kugelfläche ist. Diese Kugelfläche degenerirt in eine Ebene wenn $k = 0$ ist, d. i. wenn die Ebene, welcher sie entspricht, durch den Anfangspunkt der t, u, v gehet.

Die Tangentialebene der Kugelfläche im Anfangspunkte der x, y, z hat zur Gleichung

$$z - gy - hx = 0 \quad ,$$

und ihre Lage ist folglich von dem Werthe von k unabhängig; daher entsprechen parallelen Ebenen Kugelflächen, welche sich im Anfangspunkte berühren.

Einer Kugelfläche, welche nicht durch den Anfangspunkt gehet, und deren Gleichung

$$v^2 + u^2 + t^2 + mv + nu + pt + q = 0$$

seyn mag, entspricht eine Fläche, als deren Gleichung wir

$$q(z^2 + y^2 + x^2) + r^2(mz - ny - px) + r^4 = 0$$

finden, und welche somit eine, nicht durch den Anfangspunkt gehende Kugelfläche ist.

Wir sehen hieraus, daß einer durch den Cardinalpunkt gehenden Geraden eine durch den Cardinalpunkt gehende Gerade, daß einer beliebigen Geraden ein durch den Cardinalpunkt gehender Kreis, und daß einem beliebigen Kreise ein nicht durch den Cardinalpunkt gehender Kreis entspricht.

Man wird leicht einsehen, daß, vermittelst der in diesem §. aufgestellten Verwandtschaft, Sätze von ebenen und geraden Linien im Raume auf Flä-

§. 85. chen und Linien zweiten Grades, und daß auch Sätze von Flächen zweiten Grades auf gewisse Flächen dritten und vierten Grades übertragen werden können. Nehmen wir, um nur ein Beispiel zu geben, in dem Systeme (S) die Fläche zweiten Grades

$$a^2v^2 + b^2u^2 + c^2t^2 = 1 \quad , \qquad (7)$$

so entspricht ihr im Systeme (Σ), wenn wir die Gleichungen (5) und (6) zum Grunde legen und in denselben $r = 1$ setzen, die Fläche vierten Grades, deren Gleichung

$$a^2z^2 + b^2y^2 + c^2x^2 = (z^2 + y^2 + x^2)^2 \quad , \qquad (8)$$

und die folglich die Fläche (3) des §. 82 (die Oberfläche der Elasticität) ist. Da nun die Fläche (7) von zwei Systemen paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten wird (§. 51), so wird auch die Fläche (8) von zwei Systemen, sich im Mittelpunkte der Fläche berührender Kugelflächen in Kreisen geschnitten. Die Ebenen dieser Kreislinien bestehen ebenfalls aus zwei Systemen, die respective durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \{a^2b^2c^2 - k^6\}\sqrt{a^2-b^2}\cdot z - \{a^2b^2c^2 + k^6\}\sqrt{b^2-c^2}\cdot x - acb^3k^3 = 0 \\ \{a^2b^2c^2 - k^6\}\sqrt{a^2-b^2}\cdot z + \{a^2b^2c^2 + k^6\}\sqrt{b^2-c^2}\cdot x + acb^3k^3 = 0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

ausgedrückt sind, in welchen Gleichungen k eine willkürliche Constante bedeutet. Diese Ebenen berühren eine und dieselbe Cylinderfläche zweiten Grades, deren Gleichung

$$(a^2-b^2)z^2 - (b^2-c^2)x^2 + \tfrac{1}{4}b^4 = 0 \qquad (10)$$

ist, so daß jede Tangentialebene der Fläche (10) die Fläche (8) in einem Kreise schneidet. Uebrigens sieht man leicht ein, daß die Fläche (8) auch durch unendlich viele, durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen in Kreisen geschnitten werden kann, wenn das Product $a^2b^2c^2$ einen negativen Werth hat, indem alsdann die durch die Gleichung (7) ausgedrückte Fläche ein hyperbolisches Hyperboloid ist, welches in geraden Linien geschnitten werden kann.

Wir setzen die Untersuchung der im §. 84 aufgestellten Verwandtschaft hier nicht weiter fort, und bemerken nur noch, daß nicht blos die in dem 83sten und in dem gegenwärtigen §. behandelten Verwandtschaften, eben so wie die Collineation, besondere Fälle jener allgemeineren Verwandtschaft sind, sondern daß auch die Reciprocität als ein specieller Fall derselben Verwandtschaft zu betrachten ist; denn setzen wir, daß die Constanten in den bei-

beiden letzten Gleichungen (1) des §. 84 denen in der ersten dieser Gleichungen gleich seyen, daß nämlich $a_3 = a_2 = a_1$, $b_3 = b_2 = b_1$, 2c., so fallen sämmtliche drei Gleichungen in eine einzige zusammen, und drücken alsdann die Reciprocität aus. Diese Bemerkung führt uns zu einer neuen Art der Beziehung zweier Systeme, indem wir nur die Constanten in den beiden letzten Gleichungen (1) des §. 84 einander gleich setzen, so daß $a_3 = a_2$, $b_3 = b_2$ 2c. ist, wodurch sich die drei Gleichungen (1) auf zwei Gleichungen reduciren, und alsdann einem Punkte des einen Systems eine Linie im andern Systeme entspricht *). §. 85.

*) Was wir in den beiden letzten §§. von der, in §. 84 aufgestellten allgemeinern Verwandtschaft und von einigen besondern Arten derselben beigebracht haben, enthält nur die ersten Grundzüge einer vollständigen Darstellung dieser Beziehungen. Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften überhaupt ist bis jetzt noch gar nicht bearbeitet. Eine solche Bearbeitung möchte vor allen Dingen eine bestimmte Classification der verschiedenen Arten der Verwandtschaft erheischen. Wir würden die durch die Gleichungen (1) des §. 84 dargestellte Verwandtschaft zur ersten Classe zählen, indem wir die Verwandtschaften nach dem Grade der Gleichungen, welche sie darstellen, in Classen theilen. Die allgemeine Verwandtschaft der zweiten Classe würde alsdann durch drei Gleichungen zwischen x, y, z und t, u, v dargestellt werden, welche in Beziehung auf diese Größen vom zweiten Grade sind, wobei sogleich einleuchtet, daß bei der Verwandtschaft zweiter Classe einem reellen Punkt nicht immer ein reeller Punkt, und also einer reellen Linie oder Fläche auch nicht immer eine reelle Linie oder Fläche entspricht. Die allgemeine Verwandtschaft der nten Classe würde durch drei Gleichungen vom nten Grade ausgedrückt seyn. Sind aber drei Gleichungen zwischen x, y, z und t, u, v sämmtlich oder zum Theil transscendent, so würden wir die Verwandtschaft, welche sie darstellen, transscendent nennen. — Geometrische Bestimmungen können die Stelle der oft genannten drei Gleichungen vertreten, welche Gleichungen alsdann aus jenen Bestimmungen hergeleitet werden können. Als Beispiel diene Folgendes:

I. In einem jeden von zwei Systemen (Σ) und (S) ist eine feste Ebene μ, m, und ein fester Punkt α, a gegeben. Beide Systeme sollen so verwandt seyn, daß die orthogonalen Projectionen jeder beliebigen Anzahl Punkte des Systems (Σ) auf die Ebene μ, und die orthogonalen Projectionen der entsprechenden Punkte des Systems (S) auf die Ebene m, zwei vollkommen gleiche ebene Systeme bilden, daß ferner die Entfernung ap eines jeden Punktes p im Systeme (S) das nfache der Entfernung $\alpha\pi$ des entsprechenden Punktes π im Systeme (Σ) sey. Nehmen wir die Coordinaten rechtwinklig und die Punkte α und a zu Anfangspunkten, die Ebenen μ und m aber respective zu Ebenen der xy und der tu, so haben wir auf der Stelle die drei Gleichungen

$$t = x \;;\; u = y \;;\; v^2 + u^2 + t^2 = n^2(z^2 + y^2 + x^2) .$$

Die Verwandtschaft gehört also zur zweiten Classe, und wenn wir entwickeln, kommt

$$\left\{ t = x \;;\; u = y \;;\; v = \pm \sqrt{n^2z^2 + (n^2 - 1)(y^2 + x^2)} \right\} ,$$

$$\left\{ x = t \;;\; y = u \;;\; z = \pm \frac{1}{n} \sqrt{v^2 + (1 - n^2)(u^2 + t^2)} \right\} .$$

§. 86.

Eine Fläche, deren auf rechtwinklige oder schiefwinklige Achsen bezogene Gleichung keine algebraische rationale ist und in keine solche verwandelt

---

Ist nun $n < 1$, so giebt es unendlich viele Punkte im Systeme (Σ), denen nur imaginaire Punkte im Systeme (S) entsprechen, weil alsdann der Ausdruck von v für unendlich viele Werthe von x, y, z imaginair wird. Ist aber $n > 1$, so giebt es unendlich viele Punkte im Systeme (S), denen nur imaginaire Punkte im Systeme (Σ) entsprechen, weil alsdann der Ausdruck von z für unendlich viele Werthe von t, u, v imaginair wird. Das eine oder das andere der beiden Systeme zerfällt demnach in zwei Theile, dem ersten Theile entsprechen reelle, dem zweiten entsprechen nur imaginaire Punkte. Die Grenze zwischen beiden Theilen bildet, wenn $n < 1$, im Systeme (Σ) eine Kegelfläche, deren Gleichung $z^2 = \frac{1-n^2}{n^2}(y^2+x^2)$, und, wenn $n > 1$, im Systeme (S) eine Kegelfläche, deren Gleichung $v^2 = (n^2-1)(u^2+t^2)$ ist.

II. In einem jeden von zwei Systemen (Σ) u. (S) ist eine feste Ebene μ, m, und auf derselben sind zwei Punkte α u. β, a u. b gegeben. Beide Systeme sollen so verwandt seyn, daß die senkrechten Entfernungen zweier einander entsprechenden Punkte π, p respective von den Ebenen μ, m, und daß auch die Projectionen der Verbindungslinien $\alpha\pi$, $\beta\pi$ auf die Ebene μ den Projectionen der Verbindungslinien ap, bp auf die Ebene m respective gleich sind. (Vergl. Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 12. S. 139.) Nehmen wir die Coordinaten rechtwinklig, die Halbirungspunkte von $\alpha\beta$ und ab zu Anfangspunkten, die Ebene μ und m zu Ebenen der xy und der tu, so haben wir, die Längen von $\alpha\beta$ und ab durch 2γ und 2c bezeichnend,

$$v = z \;;\; u^2+(t+c)^2 = y^2+(x+\gamma)^2 \;;\; u^2+(t-c)^2 = y^2+(x-\gamma)^2 \;.$$

Es gehört also auch diese Verwandtschaft zur zweiten Classe. Durch Entwicklung ergiebt sich

$$\left\{ v = z \;;\; u = \pm\sqrt{y^2+\frac{c^2-\gamma^2}{c^2}(x^2-c^2)} \;;\; t = \frac{\gamma}{c}x \right\}$$

$$\left\{ z = v \;;\; y = \pm\sqrt{u^2+\frac{\gamma^2-c^2}{\gamma^2}(t^2-\gamma^2)} \;;\; x = \frac{c}{\gamma}t \right\}$$

und es fällt nun in die Augen, daß es in einem jeden der beiden Systeme unendlich viele Punkte giebt, denen keine reellen Punkte entsprechen. Jedes der beiden Systeme zerfällt daher in zwei Theile; den Punkten des ersten Theiles entsprechen reelle, den Punkten des zweiten Theiles imaginaire Punkte. Die Grenze zwischen beiden Theilen ist in dem Systeme (Σ) eine Cylinderfläche, deren Gleichung $\frac{y^2}{c^2-\gamma^2}+\frac{x^2}{c^2} = 1$, und in dem Systeme (S) eine Cylinderfläche, deren Gleichung $\frac{u^2}{\gamma^2-c^2}+\frac{t^2}{\gamma^2} = 1$ ist. —

Wollte man eine Verwandtschaft von der zweiten oder einer höheren Classe zur Uebertragung von Sätzen anwenden, so wie wir es mit der Verwandtschaft der ersten Classe gethan haben, so würde eine besondere Rücksicht auf die imaginairen Punkte, Linien und Flächen zu nehmen seyn, welche reellen Punkten, Linien und Flächen entsprechen können.

werden kann, heißt eine transscendente. Eben so heißt eine Curve, wenn eine oder mehrere ihrer Projectionen transscendente Curven sind, eine transscendente Linie. §. 86.

Eine transscendente Fläche wird von einer Ebene im Allgemeinen in einer transscendenten Linie geschnitten. In besonderen Fällen kann diese Durchschnittslinie aber auch eine algebraische Curve seyn, und so kann es sich denn auch ereignen, daß die drei Hauptschnitte der Fläche, d. i. die drei Curven, in welchen die Coordinatenebenen die Fläche schneiden, algebraische Linien sind. Dies ist, wie wir leicht einsehen, der Fall, wenn die Gleichung der Fläche die Form

$$F(x, y, z) + \psi(x, y, z) = 0$$

hat, in welcher $F(x, y, z)$ eine algebraische Function von x, y und z bedeutet, die weder für $x = 0$, noch für $y = 0$, noch für $z = 0$ verschwindet, und $\psi(x, y, z)$ eine transscendente Function vorstellt, die sowohl für $x = 0$, als für $y = 0$, als für $z = 0$ verschwindet.

Zwei transscendente Flächen schneiden sich im Allgemeinen in einer transscendenten Linie von doppelter Krümmung; doch kann in besonderen Fällen die Durchschnittslinie solcher Flächen auch eine algebraische Curve seyn, was sich aus dem vorher Gesagten unmittelbar ergiebt.

Aufgabe [119]. **Eine Ebene E dreht sich um eine in ihr befindliche feste Gerade A; in dieser Ebene E bewegt sich eine Gerade ab von gegebener constanter Länge r so, daß sie fortwährend auf der Geraden A senkrecht bleibt, daß ihr Anfangspunkt a dieselbe Gerade A durchläuft, und daß die Wege, welche der Punkt a auf der Geraden A zurücklegt, den Winkeln proportional sind, welche die Ebene E bei ihrer Bewegung beschreibt. Es soll der Ort des Endpunktes b der Geraden ab gefunden werden.**

Wir nehmen die Gerade A zur Achse der z, und die Coordinaten rechtwinklig. Ist nun, wenn die Ebene E mit der Ebene der xz den Winkel α macht, die Entfernung des Punktes a vom Anfangspunkte der Coordinaten gleich c; ist ferner n diejenige constante, positive oder negative Zahl, mit welcher die von der Projection des Endpunktes b in der Ebene der xy beschriebenen Kreisbogen multiplicirt werden müssen, um den von dem Punkte a zurückgelegten Wegen gleich zu werden; so ist offenbar, wenn wir den veränderlichen Winkel, den die Ebene E mit der Ebene der xz macht, durch t, und die Coordinaten des Punktes b durch x, y, z bezeichnen,

$$z - c = nr(t - \alpha) \qquad (1)$$

§. 86. und zugleich

$$y = r\sin t \quad ; \quad x = r\cos t \quad , \qquad (2)$$

so daß wir, durch Elimination von t,

$$\left\{ y = r\sin\frac{z - c + nr\alpha}{nr} \quad ; \quad x = r\cos\frac{z - c + nr\alpha}{nr} \right\} \qquad (3)$$

erhalten, ein Gleichungssystem, welches diejenige Curve von doppelter Krümmung ausdrückt, welche der gesuchte Ort des Punktes b ist. Diese transscendente Curve heißt **Schraubenlinie** und die Gerade A die Achse derselben.

Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in denjenigen Punkt der Geraden A, dessen Ordinate $z' = c - nr\alpha$ ist, so verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$z = nrt \quad , \qquad (4)$$

und das Gleichungssystem (3) der Curve in

$$\left\{ y = r\sin\frac{z}{nr} \quad ; \quad x = r\cos\frac{z}{nr} \right\} . \qquad (5)$$

Bei den Untersuchungen der Eigenschaften der Schraubenlinie ist es oft vortheilhaft statt des Gleichungssystems (5) sich der Gleichungen

$$\left\{ z = nrt \quad ; \quad y = r\sin t \quad ; \quad x = r\cos t \right\} \qquad (6)$$

zu bedienen, und durch dieses, aus drei Gleichungen bestehende System (6) die Curve auszudrücken.

Daß die Schraubenlinie gänzlich auf einem geraden Kreiscylinder liegt, ist sowohl unmittelbar aus ihrer Erzeugung, als auch daraus klar, daß die Elimination von z zwischen den Gleichungen (5), oder die von t zwischen den beiden letzten Gleichungen (6) die Gleichung

$$y^2 + x^2 = r^2 \qquad (7)$$

giebt, welche die genannte Cylinderfläche darstellt.

Es ist gut besonders zu bemerken, daß das Gleichungssystem

$$\left\{ z = nr(t + \vartheta) \quad ; \quad y = r\sin t \quad ; \quad x = r\cos t \right\} , \qquad (8)$$

in welchem ϑ eine willkürliche Constante bedeutet, dieselbe Schraubenlinie als das Gleichungssystem (6) ausdrückt, welche sich aber, wenn nicht etwa ϑ ein Multiplum von 2π ist, an einer andern Stelle befindet. Eliminiren wir t zwischen diesen Gleichungen (8), so kommt

$$\left\{ y = r\sin\left(\frac{z}{nr} - \vartheta\right) \quad ; \quad x = r\cos\left(\frac{z}{nr} - \vartheta\right) \right\} , \qquad (9)$$

oder, was dasselbe ist, §. 86.

$$\left\{ y = r\left[\cos\vartheta \sin\frac{z}{nr} - \sin\vartheta \cos\frac{z}{nr}\right] \; ; \; x = r\left[\cos\vartheta \cos\frac{z}{nr} + \sin\vartheta \sin\frac{z}{nr}\right] \right\} . \quad (10)$$

Es drückt also auch dieses Gleichungssystem (10) eine der Curve (5) vollkommen-gleiche, aber an einer andern Stelle befindliche Schraubenlinie aus. Setzen wir, nach der Reihe, ϑ gleich 0, $\frac{1}{2}\pi$, π und $\frac{3}{2}\pi$, so erhalten wir aus (10)

$$\left.\begin{array}{l} \left\{ y = +r\sin\frac{z}{nr} \; ; \; x = +r\cos\frac{z}{nr} \right\} \\ \left\{ y = -r\cos\frac{z}{nr} \; ; \; x = +r\sin\frac{z}{nr} \right\} \\ \left\{ y = -r\sin\frac{z}{nr} \; ; \; x = -r\cos\frac{z}{nr} \right\} \\ \left\{ y = +r\cos\frac{z}{nr} \; ; \; x = -r\sin\frac{z}{nr} \right\} \end{array}\right\} , \quad (11)$$

vier Gleichungssysteme, welche dieselbe Schraubenlinie (5) in vier verschiedenen Lagen ausdrücken.

Wenn wir der Größe n einen veränderten Werth beilegen, so erhalten wir offenbar eine andere Schraubenlinie. Setzen wir namentlich $-n$ für n, was darauf hinausläuft, daß wir die Richtung des Weges, welchen der Punkt a auf der Geraden A durchläuft, der Richtung, welche wir vorher für seine Bewegung angenommen hatten, entgegengesetzt annehmen; so erhalten wir eine der vorigen symmetrisch-gleiche Schraubenlinie, welche durch das Gleichungssystem

$$\left\{ z = -nrt \; ; \; y = r\sin t \; ; \; x = r\cos t \right\} , \quad (12)$$

das an die Stelle des Systems (6) tritt, oder auch durch eins der vier Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{l} \left\{ y = -r\sin\frac{z}{nr} \; ; \; x = +r\cos\frac{z}{nr} \right\} \\ \left\{ y = -r\cos\frac{z}{nr} \; ; \; x = -r\sin\frac{z}{nr} \right\} \\ \left\{ y = +r\sin\frac{z}{nr} \; ; \; x = -r\cos\frac{z}{nr} \right\} \\ \left\{ y = +r\cos\frac{z}{nr} \; ; \; x = +r\sin\frac{z}{nr} \right\} \end{array}\right\} , \quad (13)$$

die an die Stelle der Systeme (11) treten, ausgedrückt wird.

§. 86. Eine der beiden Gleichungen (5) und die Gleichung (7), also z. B. das Gleichungssystem

$$\left\{ y = r \sin \frac{z}{nr} \quad ; \quad y^2 + x^2 = r^2 \right\} \qquad (14)$$

drückt nicht allein die Schraubenlinie (6), sondern zugleich auch die Schraubenlinie (12) aus. Denn die Elimination von y zwischen den Gleichungen (14) giebt eben sowohl $x = + r \cos \frac{z}{nr}$ als $x = - r \cos \frac{z}{nr}$, welcher letztere Ausdruck mit dem dritten Gleichungssysteme (13) übereinstimmt (Vergl. §. 78).

Anders verhält es sich mit dem Gleichungssysteme

$$\left\{ \frac{y}{x} = + tg \frac{z}{nr} \quad ; \quad y^2 + x^2 = r^2 \right\}, \qquad (14')$$

welches zwei vollkommen gleiche Schraubenlinien (6), und mit dem Gleichungssysteme

$$\left\{ \frac{y}{x} = - tg \frac{z}{nr} \quad ; \quad y^2 + x^2 = r^2 \right\}, \qquad (14'')$$

welches zwei vollkommen gleiche Schraubenlinien (12) ausdrückt.

Legen wir dem t in den Gleichungen (6) und (12) zwei verschiedene Werthe t_1 und t_2 bei, welche um 2π von einander differiren, und bezeichnen die zugehörenden Werthe von x, y, z respective durch x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2, so haben wir

$$z_2 - z_1 = \pm nr(t_2 - t_1) = \pm 2nr\pi \quad ; \quad y_2 = y_1 \quad ; \quad x_2 = x_1 \ .$$

Ein Stück der Schraubenlinie, dessen Endpunkte dieselben Abscissen x, y und um $2nr\pi$ differirende Ordinaten z_1, z_2 haben, heißt ein **Schraubengang**; die constante Differenz der Ordinaten, $2nr\pi$, heißt die **Weite des Schraubenganges**.

Aufgabe [120]. Eine Ebene E dreht sich um eine in ihr befindliche Gerade A; in dieser Ebene E bewegt sich eine Gerade g so, daß sie fortwährend auf der Geraden A senkrecht bleibt, daß ein bestimmter Punkt a derselben die Gerade A durchläuft, und daß die von dem Punkte a zurückgelegten Wege den von der Ebene E zurückgelegten Winkeln proportional sind; auf der Geraden g bewegt sich aber ein Punkt p so, daß die Stücke ap denselben eben genannten Winkeln proportional sind. Es soll der Ort des Punktes p gefunden werden.

Wir nehmen die Gerade A zur Achse der z, die Gerade g in derjenigen Lage, welche sie im Anfange der Bewegung hat, zur Achse der x, die

Achse der y aber auf jenen beiden senkrecht, und nennen den Anfangspunkt der Coordinaten O. Ist nun t der veränderliche Winkel, welchen die Ebene E beschreibt, so ist die Länge von Oa = nrt, wo n eine constante Zahl und r eine constante Länge bedeutet, und ferner ist, wenn wir ap durch u bezeichnen, u = μrt, wo μ eine ebenfalls constante Zahl vorstellt. Die Coordinaten des Punktes p aber sind augenscheinlich

$$z = nrt \quad ; \quad y = u\sin t \quad ; \quad x = u\cos t \quad ,$$

und daher ist

$$\left\{ z = nrt \quad ; \quad y = \mu rt\sin t \quad ; \quad x = \mu rt\cos t \right\} \quad , \qquad (15)$$

woraus wir, durch Elimination von t,

$$\left\{ y = \frac{\mu z}{n}\sin\frac{z}{nr} \quad ; \quad x = \frac{\mu z}{n}\cos\frac{z}{nr} \right\} \qquad (16)$$

erhalten. Sowohl das Gleichungssystem (15) als das Gleichungssystem (16) drückt die Curve doppelter Krümmung aus, welche der gesuchte Ort des Punktes p ist. Aus den beiden Gleichungen (16) erhalten wir, wenn wir quadriren und addiren,

$$y^2 + x^2 = \frac{\mu^2}{n^2}z^2 \quad , \qquad (17)$$

welches die Gleichung eines Rotationskegels ist. Die Curve (16) liegt also auf der Fläche eines Rotationskegels, was auch von vorn herein klar ist. Die Gleichungen (16) geben, durch Division, $\frac{y}{x} = tang\,\frac{z}{nr}$, woraus wir, vermittelst der Gleichung (17),

$$\frac{y}{x} = tang\,\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{\mu r} \qquad (18)$$

als Gleichung der Projection des gefundenen Ortes auf die Ebene der xy erhalten. Setzen wir in (18), um zu Polarcoordinaten überzugehen, $\frac{y}{x} = tg\,t$ und $y^2 + x^2 = u^2$, so kommt

$$u = \mu rt \quad . \qquad (19)$$

Die genannte Projection ist also eine archimedische Spirale (I. §. 68), was ebenfalls leicht vorherzusehen war.

Wir gehen jetzt zu folgender etwas allgemeineren

Aufgabe [121]. Eine Ebene E dreht sich um eine in ihr befindliche Gerade A; in dieser Ebene E bewegt sich eine Gerade g so, daß

§. 86. sie fortwährend auf der Geraden A senkrecht bleibt, daß ein bestimmter Punkt a derselben die Gerade A durchläuft, und daß der von dem Punkte a zurückgelegte Weg eine gegebene Function des von der Ebene E beschriebenen Winkels ist; auf der Geraden g bewegt sich zugleich ein Punkt p so, daß das Stück ap eine ebenfalls gegebene Function des eben genannten Winkels ist. Es soll der Ort des Punktes p gefunden werden.

Wir nehmen die Coordinatenachsen wie in der Lösung der vorigen Aufgabe an, und bezeichnen ap durch u. Dann ist, in Folge der Voraussetzungen,

$$z = \varphi(t) \quad ; \quad u = \psi(t) \quad ; \quad y = u\,sin\,t \quad ; \quad x = u\,cos\,t \quad ,$$

wo φ und ψ gegebene Functionen bedeuten. Eliminiren wir u, so kommt

$$\Big\{ \; z = \varphi(t) \quad ; \quad y = \psi(t) sin\,t \quad ; \quad x = \psi(t) cos\,t \; \Big\} \quad , \qquad (20)$$

ein System von drei Gleichungen, welches den Ort des Punktes p darstellt, und aus welchem, wenn wir die inverse Function von φ mit f und $\psi(f(z))$ mit F(z) bezeichnen, durch Elimination von t, sich unmittelbar

$$\Big\{ \; y = F(z) \cdot sin\,f(z) \quad ; \quad x = F(z) \cdot cos\,f(z) \; \Big\} \qquad (21)$$

ergeben, zwei Gleichungen, welche die Projectionen der Ortscurve auf die Ebene der yz und der xz ausdrücken. — Dividiren wir die zweite Gleichung (20) durch die dritte, so kommt $\frac{y}{x} = tang\,t$, und daraus sodann

$$z = \varphi\left[arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)\right] \quad ; \qquad (22)$$

quadriren und addiren wir aber die beiden Gleichungen (21), so erhalten wir

$$y^2 + x^2 = \{F(z)\}^2 \quad , \qquad (23)$$

und hieraus durch Elimination von z, vermittelst der Gleichung (22),

$$y^2 + x^2 = \left\{F\left(\varphi\left[arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)\right]\right\}^2 \quad , \qquad (24)$$

oder, was dasselbe,

$$y^2 + x^2 = \left\{\psi\left[arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)\right]\right\}^2 \quad , \qquad (25)$$

welches die Gleichung der Projection der Curve (20) auf die Ebene der xy ist. — Von der Bedeutung der allgemeinen Gleichung (23) wird später (in §. 96) die Rede seyn. —

In allen Fällen, in welchen $\psi(t) = n\varphi(t)$ und n eine Constante ist, gehen die Gleichungen (20) in

$$\left\{ z = \varphi(t) \;\; ; \;\; y = n\varphi(t) sin t \;\; ; \;\; x = n\varphi(t) cos t \right\} \quad (26)$$ §. 86.

über. Dann ist

$$\left\{ y = nz \cdot sin f(z) \;\; ; \;\; x = nz \cdot cos f(z) \right\} , \quad (27)$$

woraus

$$y^2 + x^2 = n^2 z^2 \;, \quad (28)$$

und dann liegt die in Rede stehende Curve immer auf der Fläche (28) d. i. auf einem Rotationskegel. Ist z. B.

$$\varphi(t) = re^{\frac{t}{m}} \quad \text{und} \quad \psi(t) = nre^{\frac{t}{m}} \;,$$

so haben wir

$$\left\{ z = re^{\frac{t}{m}} \;\; ; \;\; y = nre^{\frac{t}{m}} sin t \;\; ; \;\; x = nre^{\frac{t}{m}} cos t \right\} , \quad (29)$$

woraus

$$\left\{ y = nz\,sin\left[m\,log\,\frac{z}{r}\right] \;\; ; \;\; x = nz\,cos\left[m\,log\,\frac{z}{r}\right] \right\} . \quad (30)$$

Durch Division erhalten wir aus diesen Gleichungen (30)

$$\frac{y}{x} = tang\left[m\,log\,\frac{z}{r}\right] \quad \text{oder} \quad z = re^{\frac{1}{m}\,arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)} \;; \quad (31)$$

und durch das Quadriren derselben Gleichungen

$$y^2 + x^2 = n^2 z^2 \;,$$

also vermittelst der Gleichung (31)

$$y^2 + x^2 = n^2 \left\{ re^{\frac{1}{m}\,arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)} \right\}^2$$

oder, wenn wir zu den Polarcoordinaten t, u übergehen,

$$u = nre^{\frac{t}{m}} \;, \quad (32)$$

woraus wir sehen, daß die Projection der Ortscurve auf die Ebene der xy, in diesem Falle, eine logarithmische Spirale ist.

In allen Fällen, in welchen $[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2 = R^2$ und R eine Constante ist, haben wir, indem wir die Gleichungen (20) quadriren und addiren,

$$z^2 + y^2 + x^2 = R^2 \;,$$

und dann ist der in Rede stehende Ort eine sphärische Curve.

Von der Erzeugung der Flächen durch Curven.

§. 87.

Wenn eine Curve von einfacher oder doppelter Krümmung sich im

§. 87. Raume bewegt, und dabei ihre Gestalt behält oder continuirlich ändert, so erzeugt sie eine Fläche.

Was den Fall betrifft, in welchem die sich bewegende Curve ihre Gestalt behält, so bemerken wir zunächst, daß die Lage dieser Curve von sechs Constanten abhängt, was unmittelbar aus dem bei der Transformation der Coordinaten Beigebrachten folgt. Sind beliebige fünf dieser Größen Functionen der sechsten, oder, was dasselbe ist, existiren fünf Bedingungsgleichungen zwischen diesen sechs Größen, so ist die, durch die Curve zu erzeugende Fläche, im Allgemeinen, völlig bestimmt. Nun liefert die Bedingung, daß eine erzeugende Curve A eine andere gegebene feste Curve M schneide, eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der Gleichungen der Curve A, welche Bedingungsgleichung wir dadurch erhalten, daß wir zwischen den beiden Gleichungen der Curve A und den beiden Gleichungen der Curve M die drei Coordinaten x, y und z eliminiren. Es folgt also, daß die durch die Curve A zu erzeugende Fläche, im Allgemeinen, völlig bestimmt ist, wenn fünf Curven M_1, M_2, ... M_5 gegeben sind, welche die Bewegung der Curve A dirigiren.

In dem besondern Falle, in welchem die erzeugende Curve A ein Kreis von gegebener Größe ist, hängt ihre Lage nicht von sechs sondern nur von fünf Constanten ab, und alsdann ist die zu erzeugende Fläche durch vier dirigirende Curven bestimmt.

Ist ferner die erzeugende Linie A eine Gerade, so ist die zu erzeugende geradlinige Fläche (§. 29) durch drei dirigirende Curven bestimmt. Ein Beispiel dieses Falles bietet die, in §. 54 (Aufg. 82) vorgelegte Erzeugung des hyperbolischen Hyperboloids dar.

Aufgabe [122]. Zwei gleiche Kreise C, C', welche in parallelen Ebenen so liegen, daß die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht auf diesen Ebenen steht, sind gegeben, und durch den Halbirungspunkt dieser Verbindungslinie geht eine feste Gerade G den beiden Kreisebenen parallel. Eine Gerade L bewegt sich so, daß sie fortwährend die beiden Kreislinien C, C' und die Gerade G schneidet. Es soll die Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die genannte Verbindungslinie der Mittelpunkte zur Achse der x, die Gerade G zur Achse der z und auf diesen beiden Linien die Achse der y senkrecht. Wenn nun die Länge der Verbindungslinie gleich 2a und der Radius der Kreise gleich r ist, so sind

die Gleichungen der Geraden G $\left\{ x = 0 \ ; \ y = 0 \right\}$, (1)

die Gleichungen des Kreises C $\left\{ x = +a \; ; \; z^2+y^2=r^2 \right\}$, (2)

die Gleichungen des Kreises C′ $\left\{ x = -a \; ; \; z^2+y^2=r^2 \right\}$. (3)

Jede Gerade L, welche durch die Linie G gehet, kann durch die Gleichungen

$$\left\{ y = \mu x \quad ; \quad z = \mu' x + \mu'' \right\} \qquad (4)$$

ausgedrückt werden. Da diese Linie den Kreis C schneiden soll, so müssen die vier Gleichungen (2) und (4) zu gleicher Zeit bestehen, und wir erhalten aus ihnen, durch Elimination von x, y, z,

$$a^2(\mu^2+\mu'^2)+\mu''^2+2a\mu'\mu'' = r^2 \quad ; \qquad (5)$$

und da die Linie G auch den Kreis C′ schneiden soll, so ergiebt sich auf gleiche Weise, aus den Gleichungen (3) und (4),

$$a^2(\mu^2+\mu'^2)+\mu''^2-2a\mu'\mu'' = r^2 \quad . \qquad (6)$$

Aus den beiden Gleichungen (5) und (6) folgt

$$\mu'\mu'' = 0 \quad ,$$

also ist

$$\text{entweder} \quad \mu'' = 0 \quad \text{und} \quad a^2(\mu^2+\mu'^2) = r^2 \quad , \qquad (7)$$

$$\text{oder} \quad \mu' = 0 \quad \text{und} \quad a^2\mu^2+\mu''^2 = r^2 \quad . \qquad (8)$$

Die Elimination von μ, μ' und μ'' zwischen den Gleichungen (4) und (7) giebt

$$a^2(y^2+z^2) = r^2x^2 \quad , \qquad (9)$$

und die Elimination derselben Größen zwischen den Gleichungen (4) und (8)

$$a^2y^2+x^2z^2 = r^2x^2 \quad . \qquad (10)$$

Die Gerade L erzeugt also entweder die Fläche (9) vom zweiten Grade, welche ein Rotationskegel ist, oder die Fläche (10) vom vierten Grade, welche kegelförmiger Keil (cono cuneus) genannt wird.

Wird der kegelförmige Keil von einer, der Ebene der xy parallelen Ebene in der Höhe z = h geschnitten, so ergiebt sich für die Projection dieses Schnittes, also auch für den Schnitt selbst,

$$a^2y^2 = (r^2-h^2)x^2$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left\{ay+\sqrt{r^2-h^2}\,x\right\}\left\{ay-\sqrt{r^2-h^2}\,x\right\} = 0 \quad ,$$

d. i. zwei reelle oder imaginaire Gerade, je nachdem, absolut genommen, $h < r$ oder $h > r$ ist. — Für einen, der Ebene der yz parallelen Durchschnitt, in der Entfernung x = g, finden wir

$$a^2y^2+g^2z^2 = g^2r^2 \quad ,$$

§. 87. also eine Ellipse, welche für $g = \pm a$ in den Kreis C oder C', und für $g = 0$ in die Gerade G degenerirt. — Für einen, der Ebene der xz parallelen Durchschnitt, in der Entfernung $y = k$, finden wir

$$x^2z^2 - r^2x^2 + a^2k^2 = 0 \quad ,$$

also eine Linie vierten Grades, welche für $k = 0$ in drei gerade Linien, deren Gleichungen $x = 0$, $z = +r$ und $z = -r$ sind, degenerirt.

Die Gerade G, d. i. die Achse der z ist eine doppelte Linie der Fläche, und die Stücke dieser Geraden, welche durch Werthe von z, die von $+a$ bis $+\infty$ und von $-a$ bis $-\infty$ genommen werden, ausgedrückt sind, müssen als conjugirt betrachtet werden.

Der Anfangspunkt der Coordinaten ist der Mittelpunkt, und die Coordinatenebenen sind Diametralebenen der Fläche.

Aufgabe [123]. Ein Kreis C und zwei Punkte A, A' in gleicher Entfernung von der Kreisebene und so gelegen, daß ihre Verbindungslinie AA' durch den Mittelpunkt des Kreises C gehet, sind gegeben. Durch A und A' sind respective die Geraden G und G' der Kreisebene parallel und auf einander senkrecht gezogen. Eine Gerade L bewegt sich so, daß sie fortwährend die Kreislinie C und die beiden Geraden G, G' schneidet. Es soll die erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir nehmen zwei durch den Mittelpunkt des Kreises den Geraden G, G' parallele Linien zu Achsen der x und der y, die Gerade AA' zur Achse der z. Alsdann ist das Gleichungssystem

des Kreises C $\left\{ z = 0 \; ; \; y^2 + x^2 = r^2 \right\}$, (11)

der Geraden G $\left\{ z = +h \; ; \; y = 0 \right\}$, (12)

der Geraden G' $\left\{ z = -h \; ; \; x = 0 \right\}$. (13)

Bezeichnen wir die Gleichungen der erzeugenden Geraden durch

$$\left\{ x = \alpha z + \alpha' \; ; \; y = \beta z + \beta' \right\} , \qquad (14)$$

so erhalten wir, durch Elimination von x, y und z

zwischen den Gleichungen (11) und (14), $\beta'^2 + \alpha'^2 = r^2$,
» » » (12) » (14), $h\beta + \beta' = 0$, (15)
» » » (13) » (14), $h\alpha - \alpha' = 0$,

und zwischen den fünf Gleichungen (14) und (15) haben wir nun die vier Größen α, α', β und β' zu eliminiren. Schaffen wir zunächst α' und β' fort, so kommt:

$$(y-\beta z)^2 + (x-\alpha z)^2 = r^2 \quad ; \quad y - \beta(z-h) = 0 \quad ; \quad x - \alpha(z+h) = 0 \quad ;$$

und wenn wir jetzt zwischen diesen letzten drei Gleichungen α und β eliminiren, so erhalten wir

$$h^2y^2(z+h)^2 + h^2x^2(z-h)^2 = r^2(z+h)^2(z-h)^2 \qquad (16)$$

als die Gleichung der erzeugten Fläche, welche somit vom vierten Grade ist.

Setzen wir in diese Gleichung $z = k$, so finden wir als Gleichung der Curve, in welcher die Fläche (16) von einer, der Kreisebene C parallelen Ebene geschnitten wird,

$$h^2(k+h)^2y^2 + h^2(k-h)^2x^2 = r^2(k^2-h^2)^2 \quad . \quad (17)$$

Alle, der Kreisebene C parallelen Durchschnitte sind daher, im Allgemeinen, Ellipsen, und da, wenn wir k mit $-k$ vertauschen, in der Gleichung (17) nur die Coefficienten von x^2 und y^2 sich mit einander verwechseln, so geben zwei auf entgegengesetzten Seiten der Kreisebene, in gleicher Entfernung von derselben geführte Durchschnitte, gleiche Ellipsen, deren gleiche Achsen rechte Winkel mit einander machen. Für $k = 0$ degenerirt die Ellipse (17), wie es seyn muß, in den Kreis C, und für $k = \pm h$ in die Gerade G oder G'.

Setzen wir in der Gleichung (16) $y = g$, so finden wir als Gleichung der Curve, in welcher die Fläche von einer, der Ebene der xz parallelen Ebene geschnitten wird,

$$h^2(z-h)^2x^2 = \left\{r^2(z-h)^2 - h^2g^2\right\}(z+h)^2 \quad , \quad (18)$$

welche Curve somit vom vierten Grade ist. Der Punkt, dessen Coordinaten $x = 0$ und $z = -h$ sind, ist ein doppelter Punkt dieser Curve (18), und ein isolirter wenn, absolut genommen, $g > 2r$. Für $g = 0$ zerfällt die Gleichung (18) in rationale Factoren, nämlich in

$$\left\{rz + h(x+r)\right\}\left\{rz - h(x-r)\right\}\left\{z-h\right\}^2 = 0$$

und es degenerirt also die Durchschnittscurve alsdann in drei gerade Linien.

Aehnliche Resultate ergeben sich für Durchschnitte, welche der Ebene der yz parallel sind.

Die Geraden G, G' sind doppelte Linien der Fläche (16). Die Stücke der Geraden G, welche durch $z = +h$, $y = 0$ und Werthe von x, die von $+2r$ bis $+\infty$ und von $-2r$ bis $-\infty$ genommen werden, ausgedrückt sind, ferner die Stücke der Geraden G', welche durch $z = -h$, $x = 0$ und Werthe von y, welche von $+2r$ bis $+\infty$ und von $-2r$ bis $-\infty$ genommen werden, ausgedrückt sind, müssen als conjugirt betrachtet werden.

§. 88.

Jede **geradlinige** Fläche ist durch das System der beiden Gleichungen

§. 88. die gegebenen Gleichungen der beiden dirigirenden Linien. Jede Ebene, welche die erste dieser beiden Geraden enthält, kann durch die Gleichung

$$(x + \alpha z + a) + \mu(y + \beta z + b) = 0 \quad , \qquad (9)$$

und jede Ebene, welche die zweite Gerade enthält, durch die Gleichung

$$(x + \alpha' z + a') + \mu'(y + \beta' z + b') = 0 \qquad (10)$$

ausgedrückt werden. Die erzeugende Gerade kann folglich durch das System der beiden Gleichungen (9) und (10) dargestellt werden. Da aber für eine bestimmte Lage der Erzeugenden die willkürlichen Constanten μ und μ' bestimmte Werthe, und für jede andere bestimmte Lage andere, ebenfalls bestimmte Werthe erhalten; so sind μ und μ' Functionen einer und derselben Größe, und somit ist auch μ' eine Function von μ, d.i. $\mu' = \varphi(\mu)$. Setzen wir hierin für μ' und μ ihre Werthe aus (10) und (9), so kommt

$$\frac{x + \alpha' z + a'}{y + \beta' z + b'} = \varphi\left(\frac{x + \alpha z + a}{y + \beta z + b}\right) \quad , \qquad (11)$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Schneiden sich die beiden gegebenen Geraden (8), und wird die Achse der x der durch diese Geraden bestimmten Ebene parallel genommen, so coincidiren die Projectionen dieser selbigen Geraden auf die Ebene der yz, und es ist alsdann $\beta' = \beta$ und $b' = b$, wodurch die Gleichung (11) in

$$\frac{x + \alpha' z + a'}{y + \beta z + b} = \varphi\left(\frac{x + \alpha z + a}{y + \beta z + b}\right) \qquad (12)$$

übergehet, und, wie es nothwendigerweise auch seyn muß, eine Kegelfläche ausdrückt (§. 33).

Schneiden sich die beiden gegebenen Geraden (8) nicht, so können wir auf einer jeden derselben einen Punkt A, B beliebig annehmen, deren Verbindungslinie AB in O halbiren, durch O zwei Gerade M, N den gegebenen parallel ziehen, und diese Linien M, N zu Achsen der x und der y, die Linie AB aber zur Achse der z nehmen. Die Gleichungen (8) gehen durch diese Coordinatenverwandlung in

$$\left\{\begin{matrix} y = 0 \\ z - h = 0 \end{matrix}\right\} \; ; \; \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ z + h = 0 \end{matrix}\right\} \quad , \qquad (8')$$

und die gesuchte Gleichung der Fläche gehet demgemäß in

$$\frac{x}{z + h} = \varphi\left(\frac{y}{z - h}\right) \qquad (11')$$

über. — Legen wir durch eine solche Fläche irgend zwei Ebenen, deren Gleichungen

$$x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + z \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \qquad (5)$$

an.

Aufgabe [125]. Die allgemeine Gleichung der Fläche zu finden, welche von einer Geraden erzeugt wird, die bei ihrer Bewegung einer gegebenen festen Ebene parallel bleibt.

Es sey

$$az + by + cx = d$$

die Gleichung der gegebenen festen Ebene. Jede Gerade, welche dieser Ebene parallel ist, kann durch das Gleichungssystem

$$\left\{ \; az + by + cx = \delta \quad ; \quad mx + ny + 1 = 0 \; \right\}$$

ausgedrückt werden. Verändert man δ, so verändert sich die Lage dieser Geraden, und dann verändern im Allgemeinen auch m und n ihre Werthe. Es sind also die Werthe von m und n von dem Werthe von δ abhängig, d. i. $m = \varphi(\delta)$ und $n = \psi(\delta)$, wonach die beiden Gleichungen der erzeugenden Geraden durch

$$\left\{ \; az + by + cx = \delta \quad ; \quad x \cdot \varphi(\delta) + y \cdot \psi(\delta) + 1 = 0 \; \right\}$$

darzustellen sind. Eliminiren wir δ zwischen ihnen, so kommt

$$x \cdot \varphi(az + by + cx) + y \cdot \psi(az + by + cx) + 1 = 0 \qquad (6)$$

als die allgemeine Gleichung der gesuchten Fläche.

Ist die feste Ebene der Ebene der xy parallel, so ist $b = c = 0$, und dann nimmt die Gleichung (6) die einfachere Gestalt

$$x \cdot \varphi(z) + y \cdot \psi(z) + 1 = 0 \qquad (7)$$

an.

Geht die erzeugende Gerade einer geradlinigen Fläche durch zwei gegebene feste gerade Linien, so ist es eine willkürliche Function, welche in die Gleichung der Fläche eintritt, falls keine dritte particularisirende Bestimmung gegeben ist.

Aufgabe [126]. Die allgemeine Gleichung der geradlinigen Fläche zu finden, wenn die erzeugende Gerade fortwährend zwei gegebene feste Gerade schneidet.

Es seyen

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \alpha z + a = 0 \\ y + \beta z + b = 0 \end{array} \right\} \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x + \alpha' z + a' = 0 \\ y + \beta' z + b' = 0 \end{array} \right\} \qquad (8)$$

§. 88. die gegebenen Gleichungen der beiden dirigirenden Linien. Jede Ebene, welche die erste dieser beiden Geraden enthält, kann durch die Gleichung

$$(x+\alpha z+a)+\mu(y+\beta z+b)=0\quad, \qquad (9)$$

und jede Ebene, welche die zweite Gerade enthält, durch die Gleichung

$$(x+\alpha' z+a')+\mu'(y+\beta' z+b')=0 \qquad (10)$$

ausgedrückt werden. Die erzeugende Gerade kann folglich durch das System der beiden Gleichungen (9) und (10) dargestellt werden. Da aber für eine bestimmte Lage der Erzeugenden die willkürlichen Constanten μ und μ' bestimmte Werthe, und für jede andere bestimmte Lage andere, ebenfalls bestimmte Werthe erhalten; so sind μ und μ' Functionen einer und derselben Größe, und somit ist auch μ' eine Function von μ, d.i. $\mu'=\varphi(\mu)$. Setzen wir hierin für μ' und μ ihre Werthe aus (10) und (9), so kommt

$$\frac{x+\alpha' z+a'}{y+\beta' z+b'}=\varphi\left(\frac{x+\alpha z+a}{y+\beta z+b}\right)\quad, \qquad (11)$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Schneiden sich die beiden gegebenen Geraden (8), und wird die Achse der x der durch diese Geraden bestimmten Ebene parallel genommen, so coincidiren die Projectionen dieser selbigen Geraden auf die Ebene der yz, und es ist alsdann $\beta'=\beta$ und $b'=b$, wodurch die Gleichung (11) in

$$\frac{x+\alpha' z+a'}{y+\beta z+b}=\varphi\left(\frac{x+\alpha z+a}{y+\beta z+b}\right) \qquad (12)$$

übergehet, und, wie es nothwendigerweise auch seyn muß, eine Kegelfläche ausdrückt (§. 33).

Schneiden sich die beiden gegebenen Geraden (8) nicht, so können wir auf einer jeden derselben einen Punkt A, B beliebig annehmen, deren Verbindungslinie AB in O halbiren, durch O zwei Gerade M, N den gegebenen parallel ziehen, und diese Linien M, N zu Achsen der x und der y, die Linie AB aber zur Achse der z nehmen. Die Gleichungen (8) gehen durch diese Coordinatenverwandlung in

$$\left\{\begin{array}{c} y=0 \\ z-h=0 \end{array}\right\}\ ;\ \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ z+h=0 \end{array}\right\}\ , \qquad (8')$$

und die gesuchte Gleichung der Fläche gehet demgemäß in

$$\frac{x}{z+h}=\varphi\left(\frac{y}{z-h}\right) \qquad (11')$$

über. — Legen wir durch eine solche Fläche irgend zwei Ebenen, deren Gleichungen

$$x = Az + By + C \quad \text{und} \quad x = A'z + B'y + C'$$ §. 88.

seyn mögen, so erhalten wir für die Projectionen der Durchschnittscurven, indem wir x aus der Gleichung (11') fortschaffen, und die Coordinaten der Projection der zweiten Curve zur Unterscheidung durch y', z' bezeichnen,

$$\frac{Az + By + C}{z + h} = \varphi\left(\frac{y}{z + h}\right) \quad ; \quad \frac{A'z' + B'y' + C'}{z' - h} = \varphi\left(\frac{y'}{z' - h}\right) .$$

Es gehet aber die erste dieser beiden Gleichungen in die zweite über, wenn wir

$$\frac{A'z' + B'y' + C'}{z' - h} = \frac{Az + By + C}{z + h} \quad \text{und} \quad \frac{y'}{z' - h} = \frac{y}{z + h}$$

setzen; und hieraus folgt, daß die Projectionen der beiden Durchschnittscurven, und folglich diese Durchschnittscurven selbst, im Allgemeinen, in derjenigen Beziehung zu einander stehen, welche die in I. §. 50 dargelegte Verwandtschaft zweier ebenen Systeme constituirt, nach welcher einer jeden Geraden eine Linie zweiten Grades entspricht, die durch drei feste Punkte, die Cardinalpunkte, gehet. — Legen wir aber durch die Fläche zwei Ebenen, welchen die beiden gegebenen festen Geraden (8') parallel laufen, und deren Gleichungen daher

$$z = k \quad \text{und} \quad z = k'$$

sind, so erhalten wir als Gleichungen der beiden Durchschnittscurven, wenn wir $k + h$ durch m, $k - h$ durch n, $k' + h$ durch m' und $k' - h$ durch n', die Coordinaten der zweiten Durchschnittscurve aber, zur Unterscheidung, durch x', y' bezeichnen,

$$\frac{x}{m} = \varphi\left(\frac{y}{n}\right) \quad ; \quad \frac{x'}{m'} = \varphi\left(\frac{y'}{n'}\right) .$$

Da nun die erste dieser Gleichungen in die zweite übergehet wenn wir

$$x' = \frac{m'}{m}x \quad \text{und} \quad y' = \frac{n'}{n}y$$

setzen, so sind die beiden Durchschnittscurven, vorausgesetzt, daß keine der Größen m, n, m', n' gleich 0 oder ∞ ist, im Allgemeinen, affin (I. §. 16).

Aufgabe [127]. *Die allgemeine Gleichung der geradlinigen Fläche zu finden, wenn die erzeugende Gerade fortwährend durch eine gegebene feste Gerade gehet und einer gegebenen festen Ebene parallel bleibt.*

Es seyen

$$x + \alpha z + a = 0 \quad ; \quad y + \beta z + b = 0 \qquad (13)$$

die gegebenen Gleichungen der festen Geraden, und

$$Az + By + Cx + 1 = 0 \qquad (14)$$

§. 88. die gegebene Gleichung der festen Ebene. Jede Ebene, welche die Gerade (13) enthält, kann durch die Gleichung

$$(x + \alpha z + a) + \mu(y + \beta z + b) = 0 \quad , \qquad (15)$$

und jede Ebene, welche der Ebene (14) parallel ist, durch die Gleichung

$$Az + By + Cx + \mu' = 0 \qquad (16)$$

ausgedrückt werden. Die beiden Gleichungen (15) und (16) zusammen genommen drücken offenbar eine Gerade aus, welche durch die Gerade (13) geht und der Ebene (14) parallel ist. Bewegt sich diese Gerade nach irgend einem Gesetze, so verändern sich die Werthe von μ und μ', so aber, daß μ' von μ nach diesem Gesetze abhängig bleibt, d. i. daß $\mu' = \varphi(\mu)$. Setzen wir hierin für μ' und μ ihre Werthe aus (16) und (15), so kommt

$$Az + By + Cx = \varphi\left(\frac{x + \alpha z + a}{y + \beta z + b}\right) \quad , \qquad (17)$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Wird die gegebene Gerade (13) zur Achse der z, und die gegebene Ebene (14) zur Ebene der xy genommen, so haben wir, statt der Gleichungen (13) und (14),

$$\left|\; x = 0 \quad ; \quad y = 0 \;\right| \quad \text{und} \quad z = 0 \quad ;$$

es ist alsdann

$$z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (18)$$

die gesuchte Gleichung der Fläche. — Legen wir durch eine solche Fläche irgend zwei Ebenen, so schneiden sie die Fläche in Curven, welche in der, zu Ende der Lösung der vorigen Aufgabe erwähnten Beziehung stehen, nur fällt einer von den drei Cardinalpunkten ins Unendliche.

Aufgabe [128]. Die allgemeine Gleichung der geradlinigen Fläche zu finden, wenn die erzeugende Gerade fortwährend durch eine gegebene feste Gerade gehet und mit derselben einen gegebenen constanten Winkel bildet.

Wir nehmen die gegebene feste Gerade zur Achse der z eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Da die erzeugende Gerade die Achse der z schneidet, so ist sie durch die Gleichungen

$$y = \alpha x \quad ; \quad z = \beta x + b$$

auszudrücken; und es ist, wenn wir den gegebenen constanten Winkel durch γ bezeichnen, der Bedingung der Aufgabe gemäß,

$$\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}} = \cos\gamma \quad , \quad \text{woraus } \beta = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{tg\gamma} \quad .$$ §. 88.

Wir haben also, indem wir $b = \varphi(\alpha)$ setzen, für die erzeugende Gerade

$$y = \alpha x \quad ; \quad z = \cot\gamma \sqrt{1+\alpha^2}\cdot x + \varphi(\alpha) \quad ,$$

und, indem wir α eliminiren,

$$z = \cot\gamma\cdot\sqrt{y^2+x^2} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (19)$$

als die Gleichung der erzeugten Fläche. — Diese Gleichung geht, wie es seyn muß, in die Gleichung (18) über, wenn wir $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, also $\cot\gamma = 0$ setzen.

§. 89.

Die willkürlichen Functionen in den, im vorigen §. gefundenen Gleichungen werden bestimmt, wenn eben so viele dirigirende Curven gegeben werden als willkürliche Functionen vorhanden sind. So können wir z. B. die Functionen φ und ψ in der Gleichung (5) des vorigen §. bestimmen, wenn wir festsetzen, daß die erzeugende Gerade durch zwei gleiche Kreise gehen soll, deren Ebenen der Ebene der xy parallel, und deren Mittelpunkte, in gleicher Entfernung a vom Anfangspunkte der Coordinaten, auf der Achse der x liegen. Diese Bestimmung der willkürlichen Functionen φ und ψ, welche, wenn wir die Coordinaten rechtwinklig nehmen, offenbar zu der Gleichung (10) des §. 87 führen muß, bewerkstelligen wir auf folgende Weise.

Die Gleichung der Fläche, nämlich

$$x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + z\cdot\psi\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \quad , \qquad (1)$$

muß für alle Punkte des Kreises:

$$\left\{ \; y^2+x^2 = r^2 \quad ; \quad x = +a \; \right\} \qquad (2)$$

mit diesen beiden Gleichungen (2), und ferner für alle Punkte des Kreises:

$$\left\{ \; y^2+x^2 = r^2 \quad ; \quad x = -a \; \right\} \qquad (3)$$

mit diesen letztern Gleichungen (3) zugleich bestehen können. Setzen wir nun

$$\frac{y}{x} = t \quad , \quad (4) \quad ; \quad \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = u \quad , \quad (5) \quad ; \quad \psi\left(\frac{y}{x}\right) = v \quad , \quad (6)$$

und eliminiren erstens zwischen den sechs Gleichungen (1), (2), (4), (5), (6), sodann aber zwischen den sechs Gleichungen (1), (3), (4), (5), (6) die fünf Größen x, y, z, $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ und $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, so erhalten wir

§. 89. $$au + \sqrt{r^2 - a^2t^2} \cdot v + 1 = 0 \quad \text{und} \quad au - \sqrt{r^2 - a^2t^2} \cdot v - 1 = 0 \quad ,$$
woraus sich
$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = -\frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2t^2}}$$
oder, wenn wir für t, u, v die von ihnen vertretenen Ausdrücke setzen,
$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad ; \quad \psi\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{x}{\sqrt{r^2x^2 - a^2y^2}}$$
ergiebt. Substituiren wir die nunmehr bestimmten Functionen in die Gleichung (1), so kommt
$$-xz + \sqrt{r^2x^2 - a^2y^2} = 0 \quad ,$$
oder, wenn wir rational machen,
$$a^2y^2 + x^2z^2 = r^2x^2 \quad ,$$
welches die Gleichung (10) des §. 87 ist.

Eben so können wir die Function φ in der Gleichung (11′) des vorigen §. bestimmen, wenn wir z. B. fest setzen, daß die Fläche (11′) einen gegebenen Kreis enthalten soll, dessen Gleichungen bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten
$$z = 0 \quad ; \quad y^2 + x^2 = r^2 \qquad (7)$$
seyen, was uns zu der Gleichung (16) des §. 87 führen muß. Wir verfahren dabei wie folgt.

Wir setzen
$$\frac{y}{z-h} = t \quad ; \quad \varphi\left(\frac{y}{z-h}\right) = u \quad , \qquad (8)$$
und eliminiren zwischen den fünf Gleichungen (7), (8) und
$$\frac{x}{z+h} = \varphi\left(\frac{y}{z-h}\right) \quad , \qquad (9)$$
welches die Gleichung (11′) des vorigen §. ist, die vier Größen x, y, z und $\varphi\left(\frac{y}{z-h}\right)$; dann kommt
$$u = \frac{\sqrt{r^2 - h^2t^2}}{h} \quad .$$
Es ist daher
$$\varphi\left(\frac{y}{z-h}\right) = \frac{\sqrt{r^2(z-h)^2 - h^2y^2}}{h(z-h)}$$
und die Function φ bestimmt. Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung (9), so erhalten wir, wenn wir rational machen,

$$h^2y^2(z+h)^2+h^2x^2(z-h)^2 = r^2(z+h)^2(z-h)^2 \quad ,$$ §. 89.

welches die Gleichung (16) des §. 87 ist.

Aus dem bisher Gesagten ist zu ersehen, wie man bei der Bestimmung der willkürlichen Functionen eines und desselben Ausdrucks in der Gleichung einer Fläche zu verfahren hat. Wir legen zur Uebung noch folgende Aufgaben vor.

Aufgabe [129]. Die Function φ in der Gleichung (19) des vorigen §. so zu bestimmen, daß die durch jene Gleichung ausgedrückte Fläche eine in der Ebene der xy befindliche, gegebene Gerade enthalte.

Wir nehmen die Achse der x der gegebenen Geraden parallel; diese Gerade ist dann durch die Gleichungen

$$z = 0 \quad ; \quad y = b \qquad (10)$$

ausgedrückt. Wir setzen ferner $\frac{y}{x} = t$ und $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = u$, so daß wir, in Folge der Gleichung (19) des vor. §., haben:

$$y = xt \quad ; \quad z = \cot\gamma \cdot \sqrt{y^2+x^2}+u \qquad (11)$$

Eliminiren wir zwischen den vier Gleichungen (10) und (11) die Größen x, y, z, so kommt

$$u = -\frac{b\cot\gamma\cdot\sqrt{1+t^2}}{t}, \quad \text{also} \quad \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{b\cot\gamma\cdot\sqrt{y^2+x^2}}{y} \quad .$$

Die Gleichung der, in Rede stehenden Fläche ist demnach

$$z = \cot\gamma\cdot\sqrt{y^2+x^2}\cdot\left\{1-\frac{b}{y}\right\} \quad ,$$

oder, wenn wir sie rational machen,

$$(y^2+x^2)(y-b)^2 = \tan^2\gamma\cdot y^2z^2 \quad . \qquad (12)$$

Die Fläche ist somit vom vierten Grade. — Setzen wir $z = k$, so kommt

$$(y^2+x^2)(y-b)^2 = \tan^2\gamma\cdot k^2\cdot y^2 \quad ,$$

woraus wir sehen, daß jeder, der Ebene der xy parallele Durchschnitt der Fläche eine Conchoide (I. §. 60) ist. — Setzen wir $y = h$, so kommt

$$\tan^2\gamma\cdot h^2\cdot z^2-(h-b)^2x^2 = h^2(h-b)^2 \quad ,$$

und jeder der Ebene der xz parallele Durchschnitt ist also eine Hyperbel.

Aufgabe [130]. Die Function φ in der Gleichung (19) des vorigen §. so zu particularisiren, daß die durch diese Gleichung ausgedrückte Fläche eine gegebene, in der Ebene der xy befindliche Ellipse enthalte.

§. 89. Wir nehmen die Achsen der x und der y respective den Achsen der gegebenen Ellipse parallel, deren Gleichungen alsdann

$$z = 0 \quad ; \quad a^2(y-\beta)^2 + b^2(x-\alpha)^2 = a^2b^2 \qquad (13)$$

sind. Wir setzen ferner $\frac{y}{x} = t$ und $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = u$, so daß wir, zufolge der Gleichung (19) des vor. §., haben

$$y = xt \quad ; \quad z = cot\gamma \cdot \sqrt{y^2+x^2} + u \quad . \qquad (14)$$

Eliminiren wir zwischen den vier Gleichungen (13) und (14) die Größen x, y, z, so kommt

$$a^2(ut + \beta cot\gamma \cdot \sqrt{1+t^2})^2 + b^2(u + \alpha cot\gamma \cdot \sqrt{1+t^2})^2 = a^2b^2 cot^2\gamma(1+t^2) \quad , \qquad (15)$$

eine Gleichung, aus der wir u durch t, d. i. $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ durch $\frac{y}{x}$ ausdrücken können. Da es uns aber nur darauf ankommt, die Gleichung der Fläche zu finden, so brauchen wir diese Gleichung (15) nicht aufzulösen, sondern nur t und u zwischen den Gleichungen (14) und (15) zu eliminiren, wodurch wir

$$a^2\left\{zy-(y-\beta)cot\gamma \cdot \sqrt{y^2+x^2}\right\}^2 + b^2\left\{zx-(x-\alpha)cot\gamma \cdot \sqrt{y^2+x^2}\right\}^2 = a^2b^2cot^2\gamma(y^2+x^2) \quad (16)$$

erhalten, welches die verlangte Gleichung ist.

Liegt der Mittelpunkt der Ellipse im Anfangspunkte der Coordinaten, so ist $\beta = 0$ und $\alpha = 0$, und dann reducirt sich die gefundene Gleichung auf

$$(a^2y^2 + b^2x^2)\left\{z - cot\gamma \cdot \sqrt{y^2+x^2}\right\}^2 = a^2b^2cot^2\gamma(y^2+x^2) \quad . \qquad (17)$$

§. 90.

Aufgabe [131]. *Zwei nicht in einer Ebene liegende, auf einander senkrechte Gerade G, G′ sind gegeben. Eine gerade Linie AA′ von gegebener Länge bewegt sich so, daß der Endpunkt A fortwährend auf der Geraden G, und der Endpunkt A′ fortwährend auf der Geraden G′ bleibt. Es soll die, von der verlängerten AA′ erzeugte Fläche gefunden werden.*

Wir nehmen die auf den beiden gegebenen Geraden G, G′ senkrechte Linie zur Achse der z, und die, durch den Halbirungspunkt dieser senkrechten Entfernung gehenden, den beiden Geraden G, G′ parallelen Linien zu Achsen der y und der x. Die Gleichungen der Linien G, G′ sind alsdann

$$\left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ z - h = 0 \end{array}\right\} \quad ; \quad \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ z + h = 0 \end{array}\right\} \quad .$$

Ist nun $x'y'z'$ ein Punkt der Geraden G und $x''y''z''$ ein Punkt der Geraden G', so ist §. 90.

$$\left.\begin{array}{l} x' = x' \;;\; y' = 0 \;;\; z' = +h \\ x'' = 0 \;;\; y'' = y'' \;;\; z'' = -h \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

und die Gleichungen einer Geraden, welche durch diese beiden Punkte gehet, sind

$$x = \frac{x'}{2h}(z+h) \quad ; \quad y = \frac{y''}{2h}(h-z) \quad . \qquad (2)$$

Soll diese Gerade die Erzeugende seyn, so müssen die Punkte $x'y'z'$ und $x''y''z''$ respective mit den Punkten A und A' dieser Linie zusammen fallen, und wenn wir die gegebene Länge von AA' durch 2a bezeichnen, so muß

$$(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2 = 4a^2$$

oder, in Folge von (1),

$$x'^2 + y''^2 + 4h^2 = 4a^2 \qquad (3)$$

seyn. Setzen wir die Ausdrücke von x' und y'', welche sich aus den Gleichungen (2) ergeben, in die Gleichung (3), so kommt

$$h^2y^2(z+h)^2 + h^2x^2(z-h)^2 = (a^2-h^2)(z+h)^2(z-h)^2 \quad , \qquad (4)$$

als Gleichung der gesuchten Fläche. Diese Fläche ist also dieselbe, welche wir im §. 87 (Aufg. 123) gefunden haben.

Aufgabe [132]. Zwei sich rechtwinklig schneidende Gerade G, G' sind der Lage nach gegeben. Eine Gerade L bewegt sich so, daß sie die Gerade G fortwährend unter einem gegebenen constanten Winkel γ schneidet und daß sie von der Geraden G' eine gegebene constante Entfernung p hat. Es soll die von der Geraden L erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die Coordinaten rechtwinklig, die Gerade G zur Achse der z und die Gerade G' zur Achse der x. Da die Gerade L von der Achse der x die Entfernung p hat und die Coordinaten rechtwinklig sind, so wird offenbar auch die Projection dieser Geraden L in der Ebene der yz dieselbe Entfernung p von dem Anfangspunkte der Coordinaten haben. Die durch die Achse der z gehende Gerade L wird daher durch die Gleichungen

$$\sin\beta \cdot z + \cos\beta \cdot y = p \quad ; \quad x = \tan\alpha \cdot y \qquad (5)$$

dargestellt (I. §. 6. G. 5), aus welchen wir

$$y = -\tan\beta \cdot z + \frac{p}{\cos\beta} \quad ; \quad x = -\tan\alpha\tan\beta \cdot z + \frac{\tan\alpha}{\cos\beta}p$$

erhalten. Wir finden nun, nach §. 9 (F. 6),

§. 90.

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+tang^2\beta(1+tang^2\alpha)}},$$

woraus nach einigen Reductionen

$$tang\,\beta = \pm\cos\alpha\cdot tang\,\gamma$$

hervorgehet. Die Gleichungen (5) verwandeln sich daher in

$$y\pm\cos\alpha\, tang\,\gamma\cdot z = p\sqrt{1+\cos^2\alpha\, tang^2\gamma}\quad;\quad x = tang\,\alpha\cdot y$$

woraus wir, durch Elimination von α,

$$(y\sqrt{y^2+x^2}\pm tang\,\gamma\cdot yz)^2 = p^2(x^2+(1+tang^2\gamma)y^2)$$

erhalten, welches die Gleichung der gesuchten Fläche ist, der wir auch die Form

$$(\sin\gamma z\pm\cos\gamma\sqrt{y^2+x^2})^2 y^2 = p^2(\cos^2\gamma x^2+y^2) \qquad (6)$$

geben können.

Aufgabe [133]. Eine feste gerade Linie G und ein constanter Winkel γ sind gegeben. Eine Gerade L bewegt sich so, daß sie fortwährend die Gerade G unter dem Winkel γ trifft und daß die Stücke, welche sie bei der Bewegung auf dieser Achse G abschneidet, den Winkeln proportional sind, welche ihre Projection in einer auf der Achse G senkrechten Ebene beschreibt. Es soll die von der Geraden L erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die Coordinaten rechtwinklig, und die Gerade G zur Achse der z. Die Gleichungen der, diese Achse schneidenden Geraden L sind alsdann

$$y = tang\,\alpha\cdot x\quad;\quad z = tang\,\beta\cdot x + h\ . \qquad (7)$$

Nun ist (§.9. F.6),

$$\cos\gamma = \frac{tang\,\beta}{\sqrt{1+tang^2\alpha+tang^2\beta}}, \qquad (8)$$

und wenn n die constante Zahl bedeutet, mit welcher die, zu den von der Projection der erzeugenden Geraden beschriebenen Winkel gehörigen Bogen $r\alpha$ zu multipliciren sind, um die Abschnitte auf der Achse der z zu geben, so ist

$$h = nr\alpha\ . \qquad (9)$$

Aus der Gleichung (8) erhalten wir

$$tang\,\beta = \frac{\sqrt{1+tang^2\alpha}}{tang\,\gamma},$$

und aus der ersten Gleichung (7) $tang\,\alpha = \frac{y}{x}$; also ist

$$tang\,\beta = \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{tang\,\gamma \cdot x} = \frac{cot\,\gamma\sqrt{y^2+x^2}}{x} \quad . \qquad (10)$$

Die Gleichung (9) aber giebt

$$h = nr \cdot arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) \quad , \qquad (11)$$

und diese Ausdrücke (10) und (11) für $tang\,\beta$ und h, in die zweite Gleichung (7) substituirt, geben

$$z = cot\,\gamma\sqrt{y^2+x^2} + nr \cdot arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) \quad , \qquad (12)$$

welches die gesuchte Gleichung der erzeugten Fläche ist.

Diese Fläche nennen wir geradlinige Schraubenfläche, und die Gerade G die Achse derselben. Es erhellet aus der Betrachtung der Erzeugungsart, daß wenn wir, von zwei vollkommen gleichen und congruirenden, geradlinigen Schraubenflächen H, H', der einen Fläche H eine solche Bewegung ertheilen, daß, während ihre Achse sich auf der Achse der Fläche H' verschiebt, eine beliebige erzeugende Gerade die Fläche H' beschreibt, jene Fläche H, ungeachtet der Bewegung, nicht aufhören wird mit der Fläche H' zu coincidiren. Diese Eigenschaft der geradlinigen Schraubenfläche ergiebt sich auch aus der Gleichung (12); denn transformiren wir diese Gleichung indem wir die Achse der z unverändert lassen, die Achsen der x und der y aber um einen Winkel δ drehen und den Anfangspunkt der Coordinaten um ein Stück $z_1 = nr\delta$ verrücken, so haben wir in die Gleichung (12)

$$x = cos\,\delta\,x' - sin\,\delta\,y' \quad ; \quad y = sin\,\delta\,x' + cos\,\delta\,y' \quad ; \quad z = z' + nr\delta$$

zu setzen, wodurch sich, da $(sin\,\delta\,x' + cos\,\delta\,y')^2 + (cos\,\delta\,x' - sin\,\delta\,y')^2 \equiv y'^2 + x'^2$,

$$z' = cot\,\gamma\sqrt{y'^2+x'^2} + nr\left\{arc\left(tg = \frac{sin\,\delta\,x' + cos\,\delta\,y'}{cos\,\delta\,x' - sin\,\delta\,y'}\right) - arc(tg = tg\,\delta)\right\}$$

ergiebt, eine Gleichung, die sich von selbst auf

$$z' = cot\,\gamma\sqrt{y'^2+x'^2} + nr\,arc\left(tang = \frac{y'}{x'}\right)$$

reducirt, und welche also wieder die Form (12) hat.

Wenn der gegebene Winkel ein rechter, also $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ und daher $cot\,\gamma = 0$ ist, so vereinfacht sich die Gleichung der Schraubenfläche, nämlich in

$$z = nr\,arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) \quad \text{oder} \quad y = x\,tang\frac{z}{nr} \quad . \qquad (13)$$

§. 90. Eine auf der Achse der Schraubenfläche (12) senkrechte Ebene, deren Gleichung

$$z = h$$

ist, schneidet die Fläche (12) in einer Curve, deren Gleichung

$$\cot\gamma\sqrt{y^2+x^2} + nr\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) = h$$

ist. Transformiren wir diese Gleichung in Polarcoordinaten, indem wir $\frac{y}{x} = tang\, t$ und $\sqrt{y^2+x^2} = u$ setzen, so kommt

$$\cot\gamma \cdot u = -nrt + h \quad ,$$

oder, wenn wir den Anfang der t verändern indem wir $t = \frac{h}{nr} - t'$ setzen,

$$u = tang\gamma\, nrt' \quad .$$

Die Durchschnittscurve ist daher eine archimedische Spirale (I. §. 68). Für den Fall der Gleichung (13), d. i. für $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ und $\cot\gamma = 0$, degenerirt diese Spirale in eine gerade Linie.

Die Schraubenfläche (13) wird von jedem Kreiscylinder, dessen Achse mit der ihrigen coincidirt, in zwei, vollkommen-gleichen, Schraubenlinien geschnitten. Denn ist

$$y^2 + x^2 = R^2 \tag{14}$$

die Gleichung des genannten Cylinders, so erhalten wir, durch Elimination von y zwischen den Gleichungen (13) und (14),

$$x = \pm R\cos\frac{z}{nr} \tag{15}$$

und, wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (13) setzen,

$$y = \pm R\sin\frac{z}{nr} \tag{16}$$

so daß die oberen und unteren Vorzeichen in diesen Gleichungen (15) und (16) respective zusammen gehören. Diese beiden Gleichungen nehmen also, wenn wir $\frac{nr}{R} = m$ setzen, die Formen

$$\left\{ y = +R\sin\frac{z}{mR} \quad ; \quad x = +R\cos\frac{z}{mR} \right\}$$
$$\left\{ y = -R\sin\frac{z}{mR} \quad ; \quad x = -R\cos\frac{z}{mR} \right\}$$

an, und stimmen, wie wir sehen, nur mit den Gleichungen (5) und den

Gleichungen (11) des §. 86, nicht aber mit den Gleichungen (13) desselben §. überein. §. 90.

Auf ähnliche Weise können wir uns überzeugen, daß im Allgemeinen auch die Schraubenfläche (12) von jedem Kreiscylinder, dessen Achse mit der ihrigen coincidirt, in mehreren vollkommen gleichen Schraubenlinien geschnitten wird.

§. 91.

Bei den vorhergehenden Aufgaben haben wir immer angenommen, daß die erzeugende Gerade jede dirigirende Curve nur einmal schneide. Wenn aber eine dirigirende Curve von doppelter Krümmung ist, so kann die Bedingung vorgeschrieben werden, die erzeugende Gerade soll diese Curve zwei oder mehrere Male schneiden.

Aufgabe [134]. Eine gerade Linie bewegt sich so, daß sie fortwährend die Curve doppelter Krümmung, deren, auf rechtwinklige Achsen bezogenes Gleichungssystem

$$\left\{\; y^2 + x^2 = r_1^2 \quad ; \quad z^2 + x^2 = r_2^2 \;\right\}$$

ist, in zwei Punkten, und außerdem die Achse der z schneidet. Es soll die Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Da die erzeugende Gerade die Achse der z schneidet, so ist sie durch die Gleichungen

$$y = ax \quad ; \quad z = bx + c$$

auszudrücken. Eliminiren wir y und z zwischen diesen Gleichungen und denen der gegebenen Curve, so erhalten wir zwei Gleichungen in x, nämlich

$$(a^2+1)x^2 - r_1^2 = 0 \quad ; \quad (b^2+1)x^2 + 2bcx + c^2 - r_2^2 = 0 \;.$$

Damit nun die gegebene Curve von der erzeugenden Geraden in einem Punkte geschnitten werde, ist erforderlich, daß einer der beiden Werthe von x aus der ersten der beiden letzten Gleichungen einem der beiden Werthe von x aus der zweiten dieser Gleichungen gleich sey, und die Relation zwischen a, b und c, welche eine Folge dieser Bedingung ist, würde sich durch Elimination von x unmittelbar ergeben. Da aber die gegebene Curve von der erzeugenden Geraden in zwei Punkten geschnitten werden soll, müssen beide Werthe von x aus der einen der beiden genannten Gleichungen denen aus der andern einzeln gleich seyn, was nur Statt findet wenn

$$bc = 0 \quad \text{und} \quad \frac{r_2^2 - c^2}{b^2+1} = \frac{r_1^2}{a^2+1} \;. \qquad (1)$$

§. 91. Von diesen beiden Gleichungen giebt die erste

entweder $c = 0$ oder $b = 0$.

I. Für $c = 0$ erhalten wir aus der zweiten Bedingungsgleichung (1)

$$r_2^2(a^2 + 1) = r_1^2(b^2 + 1) \quad ,$$

und da die Gleichungen der erzeugenden Geraden dann

$$y = ax \quad ; \quad z = bx$$

sind, woraus wir

$$a = \frac{y}{x} \quad ; \quad b = \frac{z}{x}$$

erhalten, so ergiebt sich durch Substitution dieser Ausdrücke in die vorige Gleichung, erstens

$$r_2^2(y^2 + x^2) = r_1^2(z^2 + x^2) \qquad (2)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche somit eine Kegelfläche zweiten Grades ist, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, deren erzeugende Geraden also durch diesen Anfangspunkt, folglich auch, wie es verlangt wurde, durch die Achse der z gehen. Daß diese Kegelfläche die gegebene Curve enthalte, ergiebt sich schon daraus, daß ihre Gleichung die Differenz der beiden, respective mit r_2^2 und r_1^2 multiplicirten Gleichungen der Projectionen der gegebenen Curve ist.

II. Für $b = 0$ erhalten wir aus der zweiten Bedingungsgleichung (1)

$$(r_2^2 - c^2)(a^2 + 1) = r_1^2 \quad ,$$

und da die Gleichungen der erzeugenden Geraden alsdann

$$y = ax \quad ; \quad z = c$$

sind, so erhalten wir, durch Elimination von a und c, zweitens

$$(r_2^2 - z^2)(y^2 + x^2) = r_1^2 x^2 \qquad (3)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche somit vom vierten Grade ist, und in welcher die erzeugende Gerade, indem sie durch die Achse der z und durch die gegebene Curve gehet, fortwährend der Ebene der xy parallel bleibt.

Den Bedingungen der Aufgabe wird also von zwei verschiedenen Flächen genügt.

Aufgabe [135]. Eine Gerade G und eine Kugelfläche K sind gegeben. Eine Gerade L bewegt sich dergestalt, daß sie die feste Gerade G rechtwinklig schneidet und die Kugelfläche K berührt. Es soll die von der Geraden L erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir fällen von dem Mittelpunkte der Kugelfläche K auf die Gerade

G eine Senkrechte H. Die Gerade G nehmen wir zur Achse der z, die Gerade H zur Achse der y, und die Achse der x senkrecht auf jenen Achsen. Ist dann a die bekannte Entfernung des Mittelpunktes der Kugelfläche K von der Geraden G, und r der Radius jener Fläche, so ist ihre Gleichung §. 91.

$$z^2 + y^2 + x^2 - 2ay + a^2 - r^2 = 0 \quad , \tag{4}$$

und die Gleichungen der erzeugenden Geraden sind

$$y = \alpha x \quad ; \quad z = h \quad . \tag{5}$$

Eliminiren wir y und z zwischen diesen drei Gleichungen, so kommt

$$(1 + \alpha^2)x^2 - 2a\alpha x + h^2 + a^2 - r^2 = 0 \quad , \tag{6}$$

und die beiden Wurzeln dieser letzten Gleichung (6) sind die Abscissen derjenigen Punkte, in welchen die Gerade (5) die Kugelfläche (4) schneidet. Da aber jene Gerade diese Kugelfläche berühren soll, so müssen die eben genannten Punkte zusammen fallen, was nur Statt findet wenn die Gleichung (6) zwei gleiche Wurzeln hat, woraus wir die Bedingungsgleichung

$$a^2\alpha^2 = (1 + \alpha^2)(h^2 + a^2 - r^2) \tag{7}$$

erhalten. Setzen wir in diese letzte Gleichung (7) für α und h ihre Werthe aus (5), so erhalten wir, nach einer kleinen Reduction,

$$(r^2 - z^2)(y^2 + x^2) = a^2x^2 \tag{8}$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche demnach vom vierten Grade und dieselbe ist, die wir in der vorigen Aufgabe gefunden haben, was sich sogleich zeigt wenn wir in der Gleichung (3) r_1 mit a und r_2 mit r vertauschen.

§. 92.

Aufgabe [136]. Eine gerade Linie G bewegt sich so, daß sie fortwährend die Curve doppelter Krümmung, welche durch die, auf rechtwinklige Achsen bezogenen Gleichungen

$$\left\{ \; y^2 + x^2 = r^2 \quad ; \quad z^2 + x^2 = \varrho^2 \; \right\} \tag{1}$$

ausgedrückt wird, tangirt. Es soll die von der Geraden G erzeugte Fläche gefunden werden.

Nennen wir den veränderlichen Berührungspunkt $x'y'z'$, so sind die Gleichungen der Geraden G, zufolge des §. 81 (G. 5),

$$y'y + x'x = r^2 \quad ; \quad z'z + x'x = \varrho^2 \quad , \tag{2}$$

und da der Berührungspunkt $x'y'z'$ auf der Curve (1) liegt, so haben wir auch

$$y'^2 + x'^2 = r^2 \quad ; \quad z'^2 + x'^2 = \varrho^2 \quad . \tag{3}$$

§. 92. Eliminiren wir nun zwischen den vier Gleichungen (2) und (3) die drei Größen x', y', z', so kommt

$$[r^2(y^2-r^2)(x^2+z^2)-\varrho^2(z^2-\varrho^2)(x^2+y^2)]^2$$
$$= 4r^2\varrho^2[r^2(x^2+z^2)-\varrho^2(x^2+y^2)][(z^2-\varrho^2)-(y^2-r^2)]x^2 \quad (4)$$

als Gleichung der gesuchten Fläche, welche demnach vom 8ten Grade ist. Diese Gleichung enthält aber, wenn die Parenthesen aufgehoben werden, jede der drei Veränderlichen x, y, z nur in der zweiten und in der vierten Potenz, so daß jede dieser drei Größen ohne Schwierigkeit aus dieser Gleichung entwickelt werden kann. Wir können indessen auch die Elimination von x', y', z' zwischen den Gleichungen (2) und (3), welche x, y und z nur in erster Potenz enthalten, so bewerkstelligen, daß sich eine Gleichung ergiebt, welche x oder y oder z nur in erster Potenz enthält; und auf diese Weise finden wir, wenn wir, um abzukürzen, $\varrho^2-r^2=\delta^2$ setzen,

$$z = \frac{\varrho^2y^2+\delta^2x^2 \pm rxy\sqrt{y^2+x^2-r^2}}{\pm\sqrt{[\varrho^2(y^2+x^2)^2+r^2(r^2-y^2)(y^2+x^2)-2r^4x^2\pm 2r^3xy\sqrt{y^2+x^2-r^2}]}},$$

$$y = \frac{r^2z^2-\delta^2x^2 \pm \varrho xz\sqrt{z^2+x^2-\varrho^2}}{\pm\sqrt{[r^2(z^2+x^2)^2+\varrho^2(\varrho^2-z^2)(z^2+x^2)-2\varrho^4x^2\pm 2\varrho^3xz\sqrt{z^2+x^2-\varrho^2}]}}, \quad (5)$$

$$x = \frac{r^2z^2-\varrho^2y^2 \pm \delta yz\sqrt{y^2-z^2+\delta^2}}{\pm\sqrt{[r^2(y^2-z^2)^2+\delta^2(\delta^2-z^2)(y^2-z^2)-2\delta^4y^2\pm 2\delta^3yz\sqrt{y^2-z^2+\delta^2}]}}.$$

Diese Ausdrücke zeigen uns, daß z, y oder x imaginair ist wenn respective $y^2+x^2-r^2<0$, $z^2+x^2-\varrho^2<0$ oder $y^2-z^2+\delta^2<0$. Es liegt also kein Punkt der Fläche in den drei Theilen des Raumes, welche die drei Cylinder absondern, deren Gleichungen

$$y^2+x^2=r^2 \quad ; \quad z^2+x^2=\varrho^2 \quad ; \quad z^2-y^2=\delta^2$$

sind. Hiervon ist aber, wie wir aus der Gleichung (4) sehen, ein Punkt, nämlich der Durchschnittspunkt der Achsen dieser drei Cylinder, welcher der Anfangspunkt der Coordinaten ist, ausgenommen. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Fläche und ein isolirter Punkt derselben. Dieselben drei Cylinder sind die projicirenden Cylinder der gegebenen Curve (1); für einen jeden Punkt dieser Curve verschwindet, wie wir sehen, eine Wurzelgröße in den Ausdrücken (5), so daß diese Ausdrücke nicht mehr vierfache, sondern nur zweifache Werthe haben. Während alle Geraden, die irgend einer Coordinatenachse parallel sind, die Fläche im Allgemeinen in vier Punkten oder gar nicht treffen, schneiden also diejenigen dieser Geraden, welche durch die gegebene Curve gehen, unsere Fläche nur in zwei Punkten, woraus wir schließen, daß die gegebene Curve eine doppelte Linie der gefundenen Fläche (4) ist.

Aus zweien von den Ausdrücken (5) verschwindet ferner eine Wurzelgröße wenn $x = 0$ oder $y = 0$ oder $z = 0$ ist. Wir schließen hieraus, daß die Hauptdurchschnitte unserer Fläche (4) ebenfalls doppelte Linien derselben sind. Als Gleichungen dieser drei Curven finden wir sowohl aus den Gleichungen (5) als aus der Gleichung (4) §. 92

$$\delta^2 y^2 z^2 = \varrho^4 y^2 - r^4 z^2 \;;\; \varrho^2 x^2 z^2 = \delta^4 x^2 + r^4 z^2 \;;\; r^2 x^2 y^2 = \delta^4 x^2 + \varrho^4 y^2 . \quad (6)$$

Eine jede dieser doppelten Linie ist die reciproke Curve der Evolute einer Ellipse oder Hyperbel wenn ein Kreis, der dieser Curve concentrisch ist, zur Directrix der Reciprocität genommen wird, was aus (I. §. 98) folgt.

Aufgabe [137]. *Eine gerade Linie G bewegt sich so, daß sie fortwährend die sphärische Linie zweiten Grades, welche durch die, auf rechtwinklige Achsen bezogenen Gleichungen*

$$\left\{ z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \;;\; c^2 z^2 = b^2 y^2 + a^2 x^2 \right\} \quad (7)$$

ausgedrückt ist, tangirt. Es soll die von der Geraden G erzeugte Fläche gefunden werden.

Nennen wir den veränderlichen Berührungspunkt $x'y'z'$, so sind die Gleichungen der Geraden G, zufolge des §. 81 (S. 8)

$$z'z + y'y + x'x = r^2 \;;\; c^2 z'z = b^2 y'y + a^2 x'x \;, \quad (8)$$

und da der Berührungspunkt auf der Curve (7) liegt, so haben wir auch

$$z'^2 + y'^2 + x'^2 = r^2 \;;\; c^2 z'^2 = b^2 y'^2 + a^2 x'^2 \;. \quad (9)$$

Eliminiren wir zwischen diesen vier Gleichungen (8) und (9) die drei Größen x', y', z', so erhalten wir die gesuchte Gleichung der erzeugten Fläche. Wir können aber auch dieselbe Gleichung aus der in der vorigen Aufgabe gefundenen auf folgende Weise auffinden. Aus den Gleichungen (8) und (9) erhalten wir leicht

$$(b^2+c^2)yy' + (a^2+c^2)xx' = c^2 r^2 \;;\; (b^2+c^2)zz' + (b^2-a^2)xx' = b^2 r^2 ,$$
$$(b^2+c^2)y'^2 + (a^2+c^2)x'^2 = c^2 r^2 \;;\; (b^2+c^2)z'^2 + (b^2-a^2)x'^2 = b^2 r^2 .$$

Bezeichnen wir, der Kürze wegen, $b^2 + c^2$ durch α^2, $a^2 + c^2$ durch β^2 und $b^2 - a^2$ durch γ^2, so können wir diesen letzten Gleichungen die Formen

$$\frac{y}{\beta}\frac{y'}{\beta} + \frac{x}{\alpha}\frac{x'}{\alpha} = \frac{c^2}{\beta^2}\frac{r^2}{\alpha^2} \;;\; \frac{z}{\gamma}\frac{z'}{\gamma} + \frac{x}{\alpha}\frac{x'}{\alpha} = \frac{b^2}{\gamma^2}\frac{r^2}{\alpha^2} \quad (10)$$

$$\frac{y'^2}{\beta^2} + \frac{x'^2}{\alpha^2} = \frac{c^2}{\beta^2}\frac{r^2}{\alpha^2} \;;\; \frac{z'^2}{\gamma^2} + \frac{x'^2}{\alpha^2} = \frac{b^2}{\gamma^2}\frac{r^2}{\alpha^2} \quad (11)$$

geben, und zwischen diesen vier Gleichungen (10) und (11) haben wir, um die Gleichung der erzeugten Fläche zu finden, x', y', z', oder, was auf das-

§. 92. selbe hinausläuft, $\frac{x'}{\alpha}$, $\frac{y'}{\beta}$, $\frac{z'}{\gamma}$ zu eliminiren. Nun können wir aber die Gleichungen (2) und (3) in die Gleichungen (10) und (11) verwandeln, wenn wir in jenen Gleichungen für x, y, z, x′, y′, z′, r und ϱ respective $\frac{x}{\alpha}$, $\frac{y}{\beta}$, $\frac{z}{\gamma}$, $\frac{x'}{\alpha}$, $\frac{y'}{\beta}$, $\frac{z'}{\gamma}$, $\frac{c}{\beta}\frac{r}{\alpha}$ und $\frac{b}{\gamma}\frac{r}{\alpha}$ setzen, woraus denn unmittelbar folgt, daß auch das Resultat der Elimination zwischen den Gleichungen (2) und (3) sich durch dieselbe Substitution in das Resultat der Elimination zwischen den Gleichungen (10) und (11) verwandelt. Setzen wir also in die Gleichung (4) für x, y, z, r und ϱ respective $\frac{x}{\alpha}$, $\frac{y}{\beta}$, $\frac{z}{\gamma}$, $\frac{c}{\beta}\frac{r}{\alpha}$ und $\frac{b}{\gamma}\frac{r}{\alpha}$, so erhalten wir auf der Stelle

$$\left\{\frac{c^2}{\beta^2}\left(\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{c^2r^2}{\beta^2\alpha^2}\right)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)-\frac{b^2}{\gamma^2}\left(\frac{z^2}{\gamma^2}-\frac{b^2r^2}{\gamma^2\alpha^2}\right)\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\right\}^2 =$$

$$4\,\frac{b^2c^2r^2}{\gamma^2\beta^2\alpha^2}\left\{\frac{c^2}{\beta^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)-\frac{b^2}{\gamma^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)\right\}\left\{\left(\frac{z^2}{\gamma^2}-\frac{b^2r^2}{\gamma^2\alpha^2}\right)-\left(\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{c^2r^2}{\beta^2\alpha^2}\right)\right\}\frac{x^2}{\alpha^2} \quad (12)$$

als die gesuchte Gleichung der erzeugten Fläche. — Wir sehen leicht ein, daß der Mittelpunkt der sphärischen Linie (7) der Mittelpunkt und zugleich ein isolirter Punkt der erzeugten Fläche ist, und daß diese Curve (7) eine doppelte Linie derselben Fläche sey. Ferner ergiebt sich aus dem zu Ende der vorigen Aufgabe Gesagten, daß die Fläche (12) außerdem drei, in den Coordinatenebenen liegende doppelte Linien hat, deren Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2\alpha^4y^2z^2 &= r^2(b^4\beta^2y^2 - c^4\gamma^2z^2) \quad ; \\ b^2\beta^4x^2z^2 &= r^2(a^4\alpha^2x^2 + c^4\gamma^2z^2) \quad ; \\ c^2\gamma^4x^2y^2 &= r^2(a^4\alpha^2x^2 + b^4\beta^2y^2) \end{aligned} \quad (13)$$

sind, und von welchen eine jede die reciproke Curve der Evolute einer Ellipse oder Hyperbel ist, unter der Voraussetzung, daß ein dieser letzten Curve concentrischer Kreis zur Directrix der Reciprocität genommen worden.

§. 93.

Ein Kreis im Raume wird am einfachsten durch zwei Gleichungen dargestellt, von welchen die eine die Kreisebene, und die andere die Eigenschaft ausdrückt, daß alle Punkte der Peripherie gleiche Entfernung von dem Mittelpunkte haben. Sind α, β, γ die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes und ist r der Radius eines Kreises, dessen Ebene, da sie auch den Mittelpunkt enthält, durch eine Gleichung von der Form

$$(z-\gamma)+m(y-\beta)+n(x-\alpha)=0$$

ausgedrückt ist; so stellt das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l}(z-\gamma)+m(y-\beta)+n(x-\alpha)=0\\(z-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2\end{array}\right\}\qquad(1)$$

den in Rede stehenden Kreis in rechtwinkligen Coordinaten dar.

Außer dem Radius r kommen noch fünf Größen α, β, γ, m und n in den beiden Gleichungen (1) vor. Sind diese fünf Größen veränderlich, der Radius r aber constant, so wird sich die Lage des Kreises mit jenen fünf Größen verändern, seine Größe wird aber, da r constant ist, dieselbe bleiben. Wenn nun ferner vier von jenen fünf Größen gegebene Functionen der fünften sind, was im Allgemeinen immer der Fall ist wenn zwischen den fünf Größen vier Bedingungsgleichungen existiren; so können alle fünf Größen zwischen den beiden Gleichungen (1) und den vier Bedingungsgleichungen eliminirt werden, und die Finalgleichung der Elimination drückt dann diejenige Fläche aus, welche von dem beweglichen Kreise erzeugt wird. Es sind aber vier von den Größen α, β, γ, m und n immer Functionen der fünften, oder mit anderen Worten, es existiren zwischen diesen fünf Größen vier Bedingungsgleichungen, wenn der bewegliche Kreis fortwährend vier, seine Bewegung dirigirende, Curven schneidet. Daher ist eine, von einem gegebenen Kreise zu erzeugende Fläche im Allgemeinen völlig bestimmt, wenn vier seine Bewegung dirigirende Curven gegeben sind, wie wir (S. 426) schon gesagt haben.

Statt vier gegebener Curven, welche von dem erzeugenden Kreise zu schneiden sind, können auch andere Bedingungen gegeben seyn, welche seine Lage bestimmen, wozu die folgenden Aufgaben als Beispiele dienen mögen.

Aufgabe [138]. *Zwei auf einander senkrechte, sich nicht schneidende Gerade G, G′ sind gegeben. Ein Kreis von gegebenem Radius r bewegt sich so, daß sein Mittelpunkt die Gerade G beschreibt, und daß die Kreisebene fortwährend durch die Gerade G′ geht. Es soll die von der Kreislinie erzeugte Fläche gefunden werden.*

Wir nehmen ein rechtwinkliges Coordinatensystem so an, daß die Gerade G′ die Achse der x, und die Gerade G durch die Gleichungen

$$x=0 \quad ; \quad y=b$$

ausgedrückt sey. Da nun der Mittelpunkt des Kreises in dieser zuletzt genannten Geraden liegt, so sind zwei seiner Coordinaten, nämlich $\alpha=0$ und $\beta=b$, constant. Da ferner die Kreisebene nicht nur den Mittelpunkt, sondern auch die Achse der x enthält, so ist deren Gleichung

§. 93.

$$bz = \gamma y \quad ,$$

und es ist daher das, den Kreis ausdrückende Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{c} bz = \gamma y \\ (z-\gamma)^2 + (y-b)^2 + x^2 = r^2 \end{array} \right\} .$$

Eliminiren wir γ zwischen diesen beiden Gleichungen, so kommt

$$(z^2+y^2)(y-b)^2 = (r^2-x^2)y^2 \qquad (2)$$

als die Gleichung der erzeugten Fläche, welche demnach vom vierten Grade ist. Die, der Ebene der xz parallelen Durchschnitte dieser Fläche sind im Allgemeinen (reelle oder imaginaire) Ellipsen, was sich sogleich ergiebt wenn wir y constant setzen. Derjenige dieser Durchschnitte, welcher in der Entfernung $y = b$ geführt wird, ist das System zweier Geraden, die der Achse der z parallel sind; und der Durchschnitt in der Entfernung $y = \frac{1}{2}b$ ist ein Kreis, dessen Radius gleich $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2}$ ist. Die der Ebene der yz parallelen Durchschnitte, deren Entfernungen von dieser Ebene kleiner als r, sind Conchoiden, was wir erkennen, indem wir, in der Gleichung (2), x constant und somit $r^2 - x^2 = a^2$ setzen (I, §. 60. S. 6). Die Achse der x ist eine doppelte Linie der Fläche (2), und zwar zum Theil oder gänzlich isolirt, je nachdem $r^2 > b^2$ oder $r^2 < b^2$ ist.

Aufgabe [139]. Zwei auf einander senkrechte, sich nicht schneidende Gerade G, G′ sind gegeben, wodurch zugleich die Lage der Ebene E bestimmt ist, welche, indem sie die Gerade G enthält, auf der Geraden G′ senkrecht steht. Ein Kreis von constanter Größe bewegt sich so, daß fortwährend seine Peripherie die Gerade G schneidet, seine Ebene die Gerade G′ enthält und sein Mittelpunkt auf der Ebene E bleibt. Es soll die von der Kreislinie erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir nehmen das Coordinatensystem wie in der vorigen Aufgabe an. Die Ebene E ist alsdann die Ebene der yz, daher $\alpha = 0$ und das Gleichungssystem des beweglichen Kreises

$$\left\{ \begin{array}{c} \beta z = \gamma y \\ (z-\gamma)^2 + (y-\beta)^2 + x^2 = r^2 \end{array} \right\} .$$

Da nun die Kreisperipherie die Gerade G schneiden soll, deren Gleichungen

$$\left| \; x = 0 \quad ; \quad y = b \; \right|$$

sind, so ergiebt sich, durch Elimination von x, y, z zwischen den genannten vier Gleichungen, die Bedingung

$$(\beta^2+\gamma^2)(b-\beta)^2 = r^2\beta^2 \quad .$$

Eliminiren wir zwischen dieser Gleichung und den obigen Gleichungen des Kreises die Größen β und γ, so kommt

$$(b-y)^4(z^2+y^2)^2+2y^2(x^2-2r^2)(b-y)^2(z^2+y^2)+x^4y^4 = 0 \quad (3)$$

als die Gleichung der erzeugten Fläche, welche somit vom achten Grade ist.

Hierbei bemerken wir noch Folgendes. Der Gleichung (3) können wir, indem wir sie nach z und nach x auflösen, die Formen

$$(y-b)^2(z^2+y^2) = \left\{2r^2-x^2 \pm 2r\sqrt{r^2-x^2}\right\}y^2 \quad , \quad (4)$$

$$x^2y^2+(z^2+y^2)(y-b)^2 \pm 2r(y-b)y\sqrt{z^2+y^2} = 0 \quad (5)$$

geben. Setzen wir nun x constant, so wird $2r^2-x^2+2r\sqrt{r^2-x^2}$ sowohl als $2r^2-x^2-2r\sqrt{r^2-x^2}$ eine constante Größe, und bezeichnen wir diese respective durch a_1^2 und a_2^2, so giebt uns die Gleichung (4)

$$(y-b)^2(z^2+y^2) = a_1^2y^2 \quad \text{oder} \quad (y-b)^2(z^2+y^2) = a_2^2y^2 \quad ,$$

welche letztere Gleichungen zwei Conchoiden ausdrücken. Die Fläche (3) wird daher von einer, der Ebene der yz parallelen Ebene in einer Curve geschnitten, die nicht im eigentlichen Sinne vom achten Grade ist, sondern welche aus zwei Linien vierten Grades, und zwar aus zwei Conchoiden bestehet. Setzen wir aber $z = tang\,\vartheta \cdot y$, so wird $z^2+y^2 = sec^2\vartheta \cdot y^2$, und die Gleichung (5) giebt uns

$$y^2 = 0 \quad \text{oder} \quad cos^2\vartheta \cdot x^2+(y-b)^2+2r\,cos\,\vartheta\cdot(y-b) = 0$$

$$\text{oder} \quad cos^2\vartheta \cdot x^2+(y-b)^2-2r\,cos\,\vartheta\cdot(y-b) = 0 \quad .$$

Die Fläche (3) enthält daher die Achse der x, welche der Fläche gänzlich oder nur zum Theil conjugirt ist, und es sind die Projectionen aller Durchschnitte, welche diese Gerade enthalten, zwei Ellipsen, diese Durchschnitte selbst aber, wie wir leicht finden, zwei Kreise. Alle diese analytisch hergeleiteten Resultate hätten sich eben so leicht auf blos geometrischem Wege finden lassen.

§. 94.

Aufgabe [140]. *Es sind zwei auf einander senkrechte Ebenen E, E', und es ist in der zweiten Ebene E' eine Curve M gegeben. Ein Kreis von gegebenem Radius r bewegt sich so, daß seine Ebene der Ebene E parallel bleibt und daß sein Mittelpunkt die Curve M beschreibt. Es soll die allgemeine Gleichung der, von der Kreislinie erzeugten Fläche gefunden werden.*

Wir nehmen die Coordinaten rechtwinklig, und zwar die Ebene E zur Ebene der xy und die Ebene E' zur Ebene der xz an. Es sey nun

$$x = f(z)$$

§. 94. die gegebene Gleichung der Curve M, so ist, da der Mittelpunkt des Kreises sich in der Ebene der xz befinden soll, $\beta = 0$, und, da er auf der Curve M liegen soll, $\alpha = f(\gamma)$. Da ferner die Kreisebene der Ebene der xy parallel seyn soll, so ist deren Gleichung $z = \gamma$. Der erzeugende Kreis ist daher durch die Gleichungen

$$z - \gamma = 0 \quad ; \quad (z-\gamma)^2 + y^2 + (x - \alpha)^2 = r^2$$

ausgedrückt, und eliminiren wir γ, so kommt

$$y^2 + (x - f(z))^2 = r^2 \quad , \tag{1}$$

oder auch, was dasselbe ist,

$$f(z) = x \pm \sqrt{r^2 - y^2} \quad , \tag{2}$$

oder endlich, wenn wir uns z entwickelt denken,

$$z = \varphi(x \pm \sqrt{r^2 - y^2}) \tag{3}$$

als die **allgemeine** Gleichung der erzeugten Fläche.

Es sey z. B. die Curve M eine Ellipse und

$$a^2 z^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

ihre Gleichung, so ist

$$x = f(z) = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - z^2} \quad ,$$

daher auch, nach (2),

$$\pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - z^2} = x \pm \sqrt{r^2 - y^2}$$

oder, nach (3),

$$z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x \pm \sqrt{r^2 - y^2})^2} \tag{4}$$

die Gleichung der erzeugten Fläche

Wenn die Curve M nicht gegeben ist, so ist die Function f, und daher auch die Function φ willkürlich. Ist dann aber eine Curve N gegeben, welche auf der Fläche liegen soll, so ist die Fläche individualisirt und die genannten Functionen werden dadurch bestimmt. — Setzen wir z. B., daß diejenige gerade Linie sich auf der Fläche (2) befinden soll, welche durch die Gleichungen

$$x = 0 \quad ; \quad y = nz + p \tag{5}$$

ausgedrückt ist, so erhalten wir, durch Elimination von x und y zwischen den drei Gleichungen (2) und (5),

$$f(z) = \pm \sqrt{r^2 - p^2 - 2npz - n^2 z^2} \quad . \tag{6}$$

Da nun $x = f(x)$ die Gleichung der Curve M ist, so ist, in dem gegenwärtigen Falle, diese Curve M durch die Gleichung §. 94.

$$x = \pm\sqrt{r^2 - p^2 - 2npz - n^2z^2}\quad,$$

oder, wenn wir rational machen, durch die Gleichung

$$n^2z^2 + x^2 + 2npz + p^2 - r^2 = 0$$

dargestellt, und somit eine Linie zweiten Grades. Die Gleichung der, von dem Kreise erzeugten Fläche ist aber

$$\pm\sqrt{r^2 - p^2 - 2npz - n^2z^2} = x \pm \sqrt{r^2 - y^2}\quad, \qquad (7)$$

wie wir durch Substitution des Ausdrucks (6) in die Gleichung (2) finden.

Aufgabe [141]. *Eine Ebene E und eine Curve M im Raume sind gegeben. Ein Kreis von gegebenem Radius r bewegt sich so, daß seine Ebene der gegebenen Ebene E parallel bleibt, und daß sein Mittelpunkt die gegebene Curve M beschreibt. Es soll die von der Kreislinie erzeugte Fläche gefunden werden.*

Wir nehmen die gegebene Ebene E zur Ebene der xy und die Coordinaten rechtwinklig. Es seyen dann

$$x = \varphi(z) \;\; ; \;\; y = \psi(z) \quad \text{oder} \quad \alpha = \varphi(\gamma) \;\; ; \;\; \beta = \psi(\gamma)$$

die gegebenen Gleichungen der Curve M. Die Gleichungen des erzeugenden Kreises aber sind

$$z = \gamma \;\; ; \;\; (z-\gamma)^2 + (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2\quad.$$

Eliminiren wir zwischen diesen vier Gleichungen die drei Veränderlichen α, β, γ, so kommt

$$\{y - \psi(z)\}^2 + \{x - \varphi(z)\}^2 = r^2 \qquad (8)$$

als die **allgemeine** Gleichung der erzeugten Fläche.

Ist z. B. die gegebene Curve M eine, durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cos\frac{z}{n\varrho} \;\; ; \;\; y = \varrho \sin\frac{z}{n\varrho}$$

ausgedrückte Schraubenlinie (§. 86 S. 5), so haben wir

$$\varphi(z) = \varrho \cos\frac{z}{n\varrho} \;\; ; \;\; \psi(z) = \varrho \sin\frac{z}{n\varrho}\quad,$$

und daher, zufolge der Gleichung (8),

$$y^2 + x^2 - 2\varrho y \sin\frac{z}{n\varrho} - 2\varrho x \cos\frac{z}{n\varrho} + \varrho^2 - r^2 = 0 \qquad (9)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche.

§. 94. Wenn die Curve M nicht gegeben ist, so sind die Functionen φ und ψ willkürlich. Sind dann aber zwei Curven gegeben, welche auf der Fläche (8) liegen sollen, so ist die Fläche dadurch individualisirt, und die genannten Functionen werden dadurch bestimmt. Setzen wir z. B., diejenigen beiden Geraden sollen sich auf der Fläche befinden, welche durch die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = nz \end{array} \right\} \quad (10) \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = mz \end{array} \right\} \quad (11)$$

ausgedrückt sind, so erhalten wir, durch Elimination von x und y zwischen der Gleichung (8) und respective den Gleichungen (10) und (11), wenn wir, der Kürze wegen, $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ blos durch φ und ψ bezeichnen,

$$(nz-\psi)^2 + \varphi^2 = r^2 \quad ; \quad \psi^2 + (mz-\varphi)^2 = r^2 \qquad (12)$$

woraus wir, durch Entwicklung,

$$\varphi(z) = \tfrac{1}{2}\left\{mz \pm \sqrt{\frac{4n^2r^2}{m^2+n^2} - n^2z^2}\right\} \quad ; \quad \psi(z) = \tfrac{1}{2}\left\{nz \pm \sqrt{\frac{4m^2r^2}{m^2+n^2} - m^2z^2}\right\} \quad (13)$$

und, wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichung (8) substituiren, die Gleichung der erzeugten Fläche erhalten. — Indem wir auf diese Weise die Functionen φ und ψ bestimmt haben, haben wir, da $z = \gamma$, $\psi(\gamma) = \beta$ und $\varphi(\gamma) = \alpha$, zugleich die Curve M des Mittelpunktes gefunden, und die Projectionen (13) dieser Curve sind also Linien zweiten Grades. Wir können dieselbe Curve M aber auch durch das System der beiden Gleichungen (12), nämlich durch

$$\beta^2 + \alpha^2 - 2n\beta\gamma + n^2\gamma^2 - r^2 = 0 \quad ; \quad \beta^2 + \alpha^2 - 2m\alpha\gamma + m^2\gamma^2 - r^2 = 0$$

ausdrücken. Ziehen wir diese Gleichungen von einander ab, so kommt

$$2n\beta - 2m\alpha + (m^2 - n^2)\gamma = 0 \quad , \qquad (14)$$

wodurch eine Ebene dargestellt wird; die Curve M des Mittelpunktes ist daher von einfacher Krümmung.

Aufgabe [142]. Eine ebene Curve M und eine auf ihrer Ebene E senkrechte Gerade G sind gegeben. Ein Kreis von gegebenem Radius r bewegt sich so, daß sein Mittelpunkt die Curve M durchläuft und daß seine Ebene fortwährend die Gerade G enthält. Es soll die, von der Kreislinie erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die Coordinaten rechtwinklig und so an, daß die Gerade G die Achse der z, und die Ebene E die Ebene der xy sey. Die Gleichungen der Curve M bezeichnen wir durch

$$y = f(x) \quad ; \quad z = 0 \quad .$$ §. 94.

Dann haben wir, da der Mittelpunkt $\alpha\beta\gamma$ in der Curve M liegen soll,

$$\beta = f(\alpha) \quad ; \quad \gamma = 0 \quad ,$$

und, da die Kreisebene die Achse der z und den Mittelpunkt des Kreises enthält, als Gleichung dieser Ebene

$$\frac{y}{\beta} = \frac{x}{\alpha} \quad .$$

Die Gleichungen des Kreises sind daher

$$\alpha \cdot y - f(\alpha) \cdot x = 0 \quad ; \quad z^2 + \left\{y - f(\alpha)\right\}^2 + (x - \alpha)^2 = r^2 \quad .$$

Statt dieser beiden Gleichungen können wir aber auch die Gleichungen

$$\alpha \cdot y - f(\alpha) \cdot x = 0 \quad ; \quad z^2 + \left\{\frac{(f(\alpha))^2}{\alpha^2} + 1\right\}(x - \alpha)^2 = r^2 \qquad (15)$$

nehmen, von welchen die zweite das Resultat der Elimination von y ist. Aus der ersten Gleichung (15) erhalten wir

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{y}{x} \quad , \qquad (16)$$

und, wenn wir diese Gleichung (16) nach α aufgelöst uns denken,

$$\alpha = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad . \qquad (17)$$

Eliminiren wir nun α vermittelst dieser Gleichungen (16) und (17) aus der zweiten Gleichung (15), so kommt

$$x^2(z^2 - r^2) + (y^2 + x^2)\left\{x - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2 = 0 \quad , \qquad (18)$$

als die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche.

Ist z. B. die Linie M eine Gerade, welche der Achse der x parallel läuft und deren Gleichung daher $y = b$ ist, so haben wir $\beta = f(\alpha) = b$, daher nach (16):

$$\frac{b}{\alpha} = \frac{y}{x} \quad , \quad \text{woraus } \alpha = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{bx}{y} \quad ,$$

und demnach ist die Gleichung (18) in diesem Falle

$$y^2(z^2 - r^2) + (y^2 + x^2)(y - b)^2 = 0 \quad ;$$

die Fläche ist dann dieselbe, welche wir in der Aufgabe 138 (§. 93) betrachtet haben, und die so eben gefundene Gleichung wird auch mit der Gleichung (2) des §. 93 identisch wenn wir z und x gegenseitig vertauschen.

§. 94. Wenn die Curve M nicht gegeben ist, so ist die Function f, und daher auch die Function φ willkürlich. Ist dann aber eine Curve N gegeben, welche sich auf der Fläche befinden soll, so ist diese dadurch individualisirt und die genannten Functionen werden dadurch bestimmt. Setzen wir z. B., daß die Fläche die, durch die Gleichungen

$$x = a \quad ; \quad z = 0 \tag{19}$$

ausgedrückte Gerade enthalten soll, so haben wir, wenn wir

$$\frac{y}{x} = u \tag{20}$$

setzen, in Folge der Gleichungen (19) und (20)

$$x = a \quad ; \quad y = au \quad ; \quad z = 0 \quad ;$$

und, wenn wir diese Werthe in die Gleichung (18) substituiren, erhalten wir

$$(1+u^2)(a-\varphi(u))^2 = r^2 \quad ,$$

woraus sich

$$\varphi(u) = a \pm \frac{r}{\sqrt{1+u^2}} \quad ,$$

also

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = a \pm \frac{rx}{\sqrt{y^2+x^2}}$$

ergiebt. Setzen wir diesen letzten Ausdruck in die Gleichung (18), so erhalten wir

$$x^2(z^2-r^2) + \left\{(x-a)\sqrt{y^2+x^2} \mp rx\right\}^2 = 0$$

oder, wenn wir die Parenthesen entwickeln,

$$x^2z^2 + (y^2+x^2)(x-a)^2 \pm 2r(x-a)x\sqrt{y^2+x^2} = 0$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche mit der Gleichung (5) des §. 93 identisch wird wenn wir y für x, z für y nnd x für z setzen, wie denn auch die erzeugte Fläche dieselbe ist als die in der Aufgabe 139 betrachtete.

Aufgabe [143]. Eine Gerade G und eine Curve doppelter Krümmung M sind gegeben. Ein Kreis von gegebenem Radius r bewegt sich so, daß seine Ebene sich um die Gerade G dreht und daß sein Mittelpunkt die Curve M durchläuft. Es soll die von der Kreislinie erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die Gerade G zur Achse der z eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und es sey alsdann

$$x = f(z) \quad ; \quad y = F(z)$$

das Gleichungssystem der Curve M.

§. 94.

Die Gleichungen des Kreises sind, den Bedingungen der Aufgabe gemäß,

$$\alpha y - \beta x = 0 \quad ; \quad (z-\gamma)^2 + (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2 \quad ,$$

und statt dieser Gleichungen können wir auch die Gleichungen

$$\alpha y - \beta x = 0 \quad ; \quad (z-\gamma)^2 + \left\{\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1\right\}(x-\alpha)^2 = r^2$$

anwenden, von welchen die letzte das Resultat der Elimination von y ist. Nun ist aber, in Folge der Gleichungen der Curve M des Mittelpunktes,

$$\alpha = f(\gamma) \quad ; \quad \beta = F(\gamma) \quad ,$$

und daher haben wir, nach den vorhergehenden Gleichungen, das Gleichungssystem

$$y f(\gamma) - x F(\gamma) = 0 \quad ; \quad (z-\gamma)^2 + \left\{\frac{(F(\gamma))^2}{(f(\gamma))^2} + 1\right\}\left\{x - f(\gamma)\right\}^2 = r^2 \quad .$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{F(\gamma)}{f(\gamma)} = \frac{y}{x}, \text{ und durch Entwicklung } \gamma = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad ,$$

und, da $\alpha = f(\gamma)$,

$$\alpha = f\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right] \text{ oder kürzer } \alpha = \psi\left(\frac{y}{x}\right) \quad .$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in die zweite Gleichung des zuletzt angegebenen Gleichungssystems, so kommt

$$x^2\left\{z - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2 + (y^2 + x^2)\left\{x - \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2 = r^2 x^2 \quad , \qquad (21)$$

welches die **allgemeine** Gleichung der erzeugten Fläche ist.

Ist z. B. die Curve M die, durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cos \frac{z}{n\varrho} \quad ; \quad y = \varrho \sin \frac{z}{n\varrho}$$

ausgedrückte Schraubenlinie, so ist

$$\frac{F(\gamma)}{f(\gamma)} = tg\frac{\gamma}{n\varrho} = \frac{y}{x}, \text{ und durch Entwicklung } \gamma = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = n\varrho\, arc\left(tg = \frac{y}{x}\right);$$

ferner

$$\alpha = f\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \varrho \cos arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) = \frac{\varrho x}{\sqrt{y^2 + x^2}} \quad .$$

Demnach ist, in Folge von (21),

$$\left[z - n\varrho\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)\right]^2 + [\sqrt{y^2 + x^2} - \varrho]^2 = r^2 \quad ,$$

§. 94. oder, wenn wir z entwickeln,

$$z = n\varrho\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2 - y^2 - x^2 \pm 2\varrho\sqrt{y^2 + x^2}} \quad (22)$$

die Gleichung der erzeugten Fläche.

Wenn die Curve M nicht gegeben ist, so sind die Functionen f und F, und daher auch die Functionen φ und ψ willkürlich. Sind dann aber zwei Curven gegeben, welche sich auf der Fläche befinden sollen, so ist die Fläche individualisirt, und die Functionen φ und ψ dadurch bestimmt. Setzen wir z. B., die Fläche soll die beiden Geraden enthalten, welche durch die Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{matrix} z = ny \\ x = c \end{matrix}\right\} \quad (23) \quad ; \quad \left\{\begin{matrix} z = -ny \\ x = c \end{matrix}\right\} \quad (24)$$

ausgedrückt sind, und bezeichnen wieder $\frac{y}{x}$ durch u, so daß

$$y = x \cdot u \quad , \quad (25)$$

so erhalten wir durch Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen (21), (23) und (25), dann zwischen den Gleichungen (21), (24) und (25), wenn wir, der Kürze wegen, $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ durch φ und ψ bezeichnen,

$$\begin{matrix} (ncu - \varphi)^2 + (1 + u^2)(c - \psi)^2 = r^2 \quad , \\ (ncu + \varphi)^2 + (1 + u^2)(c - \psi)^2 = r^2 \quad , \end{matrix} \quad (26)$$

woraus sich zunächst

$$ncu - \varphi = \pm ncu \mp \varphi \quad ,$$

also

$$\text{entweder } \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad u = 0$$

ergiebt. Für $\varphi = 0$ finden wir aus jeder der beiden Gleichungen (26)

$$\psi(u) = c \pm \frac{\sqrt{r^2 - n^2c^2u^2}}{\sqrt{1 + u^2}} \quad \text{also} \quad \psi\left(\frac{y}{x}\right) = c \pm \frac{\sqrt{r^2x^2 - n^2c^2y^2}}{\sqrt{y^2 + x^2}} \quad ,$$

und die Gleichung (21) giebt uns nun

$$x^2(z^2 - r^2) + [(x - c)\sqrt{y^2 + x^2} \pm \sqrt{r^2x^2 - n^2c^2y^2}]^2 = 0 \quad (27)$$

als Gleichung der individualisirten Fläche.

Wollten wir u = 0 setzen, so würde $\frac{y}{x} = 0$, also y = 0 die Gleichung der erzeugten Fläche, diese somit die Ebene der xz seyn. Und in der That können in der Ebene der xz unendlich viele Kreise vom Radius r beschrieben werden, welche die beiden gegebenen Geraden (23), (24) schneiden, weil der Durchschnittspunkt dieser Linien in dieser Ebene y = 0 liegt.

Wenn nicht nur die fünf Größen α, β, γ, m und n in den Gleichungen (1) des §. 93, welche den Kreis im Raume ausdrücken, sondern auch dessen Radius r veränderlich ist; so sind fünf Bedingungen, oder, was dasselbe ist, fünf dirigirende Curven erforderlich und, im Allgemeinen, hinreichend um die erzeugte Fläche zu bestimmen.

Aufgabe [144]. Zwei auf einander senkrechte, sich nicht schneidende Gerade G, G′ sind gegeben. Ein Kreis von veränderlicher Größe bewegt sich so, daß sein Mittelpunkt die Gerade G beschreibt, und daß die Kreislinie fortwährend von der Geraden G′ berührt wird. Es soll die erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir nehmen das Coordinatensystem wie in den beiden Aufgaben 138 u. 139 an. Die Coordinaten des Mittelpunktes des erzeugenden Kreises sind alsdann $\alpha = 0$, $\beta = \mathrm{b}$ und $\gamma = \gamma$. Da nun dieser Kreis von der Geraden G′ berührt wird, so liegt diese Gerade, d. i. die Achse der x in der Kreisebene, und die Gleichungen des Kreises sind also

$$\left\{ \mathrm{bz} = \gamma \mathrm{y} \quad ; \quad (\mathrm{z}-\gamma)^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{b})^2 + \mathrm{x}^2 = \mathrm{r}^2 \right\} .$$

Aber die Achse der x hat, als Tangente des Kreises, von dessen Mittelpunkt die Entfernung r; daher ist

$$\gamma^2 + \mathrm{b}^2 = \mathrm{r}^2 ,$$

wodurch die beiden angegebenen Gleichungen in

$$\left\{ \mathrm{bz} = \gamma \mathrm{y} \quad ; \quad \mathrm{z}^2 + \mathrm{y}^2 - 2\gamma \mathrm{z} - 2\mathrm{by} + \mathrm{x}^2 = 0 \right\}$$

übergehen. Eliminiren wir γ, so kommt

$$(\mathrm{z}^2 + \mathrm{y}^2)(\mathrm{y} - 2\mathrm{b}) + \mathrm{yx}^2 = 0 \qquad (1)$$

als die gesuchte Gleichung der erzeugten Fläche, welche also vom dritten Grade ist. Die Achse der x ist eine conjugirte Linie der Fläche, welche sie zugleich berührt. Die, der Ebene der xy, und die, der Ebene der yz parallelen Durchschnitte der Fläche sind Linien dritten Grades; die der Ebene der xz parallelen Durchschnitte aber sind Hyperbeln, denn setzen wir $\mathrm{y} = \mathrm{h}$, so erhalten wir aus der Gleichung (1)

$$(2\mathrm{b} - \mathrm{h})\mathrm{z}^2 - \mathrm{hx}^2 = -(2\mathrm{b} - \mathrm{h})\mathrm{h}^2 .$$

Aufgabe [145]. In dem Mittelpunkte einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel ist auf ihrer Ebene eine Senkrechte errichtet. Ein Kreis von veränderlichem Radius bewegt sich so, daß sein Mittelpunkt in dem Mittelpunkte der gegebenen Curve bleibt, daß seine Ebene die genannte

§. 94. Wenn die Curve M nicht gegeben ist, so ist die Function f, und daher auch die Function φ willkürlich. Ist dann aber eine Curve N gegeben, welche sich auf der Fläche befinden soll, so ist diese dadurch individualisirt und die genannten Functionen werden dadurch bestimmt. Setzen wir z. B., daß die Fläche die, durch die Gleichungen

$$x = a \quad ; \quad z = 0 \tag{19}$$

ausgedrückte Gerade enthalten soll, so haben wir, wenn wir

$$\frac{y}{x} = u \tag{20}$$

setzen, in Folge der Gleichungen (19) und (20)

$$x = a \quad ; \quad y = au \quad ; \quad z = 0 \quad ;$$

und, wenn wir diese Werthe in die Gleichung (18) substituiren, erhalten wir

$$(1+u^2)(a-\varphi(u))^2 = r^2 \quad ,$$

woraus sich

$$\varphi(u) = a \pm \frac{r}{\sqrt{1+u^2}} \quad ,$$

also

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = a \pm \frac{rx}{\sqrt{y^2+x^2}}$$

ergiebt. Setzen wir diesen letzten Ausdruck in die Gleichung (18), so erhalten wir

$$x^2(z^2-r^2) + \left\{(x-a)\sqrt{y^2+x^2} \mp rx\right\}^2 = 0$$

oder, wenn wir die Parenthesen entwickeln,

$$x^2z^2 + (y^2+x^2)(x-a)^2 \pm 2r(x-a)x\sqrt{y^2+x^2} = 0$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche mit der Gleichung (5) des §. 93 identisch wird wenn wir y für x, z für y nnd x für z setzen, wie denn auch die erzeugte Fläche dieselbe ist als die in der Aufgabe 139 betrachtete.

Aufgabe [143]. Eine Gerade G und eine Curve doppelter Krümmung M sind gegeben. Ein Kreis von gegebenem Radius r bewegt sich so, daß seine Ebene sich um die Gerade G dreht und daß sein Mittelpunkt die Curve M durchläuft. Es soll die von der Kreislinie erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die Gerade G zur Achse der z eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und es sey alsdann

$$x = f(z) \quad ; \quad y = F(z)$$

das Gleichungssystem der Curve M.

Die Gleichungen des Kreises sind, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, §. 94.

$$\alpha y - \beta x = 0 \quad ; \quad (z-\gamma)^2 + (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2 \quad ,$$

und statt dieser Gleichungen können wir auch die Gleichungen

$$\alpha y - \beta x = 0 \quad ; \quad (z-\gamma)^2 + \left\{\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1\right\}(x-\alpha)^2 = r^2$$

anwenden, von welchen die letzte das Resultat der Elimination von y ist. Nun ist aber, in Folge der Gleichungen der Curve M des Mittelpunktes,

$$\alpha = f(\gamma) \quad ; \quad \beta = F(\gamma) \quad ,$$

und daher haben wir, nach den vorhergehenden Gleichungen, das Gleichungssystem

$$y f(\gamma) - x F(\gamma) = 0 \quad ; \quad (z-\gamma)^2 + \left\{\frac{(F(\gamma))^2}{(f(\gamma))^2} + 1\right\}\left\{x - f(\gamma)\right\}^2 = r^2 \quad .$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{F(\gamma)}{f(\gamma)} = \frac{y}{x}, \text{ und durch Entwicklung } \gamma = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad ,$$

und, da $\alpha = f(\gamma)$,

$$\alpha = f\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right] \text{ oder kürzer } \alpha = \psi\left(\frac{y}{x}\right) \quad .$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in die zweite Gleichung des zuletzt angegebenen Gleichungssystems, so kommt

$$x^2\left\{z - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2 + (y^2+x^2)\left\{x - \psi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2 = r^2x^2 \quad , \qquad (21)$$

welches die **allgemeine** Gleichung der erzeugten Fläche ist.

Ist z. B. die Curve M die, durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cos\frac{z}{n\varrho} \quad ; \quad y = \varrho \sin\frac{z}{n\varrho}$$

ausgedrückte Schraubenlinie, so ist

$$\frac{F(\gamma)}{f(\gamma)} = tg\frac{\gamma}{n\varrho} = \frac{y}{x}, \text{ und durch Entwicklung } \gamma = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = n\varrho\, arc\left(tg = \frac{y}{x}\right);$$

ferner

$$\alpha = f\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \varrho \cos arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) = \frac{\varrho x}{\sqrt{y^2+x^2}} \quad .$$

Demnach ist, in Folge von (21),

$$\left[z - n\varrho\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)\right]^2 + \left[\sqrt{y^2+x^2} - \varrho\right]^2 = r^2 \quad ,$$

§. 95. Senkrechte enthält und daß seine Peripherie die gegebene Curve schneidet. Es soll die erzeugte Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die Ebene der gegebenen Ellipse zur Ebene der xy und die Coordinaten rechtwinklig. Diese Curve sey dann durch die beiden Gleichungen

$$\left\{ z = 0 \quad ; \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \right\}$$

ausgedrückt. Die Gleichungen des erzeugenden Kreises sind nun, den gemachten Voraussetzungen zufolge,

$$y = nx \quad ; \quad z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \quad ,$$

in welchen n und r zwei veränderliche Größen sind. Soll dieser Kreis die Ellipse schneiden, so muß zwischen n und r diejenige Relation Statt haben, welche sich durch Elimination von x, y, z zwischen den angegebenen vier Gleichungen findet, nämlich

$$(a^2n^2 + b^2)r^2 = a^2b^2(1 + n^2) \quad .$$

Setzen wir hierin für n und r^2, zufolge der Kreisgleichungen, respective $\frac{y}{x}$ und $z^2 + y^2 + x^2$, so kommt

$$(a^2y^2 + b^2x^2)(z^2 + y^2 + x^2) = a^2b^2(y^2 + x^2) \qquad (2)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche somit vom vierten Grade ist. Diejenigen Stücke der Achse der z, welche von den Punkten $z = a$, $z = b$ und von den Punkten $z = -a$, $z = -b$ begrenzt werden, befinden sich auf der Fläche; die übrigen Stücke dieser Geraden sind als conjugirt zu betrachten.

Wenn die gegebene Curve eine Hyperbel, und

$$\left\{ z = 0 \quad ; \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \right\}$$

deren Gleichungen sind, so ist die Gleichung der erzeugten Fläche

$$(a^2y^2 - b^2x^2)(z^2 + y^2 + x^2) + a^2b^2(y^2 + x^2) = 0, \qquad (3)$$

die wir aus der Gleichung (2) erhalten indem wir $b\sqrt{-1}$ für b setzen.

Aufgabe [146]. Zwei sich nicht schneidende Gerade G, G′ sind gegeben, und deren Entfernung a, d. i. die Länge der Geraden, welche G und G′ rechtwinklig schneidet, ist in O halbirt. Ein Kreis von veränderlicher Größe bewegt sich so, daß sein Mittelpunkt in dem Punkte O bleibt und daß seine Peripherie fortwährend die beiden Geraden G, G′ schneidet. Es soll die von der Kreislinie erzeugte Fläche gefunden werden.

§. 95. Wir nehmen diejenige Gerade, welche die beiden gegebenen rechtwinklig schneidet, zur Achse der x, den Halbirungspunkt O zum Anfangspunkte der Coordinaten, und zwei durch diesen Punkt gehende, auf der Achse der x senkrechte Gerade, welche mit den gegebenen gleiche Winkel bilden, zur Achse der y und der z. Alsdann sind die gegebenen Geraden durch die Gleichungssysteme

$$\left\{ \begin{array}{l} x = +a \\ y = +kz \end{array} \right\} \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -a \\ y = -kz \end{array} \right\}$$

auszudrücken. Die Gleichungen des erzeugenden Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegen soll, sind

$$mz + ny + px = 0 \quad ; \quad z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \quad ,$$

in welchen m, n, p und r als veränderliche Größen angesehen werden müssen. Da dieser Kreis die erste und die zweite gegebene Gerade schneiden soll, so muß zwischen den Größen m, n, p und r diejenige Relation Statt finden, welche sich durch Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen des Kreises und den Gleichungen der ersten Geraden, und ferner diejenige Relation, welche sich durch Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen des Kreises und den Gleichungen der zweiten Geraden ergiebt, nämlich

$$(1+k^2)a^2p^2+(a^2-r^2)(m+kn)^2 = 0 \quad ; \quad (1+k^2)a^2p^2+(a^2-r^2)(m-kn)^2 = 0.$$

Ziehen wir diese Gleichungen von einander ab, so kommt

$$4k(a^2 - r^2)mn = 0 \quad ,$$

woraus entweder $m = 0$ oder $n = 0$ oder $r = a$ folgt.

Nehmen wir erstens $m = 0$, so ziehen sich die zwei vorher gefundenen Gleichungen beide auf

$$(1 + k^2)a^2 \frac{p^2}{n^2} + k^2(a^2 - r^2) = 0$$

zurück, und die Gleichungen des Kreises auf

$$y + \frac{p}{n}x = 0 \quad ; \quad z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \ .$$

Eliminiren wir zwischen diesen drei Gleichungen die beiden Größen $\frac{p}{n}$ und r, so kommt

$$(1+k^2)a^2y^2 = k^2x^2(z^2 + y^2 + x^2 - a^2) \qquad (4)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche.

Nehmen wir zweitens $n = 0$, so ziehen sich die zwei vorher gefundenen Gleichungen beide auf

§. 95. den Gleichungen der Geraden G und der Geraden G' ergeben. Die Finalgleichungen dieser Eliminationen sind:

$$a^2(1+k^2)(\alpha-a)^2 = r^2(\gamma+k\beta)^2 \quad ; \quad a^2(1+k^2)(\alpha+a)^2 = r^2(\gamma-k\beta)^2 \quad ;$$

und aus ihnen ergiebt sich, wiederum durch Elimination von r,

$$(k\alpha\beta+a\gamma)(ak\beta+\alpha\gamma) = 0 \quad .$$

Demnach besteht der gesuchte Ort aus zwei, durch die Gleichungssysteme

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma^2+\beta^2+\alpha^2 = a^2 \\ k\alpha\beta+a\gamma = 0 \end{array} \right\} (8) \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{c} \gamma^2+\beta^2+\alpha^2 = a^2 \\ ak\beta+\alpha\gamma = 0 \end{array} \right\} (9)$$

dargestellten sphärischen Linien vierten Grades, von welchen eine jede, wie wir sehen, die Durchschnittscurve der Kugelfläche (7) und eines hyperbolischen Paraboloids ist.

§. 96.

Wenn wir uns irgend eine gegebene Curve N von einfacher oder von doppelter Krümmung mit einer geraden Linie A fest verbunden vorstellen, so können wir, ohne die Verbindung der genannten beiden Linien aufzuheben oder zu verändern, die Curve N sich bewegen lassen, während die gerade Linie A und ein jeder Punkt derselben an seinem Orte bleibt. Die Curve N wird, bei dieser Bewegung, sich um die genannte Gerade, wie um eine feste Achse, drehen und eine Fläche erzeugen, welche **Rotationsfläche** genannt wird. Die feste Gerade heißt die **Achse der Rotationsfläche**, oder auch die **Rotationsachse**.

Es ist klar, daß ein jeder Punkt der erzeugenden Curve N bei ihrer Bewegung einen Kreis beschreiben muß, dessen Ebene auf der Achse A senkrecht ist, und dessen Mittelpunkt in dieser Achse liegt. Jede Rotationsfläche kann daher auch als durch einen Kreis erzeugt angesehen werden, dessen Mittelpunkt die Achse beschreibt, dessen Ebene die Achse fortwährend senkrecht schneidet und dessen Radius sich nach irgend einem bestimmten Gesetze ändert. Alle auf der Achse der Rotationsfläche senkrechte Schnitte sind also Kreise, und diese Kreise werden schlechthin die **Parallelkreise der Rotationsfläche** genannt.

Eben so leicht ist einzusehen, daß, welches auch die erzeugende Curve N einer Rotationsfläche seyn mag, alle, die Achse dieser Fläche enthaltenden, ebenen Durchschnitte vollkommen gleiche Curven sind; und diese Curve von einfacher Krümmung, durch deren Drehung um die Achse dieselbe Rotationsfläche ebenfalls erzeugt wird, heißt die **Meridiancurve der Rotationsfläche**.

Auf=

Aufgabe [148]. Die Lage der Rotationsachse ist gegeben. Es soll die allgemeine Gleichung der Rotationsfläche, welcher diese Achse zugehört, gefunden werden. §. 96.

Es seyen

$$\cos\gamma(x-a) = \cos\alpha\, z \quad ; \quad \cos\gamma(y-b) = \cos\beta\, z$$

die gegebenen Gleichungen der Rotationsachse in Beziehung auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Ist $x'y'z'$ ein Punkt dieser Achse, so daß also

$$x' = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}z' + a \quad ; \quad y' = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}z' + b \quad ,$$

so ist der Parallelkreis, dessen Mittelpunkt dieser Punkt $x'y'z'$ ist, durch die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{c} \cos\gamma(z-z') + \cos\beta(y-y') + \cos\alpha(x-x') = 0 \\ (z-z')^2 + (y-y')^2 + (x-x')^2 = r^2 \end{array} \right\}$$

auszudrücken. Setzen wir für x' und y' die angegebenen Ausdrücke in z', und betrachten r^2, welches für jeden Parallelkreis, also für jeden, in der Achse liegenden, Mittelpunkt einen bestimmten, von der Lage dieses Punktes in der Achse abhängenden Werth hat, als eine Function der Coordinaten x', y', z' dieses Punktes, oder, weil x' und y' wieder von z' auf die angegebene Weise abhängig sind, nur als eine Function von z', die wir durch $f(z')$ bezeichnen, so kommt, nach theilweiser Aufhebung der Parenthesen, und, da $\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1$ ist,

$$\cos\gamma z + \cos\beta(y-b) + \cos\alpha(x-a) = \frac{z'}{\cos\gamma} \quad ,$$

$$z^2+(y-b)^2+(x-a)^2-2[\cos\gamma z+\cos\beta(y-b)+\cos\alpha(x-a)]\cdot\frac{z'}{\cos\gamma} + \frac{z'^2}{\cos^2\gamma} = f(z').$$

Bezeichnen wir, der Kürze wegen, den Ausdruck

$\cos\gamma z + \cos\beta(y-b) + \cos\alpha(x-a)$ durch V,

so werden die eben erhaltenen Gleichungen durch

$$V = \frac{z'}{\cos\gamma} \quad ,$$

$$z^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 - 2V\cdot\frac{z'}{\cos\gamma} + \frac{z'^2}{\cos^2\gamma} = f(z')$$

dargestellt, und zwischen ihnen haben wir z zu eliminiren, um die gesuchte Gleichung zu erhalten. Führen wir diese Elimination aus, so ergiebt sich

$$z^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = V^2 + f(\cos\gamma\cdot V) \quad ,$$

§. 96. oder, wenn wir die Function $V^2 + f(\cos\gamma \cdot V)$ durch $\varphi(V)$ bezeichnen, und für V wieder den oben genannten Ausdruck einsetzen,

$$z^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = \varphi(\cos\gamma z + \cos\beta(y-b) + \cos\alpha(x-a)) \quad ,$$

welches die verlangte Gleichung ist. Da aber der Ausdruck $\varphi(\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x - \cos\beta b - \cos\alpha a)$ nicht allgemeiner ist als der Ausdruck $\varphi(\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x)$, so können wir der gefundenen Gleichung die etwas einfachere Gestalt

$$z^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = \varphi(\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x) \quad (1)$$

geben.

Dieselbe Gleichung läßt sich auch noch leichter wie folgt herleiten.

Irgend eine auf der gegebenen Achse senkrechte Ebene ist durch die Gleichung

$$\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x = k$$

darzustellen. Die Achse aber schneidet die Ebene der xy in einem Punkte $x_1y_1z_1$, dessen Coordinaten $x_1 = a$, $y_1 = b$ und $z_1 = 0$ sind. Nehmen wir diesen Punkt $x_1y_1z_1$ zum Mittelpunkt einer Kugel, deren Gleichung also

$$z^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2$$

ist, so schneidet diese Kugelfläche jene Ebene in einem Kreise, dessen Mittelpunkt offenbar in der gegebenen Achse liegt, und der daher ein Parallelkreis der Rotationsfläche ist. Verändern wir den Werth von k, so rückt die Ebene parallel mit sich selbst fort, und die, der genannten concentrischen, Kugelflächen, welche die fortgerückten Ebenen in Parallelkreisen schneiden, ändern, im Allgemeinen, ihren Radius. Es ist daher $r^2 = \varphi(k)$, und wir haben also, durch Elimination von k, wie oben,

$$z^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = \varphi(\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x) \quad (1)$$

als allgemeine Gleichung der Rotationsflächen.

Ist die Achse der z die Rotationsachse, so ist $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$ und $a = b = 0$. Die Gleichung (1) reducirt sich alsdann auf

$$z^2 + y^2 + x^2 = \varphi(z) \quad (2)$$

oder auch, wenn wir $\varphi(z) - z^2$ durch $\psi(z)$ bezeichnen, auf

$$y^2 + x^2 = \psi(z) \quad (3)$$

woraus, durch Entwicklung, die Form

$$z = F(y^2 + x^2) \quad (4)$$

hervorgehet.

Aufgabe [149]. Die Lage der Rotationsachse, und die erzeugende Curve in irgend einer von denjenigen Lagen, welche sie während der

Erzeugung der Rotationsfläche hat, ist gegeben. Es soll die Rotationsfläche gefunden werden. §. 96.

Die Lage der Rotationsachse sey in rechtwinkligen Coordinaten durch das Gleichungssystem

$$\cos\gamma(x-a) = \cos\alpha z \quad ; \quad \cos\gamma(y-b) = \cos\beta z$$

gegeben, und die erzeugende Curve in einer von denjenigen Lagen, die sie während ihrer Bewegung hat, durch das, auf dasselbe Coordinatensystem sich beziehende Gleichungspaar

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad ; \quad F_2(x, y, z) = 0 \qquad (5)$$

dargestellt. Welches nun auch die gesuchte Gleichung der erzeugten Rotationsfläche seyn mag, so wird sie (vor. Aufg.) die Form

$$z^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = \varphi(\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x) \qquad (1)$$

haben; und da die gegebene Curve in derjenigen Lage, in welcher sie durch die Gleichungen (5), der Voraussetzung nach, ausgedrückt wird, sich auf der Fläche befindet, so müssen, für alle Punkte dieser Curve, die Gleichungen (1) und (5) zugleich bestehen können. Setzen wir nun

$$\cos\gamma z + \cos\beta y + \cos\alpha x = V \quad ; \quad z^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = U, \qquad (6)$$

so ist die Gleichung der Fläche

$$U = \varphi(V) \quad ; \qquad (7)$$

und wenn wir zwischen den vier Gleichungen (5) und (6) die drei Größen x, y und z eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung zwischen U und V, aus welcher sich durch Entwicklung U als eine Function von V ergiebt, wodurch die Form der Function φ in der Gleichung (7), und somit auch in der Gleichung (1) bestimmt, und also die verlangte Gleichung der erzeugten Rotationsfläche gefunden ist.

Wenn die Rotationsachse die Achse der z ist, und die Gleichungen der erzeugenden Curve

$$x = f_1(z) \quad ; \quad y = f_2(z) \qquad (8)$$

sind, so setzen wir, um die Function ψ in der Gleichung

$$y^2 + x^2 = \psi(z) \qquad (3)$$

zu bestimmen,

$$z = V \quad ; \quad y^2 + x^2 = U, \qquad (9)$$

und eliminiren x, y, z zwischen den vier Gleichungen (8), (9), wodurch wir

$$U = \{f_1(V)\}^2 + \{f_2(V)\}^2,$$

und somit

§. 96. $$y^2 + x^2 = \{f_1(z)\}^2 + \{f_2(z)\}^2 \quad (10)$$

als die verlangte Gleichung der erzeugten Rotationsfläche erhalten.

Die Lösung der gegenwärtigen Aufgabe führt uns unmittelbar dazu, die Gleichung einer Rotationsfläche aufzustellen, wenn ihre Meridiancurve in rechtwinkligen Coordinaten, deren Ordinatenachse mit der Rotationsachse coincidirt, ausgedrückt ist. Denn wir können diese Meridiancurve als eine erzeugende Curve der Fläche betrachten, und dann erhalten wir aus den gegebenen Gleichungen

$$\{ x = f_1(z) \quad ; \quad y = 0 \} \quad (11)$$

dieser Meridiancurve, zufolge der Gleichung (10),

$$y^2 + x^2 = \{f_1(z)\}^2 \quad (12)$$

als Gleichung der Rotationsfläche.

Dieselbe Lösung der Aufgabe zeigt uns auch, wie wir aus den gegebenen Gleichungen irgend einer erzeugenden Curve einer Rotationsfläche die Meridiancurve der letztern unmittelbar finden können. Sind nämlich

$$x = f_1(z) \quad ; \quad y = f_2(z) \quad (8)$$

die Gleichungen einer erzeugenden Curve in rechtwinkligen Coordinaten und ist die Achse der z die Rotationsachse, so ist, in Folge der Gleichung (10),

$$x^2 = \{f_1(z)\}^2 + \{f_2(z)\}^2 \quad (13)$$

die Gleichung der Meridiancurve.

Ehe wir uns zu einigen speciellen, die Rotationsflächen betreffenden Aufgaben wenden, wollen wir noch Folgendes bemerken.

Setzen wir voraus, die erzeugende Curve sey, indem sie auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen ist, dessen Achse der z mit der Rotationsachse coincidirt, im Anfange der Bewegung durch die Gleichungen

$$x = f_1(z) \quad ; \quad y = f_2(z) \quad (8)$$

dargestellt, so wird sie in demjenigen Momente der Bewegung, in welchem der Drehungswinkel gleich t geworden ist, zufolge der Transformationsformeln (I. §. 3. F. 9), durch die Gleichungen

$$\cos t \cdot x + \sin t \cdot y = f_1(z) \quad ; \quad -\sin t \cdot x + \cos t \cdot y = f_2(z) \quad (14)$$

ausgedrückt seyn. Lassen wir t von 0 bis 2π continuirlich wachsen, so drücken diese Gleichungen (14) die erzeugende Curve in allen ihren Lagen aus, und wenn wir t zwischen ihnen eliminiren, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 = \{f_1(z)\}^2 + \{f_2(z)\}^2 \quad , \qquad (10) \qquad §. 96.$$

wie oben, als Gleichung derjenigen Fläche, welche die Curve (8) durch ihre Bewegung erzeugt, d. i. als Gleichung der Rotationsfläche. Entwickeln wir, aus den Gleichungen (14), x und y, so kommt

$$x = \cos t \cdot f_1(z) - \sin t \cdot f_2(z) \quad ; \quad y = \sin t \cdot f_1(z) + \cos t \cdot f_2(z) , \qquad (15)$$

und dieses Gleichungssystem stellt ebenfalls die, von der gegebenen Curve (8) erzeugte Rotationsfläche dar, wenn wir darin t veränderlich setzen.

Wird $f_1(z)$ oder $f_2(z)$ für Werthe von z, die zwischen gewissen Grenzen liegen, imaginair, so werden auch, in Folge der Gleichungen (15), x und y, für diese Werthe von z, imaginair werden, da *sin*t und *cos*t, welche reelle Werthe dem t auch beigelegt werden mögen, immer reelle Werthe haben. Wenn aber, was allerdings der Fall seyn kann, der Ausdruck $[f_1(z)]^2 + [f_2(z)]^2$, für die genannten Werthe von z oder für einen Theil derselben, reelle positive Werthe bekommt, so wird die durch die Gleichung (10) ausgedrückte Rotationsfläche nicht gänzlich von der gegebenen Curve (8) erzeugt. Solche Fälle haben wir bereits in §. 49 (Aufg. 69, 70 u. 71) gehabt. Wegen dieses größern Umfanges der Gleichung (10), kann es zuweilen angemessener seyn, statt ihrer sich des Gleichungssystems (14) oder (15) zu bedienen.

Aufgabe [150]. In der Ebene einer Linie zweiten Grades ist eine gerade Linie einer Achse der Curve parallel gezogen; um diese Gerade dreht sich die Curve. Es soll die erzeugte Rotationsfläche gefunden werden.

Wir nehmen die feste Gerade zur Achse der z und die auf dieser Linie senkrechte Achse der Curve zur Achse der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Alsdann ist die Linie zweiten Grades durch die Gleichungen

$$az^2 + bx^2 + 2cx + d = 0 \quad ; \quad y = 0$$

auszudrücken. Die Elimination von x, y, z zwischen diesen beiden Gleichungen und den beiden Gleichungen (9) giebt

$$(aV^2 + bU + d)^2 = 4c^2U \quad ,$$

und wenn wir hierin für V und U respective z und $y^2 + x^2$ setzen, erhalten wir

$$\{az^2 + by^2 + bx^2 + d\}^2 = 4c^2y^2 + 4c^2x^2 \qquad (16)$$

als Gleichung der erzeugten Rotationsfläche, welche demnach vom vierten Grade ist.

§. 96. Wenn die feste Gerade selbst eine Achse der Curve ist, so ist in der Gleichung dieser Linie $c = 0$, wodurch sich die gefundene Gleichung (16) auf

$$az^2 + by^2 + bx^2 + d = 0$$

reducirt. Die erzeugte Rotationsfläche ist alsdann vom zweiten Grade, wie wir bereits wissen.

Aufgabe [151]. Diejenige Rotationsfläche zu finden, welche von einer gleichseitigen Hyperbel erzeugt wird, die sich um eine ihrer Asymptoten drehet.

Es seyen

$$xz = p^2 \quad ; \quad y = 0$$

die Gleichungen der rotirenden Hyperbel, so haben wir

$$x = f_1(z) = \frac{p^2}{z} \quad ; \quad y = f_2(z) = 0 \quad ,$$

demnach, in Folge der Gleichung (10) oder (12),

$$y^2 + x^2 = \frac{p^4}{z^2} \quad \text{oder} \quad y^2z^2 + x^2z^2 = p^4 \tag{17}$$

als Gleichung der gesuchten Rotationsfläche.

Aufgabe [152]. Diejenigen Rotationsflächen zu finden, welche erzeugt werden, wenn die Kettenlinien, deren Gleichungen respective

$$\left\{ x = \tfrac{1}{2}a\left\{e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right\} \quad ; \quad y = 0 \right\} ,$$

$$\left\{ z = \tfrac{1}{2}a\left\{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right\} \quad ; \quad y = 0 \right\}$$

sind, sich um die Achse der z drehen.

I. Für die erste Rotationsfläche finden wir aus der Gleichung (12) unmittelbar

$$y^2 + x^2 = \tfrac{1}{4}a^2\left\{e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right\}^2 . \tag{18}$$

II. Eliminiren wir zwischen dem zweiten gegebenen Gleichungssystem und den Gleichungen (9) x, y und z, so kommt

$$V = \tfrac{1}{2}a\left\{e^{\frac{\sqrt{U}}{a}} + e^{-\frac{\sqrt{U}}{a}}\right\} ,$$

und daraus

$$z = \tfrac{1}{2}a\left\{e^{\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{a}} + e^{-\frac{\sqrt{y^2+x^2}}{a}}\right\} \qquad (19) \qquad \text{§. 96.}$$

als die Gleichung der zweiten Rotationsfläche.

§. 97.

Wir wollen uns wieder eine Curve M von einfacher oder doppelter Krümmung mit einer geraden Linie G fest verbunden vorstellen. Diesem Systeme wollen wir eine solche Bewegung ertheilen, daß die Gerade G sich in ihrer eigenen Richtung fortbewege und daß zugleich das ganze System sich um diese Gerade G drehe, so aber, daß die Winkel, welche irgend eine die Gerade G enthaltende, mit dem Systeme fest verbundene Ebene beschreibt, den Stücken der Geraden G proportional seyen, welche irgend ein Punkt dieser Geraden zurücklegt. Die bei dieser Bewegung von der Curve M erzeugte Fläche nennen wir **Schraubenfläche**, und die Gerade G deren Achse. Eine specielle Art dieser Fläche ist die, bereits in §. 90 betrachtete, **geradlinige Schraubenfläche**.

Aufgabe [153]. *Es soll die allgemeine Gleichung der Schraubenfläche gefunden werden, unter der Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Achse der z die Achse der Fläche ist.*

I. Es ist klar, daß, welches auch die erzeugende Curve M seyn mag, ein jeder Punkt derselben, eine Schraubenlinie beschreiben wird. Wenn nun nr diejenige constante Größe bedeutet, mit welcher man die oben genannten Winkel multipliciren muß, um die ebenfalls genannten Stücke der Achse zu erhalten, und wenn ferner R die Entfernung irgend eines Punktes der erzeugenden Curve von der Achse ist; so wird die von diesem Punkte beschriebene Schraubenlinie, wie wir aus den Gleichungen (14′) des §. 86 finden, durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} z - h &= nr\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) \\ y^2 + x^2 &= R^2 \end{aligned}\right\}$$

ausgedrückt seyn. Für einen andern Punkt der erzeugenden Curve hat, im Allgemeinen, R einen veränderten Werth, und mit diesem ändert sich auch der Werth von h, so daß h eine, von der Gestalt der erzeugenden Curve bestimmte, aber wenn diese unbestimmt gelassen, willkürliche Function von R ist. Wir haben also $h = \varphi(R^2)$ oder, in Folge der zweiten Gleichung des angegebenen Gleichungssystems der Schraubenlinie, $h = \varphi(y^2+x^2)$.

§. 97. Setzen wir diesen Ausdruck in die erste Gleichung des eben genannten Systems, so kommt

$$z = nr\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) + \psi(y^2 + x^2) \quad , \qquad (1)$$

welches die verlangte, allgemeine Gleichung der Schraubenfläche ist.

II. Da es vielleicht nicht vollkommen evident erscheint, daß h immer eine Function von $y^2 + x^2$ ist, und da ferner daraus, daß das vorher angegebene Gleichungssystem nicht nur eine Schraubenlinie, sondern zwei vollkommen gleiche Schraubenlinien ausdrückt (§. 86. S. 14), ein Zweifel entstehn könnte, ob die gefundene Gleichung (1) die richtige sey, so wollen wir sie auf eine andere Weise aufsuchen.

Welches auch die erzeugende Curve seyn mag, so wird sie in dem Anfange der Bewegung durch zwei Gleichungen von der Form

$$x = f_1(z) \quad ; \quad y = f_2(z) \qquad (2)$$

darzustellen seyn. In demjenigen Momente der Bewegung aber, in welchem der Drehungswinkel gleich t geworden ist, und derjenige Punkt des Systems, welcher im Anfange der Bewegung sich im Anfangspunkte der Coordinaten befand, in dem Punkte der Achse z liegt, für welchen $z = nrt$ ist, ist dieselbe Curve, zufolge der oft erwähnten Transformationsformeln, durch die Gleichungen

$$sin t \cdot y + cos t \cdot x = f_1(z - nrt) \quad ; \quad cos t \cdot y - sin t \cdot x = f_2(z - nrt) \quad (3)$$

auszudrücken. Wenn wir diese Gleichungen quadriren und addiren, erhalten wir

$$y^2 + x^2 = \left\{f_1(z - nrt)\right\}^2 + \left\{f_2(z - nrt)\right\}^2 .$$

Stellen wir uns diese Gleichung nach $(z - nrt)$ aufgelöst vor, so haben wir

$$z - nrt = F(y^2 + x^2) \qquad (4)$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichungen (3) ergiebt sich, wenn wir $f_1[F(y^2+x^2)]$ durch $F_1(y^2+x^2)$ u. $f_2[F(y^2+x^2)]$ durch $F_2(y^2+x^2)$ bezeichnen,

$$sin t \cdot y + cos t \cdot x = F_1(y^2 + x^2) \quad ; \quad cos t \cdot y - sin t \cdot x = F_2(y^2 + x^2) \quad ,$$

und nun durch Division, wenn wir $\frac{F_2(y^2 + x^2)}{F_1(y^2 + x^2)}$ mit $\psi(y^2+x^2)$ benennen,

$$\frac{cos t \cdot y - sin t \cdot x}{sin t \cdot y + cos t \cdot x} = \psi(y^2 + x^2) .$$

Setzen wir in den ersten Theil dieser Gleichung $\frac{y}{x} = tang\,\vartheta$, so kommt

$$tang(\vartheta - t) = \psi(y^2 + x^2) \quad ,$$

woraus §. 97.

$$t = \vartheta - arc(tang = \psi(y^2 + x^2))$$

und, weil $\vartheta = arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)$ ist,

$$t = arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) - arc(tang = \psi(y^2 + x^2))$$

folgt. Substituiren wir diesen Ausdruck von t in die Gleichung (4), so kommt

$$z = nr\,arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) + F(y^2 + x^2) - nr\,arc(tang = \psi(y^2 + x^2))$$

oder, wenn wir die Function $F(y^2 + x^2) - nr\,arc(tang = \psi(y^2 + x^2))$ durch $\varphi(y^2 + x^2)$ bezeichnen,

$$z = nr\,arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) + \varphi(y^2 + x^2) \qquad (1)$$

welches die, oben schon gefundene, allgemeine Gleichung der Schraubenfläche ist.

Alle Schraubenflächen (1) haben, wie die geradlinige Schraubenfläche, folgende bemerkenswerthe Eigenschaft. „Werden zwei vollkommen gleiche „Schraubenflächen zur Congruenz gebracht, und wird sodann der einen „Fläche eine solche Bewegung ertheilt, daß, während ihre Achse sich auf „der Achse der andern verschiebt, irgend ein Punkt jener ersten Fläche sich „auf der zweiten fortbewegt, so wird die erste Fläche, obgleich sie in Be„wegung ist, nicht aufhören mit der zweiten Fläche, welche in Ruhe ist, zu „coincidiren." Diese Eigenschaft der Schraubenfläche ergiebt sich durch die Betrachtung ihrer Erzeugung; und kann auch, ganz auf dieselbe Weise wie in §. 90 (S. 441), analytisch erwiesen werden.

Wenn die erzeugende Curve einer Schraubenfläche durch zwei Gleichungen von der Form

$$\psi_1(x, y, z) = 0 \quad ; \quad \psi_2(x, y, z) = 0 \qquad (5)$$

gegeben ist, so können wir, um die Gleichung der erzeugten individuellen Schraubenfläche aufzusuchen, in diese Gleichungen (5)

$sin\,t \cdot y + cos\,t \cdot x$ für x ; $cos\,t \cdot y - sin\,t \cdot x$ für y ; $z - nrt$ für z

setzen, und zwischen den beiden resultirenden Gleichungen t eliminiren. Die Finalgleichung dieser Elimination wird die Gleichung der erzeugten Schrau-

§. 97. benfläche seyn, was aus dem, bei der zweiten Herleitung der Gleichung (1) Gesagten klar ist. — Wir können aber dieselbe Gleichung der, in Rede stehenden, individuellen Schraubenfläche auch dadurch auffinden, daß wir zwischen den Gleichungen (5) und den beiden Gleichungen

$$z - nr\,arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) = V \quad ; \quad y^2 + x^2 = U$$

die drei Größen x, y und z eliminiren, wodurch wir eine Gleichung zwischen V und U erhalten, aus welcher sich, durch Entwicklung, V als Function von U darstellt, und somit die Form der Function φ in der Gleichung (1) bestimmt ist.

Setzen wir

$$\frac{y}{x} = tang\,t \quad \text{und} \quad y^2 + x^2 = u^2 \;,$$

so nimmt die Gleichung (1) die Form

$$z = nr \cdot t + \varphi(u^2) \qquad (6)$$

an. Diese Gleichung (6) drückt ebenfalls die, in Rede stehende Schraubenfläche aus; in derselben bedeutet z die Entfernung irgend eines Punktes der Fläche von der Ebene der xy, u die Entfernung desselben Punktes von der Achse der z, und t den Winkel, welchen die Gerade u mit der Ebene der xz macht.

Eine, die Achse der z enthaltende Ebene ist in dem Coordinatensysteme der tuz durch die Gleichung

$$t = \alpha \;, \qquad (7)$$

in welcher α einen constanten Winkel bedeutet, ausgedrückt. Eliminiren wir t zwischen den Gleichungen (6) und (7), so kommt

$$z - nr \cdot \alpha = \varphi(u^2) \;, \qquad (8)$$

und diese Gleichung stellt die Durchschnittscurve der Schraubenfläche (1) und einer Ebene dar, welche mit der Ebene der xz den Winkel α bildet; es bedeuten z und u, in dieser Gleichung (8), die rechtwinkligen Coordinaten dieser Durchschnittscurve. Für einen andern Werth von α ändert sich zwar die Lage der schneidenden Ebene (7), aber die Gleichung (8) bleibt ungeändert, wenn wir nur den Anfangspunkt der z gehörig verlegen. Daraus folgt, daß alle, die Achse der z enthaltenden, ebenen Durchschnitte der Fläche (1) vollkommen gleiche Curven sind; und eine solche Curve kann auch als die erzeugende Curve der Schraubenfläche genommen werden. Wir

werden diese Curve von einfacher Krümmung das **Profil** der Schraubenfläche nennen. §. 97.

Setzen wir in der Gleichung (6) z constant, also $z = c$, so kommt

$$nrt - c + \varphi(u^2) = 0 \; , \quad \text{oder} \quad nr\left(t - \frac{c}{nr}\right) + \varphi(u^2) = 0 \; , \quad (9)$$

und diese Gleichung drückt, in **Polarcoordinaten**, diejenige Curve aus, in welcher die Fläche (1) von einer, auf der Achse der z senkrechten Ebene geschnitten wird. Für einen andern Werth von c ändert sich zwar die Entfernung der schneidenden Ebene von der Ebene der xy, aber die Gleichung (9) bleibt unverändert, wenn wir nur die Achse, von welcher an die t gezählt werden, gehörig verlegen. Daraus folgt, daß alle, auf der Achse der z senkrechten, ebenen Durchschnitte der Fläche (1) vollkommen gleiche Curven sind; und eine solche Curve kann auch als die erzeugende Curve der Schraubenfläche genommen werden. Wir werden diese ebene Curve die **Basis** der Schraubenfläche nennen.

Wenn

$$y = 0 \quad ; \quad z = f(x)$$

die Gleichungen des Profils einer Schraubenfläche sind, so erhalten wir, nach dem oben angegebenen Verfahren,

$$z = nr\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) + f(\sqrt{y^2 + x^2})$$

als Gleichung dieser Schraubenfläche. Setzen wir hierin

$$z = 0 \quad ; \quad \frac{y}{x} = tang\, t \quad ; \quad y^2 + x^2 = u^2 \quad ,$$

so ergiebt sich

$$nr \cdot t + f(u) = 0$$

als Polargleichung der Basis derselben Schraubenfläche.

Wir können also aus der Gleichung $\Phi(x, z) = 0$ des Profils einer Schraubenfläche die Polargleichung $\Psi(t, u) = 0$ der Basis dieser Fläche unmittelbar erhalten, wenn wir für z und x respective $-nr \cdot t$ und u setzen; und umgekehrt können wir aus der Polargleichung $\Psi(t, u) = 0$ der Basis, die Gleichung des Profils $\Phi(x, z) = 0$ ableiten, indem wir für t und u respective $-\frac{z}{nr}$ und x setzen.

Ist das Profil ein Kreis, dessen Gleichungen

$$\left\{ \quad z^2 + (x - a)^2 = \varrho^2 \quad ; \quad y = 0 \quad \right\}$$

§. 97. sind, so ist die Polargleichung der Basis

$$n^2r^2t^2 + (u-a)^2 = \varrho^2 \quad ,$$

während die Gleichung der Schraubenfläche

$$z = nr\,arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) \pm \sqrt{\left\{\varrho^2 - y^2 - x^2 - a^2 + 2a\sqrt{y^2 + x^2}\right\}}$$

ist (vergl. §. 94. G. 22).

Ist die Basis eine Ellipse, deren Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad ,$$

so erhalten wir durch Verwandlung in Polarcoordinaten

$$(a^2 sin^2 t + b^2 cos^2 t)u^2 = a^2b^2 \quad ,$$

und demnach

$$\left(a^2 sin^2 \frac{z}{nr} + b^2 cos^2 \frac{z}{nr}\right)x^2 = a^2b^2$$

als Gleichung des Profils, während die Gleichung der Schraubenfläche

$$\left\{a^2 cos^2 \frac{z}{nr} + b^2 sin^2 \frac{z}{nr}\right\}y^2 - 2(a^2 - b^2) sin \frac{z}{nr} cos \frac{z}{nr} xy$$

$$+ \left\{a^2 sin^2 \frac{z}{nr} + b^2 cos^2 \frac{z}{nr}\right\}x^2 = a^2b^2 \qquad (10)$$

ist.

Ist die Basis eine archimedische Spirale, deren Gleichung

$$at = u \quad ,$$

so ist das Profil eine gerade Linie, deren Gleichung

$$az + nrx = 0$$

ist (vergl. §. 90. Aufg. 133).

Ist die Basis eine hyperbolische Spirale, deren Gleichung

$$ut = a \quad ,$$

so ist das Profil eine gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung

$$xz = -nra.$$

Ist die Basis eine logarithmische Spirale, deren Gleichung

$$t = m\,log\frac{u}{\varrho} \quad ,$$

so ist das Profil eine logarithmische Linie, deren Gleichung

$$z = -mnr\,log\frac{x}{\varrho}$$

ist.

Schneiden sich zwei Schraubenflächen, deren Achsen coincidiren, und für welche der Coefficient nr denselben Werth hat, so besteht die Durchschnittscurve aus einer oder mehreren Schraubenlinien. Denn sind §. 97.

$$z + h = nr\, arc\left(tg = \frac{y}{x}\right) + \varphi(y^2 + x^2)$$

$$z + h' = nr\, arc\left(tg = \frac{y}{x}\right) + \psi(y^2 + x^2)$$

die beiden Gleichungen der genannten Flächen, so erhalten wir durch Elimination von z

$$h - h' = \varphi(y^2 + x^2) - \psi(y^2 + x^2)\,,$$

eine Gleichung, aus welcher $y^2 + x^2$ einen oder mehrere (reelle oder imaginaire) Werthe erhält. Bezeichnen wir einen dieser (reellen) Werthe durch a, so haben wir

$$y^2 + x^2 = a^2$$

und durch Substitution in die Gleichung der ersten Fläche, wenn wir zugleich, indem wir den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen, z für $z + h - \varphi(a^2)$ setzen,

$$\left\{\ y^2 + x^2 = a^2 \quad ; \quad z = nr\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)\ \right\}$$

wodurch eine Schraubenlinie ausgedrückt ist (§. 86. S. 14').

§. 98.

In den vorhergehenden §§. sind wir zu allgemeinen Gleichungen von Flächen mit einer und auch mit zwei willkürlichen Functionen eines und desselben Ausdrucks gelangt; und wir haben gesehen, wie bei der Bestimmung dieser Functionen zu verfahren ist. Durch andere Erzeugungsarten kann man aber auch zu Gleichungen von Flächen mit drei und noch mehreren willkürlichen Functionen eines und desselben Ausdrucks gelangen. Die Bestimmung dieser Functionen, deren Anzahl wir durch n bezeichnen wollen, ist, im Allgemeinen, immer zu bewerkstelligen, wenn eine gleiche Anzahl n Curven gegeben ist, welche auf der Fläche liegen sollen. Denn setzen wir den, unter den Functionszeichen befindlichen Ausdruck gleich U, und betrachten die n Functionen selbst als eben so viele unbekannte Größen, so ist die Gleichung der in Rede stehenden Fläche eine Gleichung zwischen x, y, z und diesen n Größen; und neben dieser Gleichung existirt eine zweite Gleichung, deren erster Theil die eben genannte Functionalgröße (d. i. der unter den Functionszeichen befindliche Ausdruck), und deren zweiter Theil U ist. Das Gleichungssystem einer der gegebenen Curven bestehet aber aus zwei

§. 98. Gleichungen zwischen x, y und z. Wenn wir also zwischen den jetzt genannten vier Gleichungen x, y und z eliminiren, so erhalten wir eine Finalgleichung, welche nicht mehr x, y und z, sondern nur die n willkürlichen Functionen, als eben so viele unbekannte Größen, und außerdem die Größe U enthält. Verfahren wir mit dem Gleichungssystem einer jeden der gegebenen n Curven wie mit dem genannten, so erhalten wir, in Allem, n Finalgleichungen von der erwähnten Art, und somit diejenige Anzahl, welche nöthig und, im Allgemeinen, hinreichend ist, die n unbekannten Größen, d. i. die n willkürlichen Functionen zu finden. Durch die Entwickelung dieser unbekannten Größen erhalten wir nämlich für eine jede einen bestimmten Ausdruck in U, welcher die Form der gesuchten Function darstellt.

Die nächstfolgenden Aufgaben enthalten Beispiele von Flächen, in deren Gleichungen drei und noch mehr willkürliche Functionen vorkommen.

Aufgabe [154].* Es ist eine Ebene E und eine sie schneidende Gerade G gegeben. Eine sich verändernde Linie zweiten Grades bewegt sich so, daß ihre Ebene der Ebene E parallel bleibt und daß ihr Mittelpunkt die Gerade G beschreibt. Es soll die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Nehmen wir die Gerade G zur Achse der z, und die Ebene E zur Ebene der xy, so muß die auf dieses Coordinatensystem bezogene Gleichung der Fläche, zufolge der Bedingungen der Aufgabe, offenbar so beschaffen seyn, daß sie, wenn darin z constant gesetzt wird, die Gestalt

$$ay^2 + bxy + cx^2 + 1 = 0$$

annimmt; und demnach ist die verlangte allgemeine Gleichung

$$\varphi_1(z) \cdot y^2 + \varphi_2(z) \cdot xy + \varphi_3(z) \cdot x^2 + 1 = 0 \quad , \qquad (1)$$

wo $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ und $\varphi_3(z)$ drei willkürliche Functionen von z bezeichnen.

Setzen wir, um specielle Fälle dieser Gattung zu erhalten, daß $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ und $\varphi_3(z)$ gebrochene rationale Functionen mit constanten Zählern und einem und demselben Nenner vom ersten oder vom zweiten Grade seyen, so stellt die Gleichung (1) eine Fläche zweiten Grades dar. — Setzen wir

$$\varphi_1(z) = -\frac{a^2}{r^2 z^2} \;;\quad \varphi_2(z) = 0 \;;\quad \varphi_3(z) = -\frac{1}{r^2} \;,$$

so ist die auf diese Weise particularisirte Gleichung (1)

$$a^2y^2 + z^2x^2 = r^2z^2 \quad ,$$

und drückt also den kegelförmigen Keil aus (§. 87 G. 10). — Setzen wir

$$\varphi_1(z) = -\frac{h^2}{r^2(z-h)^2} \quad ; \quad \varphi_2(z) = 0 \quad ; \quad \varphi_3(z) = -\frac{h^2}{r^2(z+h)^2} \quad ,$$

§. 98.

so ist die particularisirte Gleichung (1)

$$h^2(z+h)^2y^2 + h^2(z-h)^2x^2 = r^2(z+h)^2(z-h)^2 \quad ,$$

und drückt die Fläche (16) des §. 87 aus. — Setzen wir

$$\varphi_1(z) = -\frac{tg^2\gamma}{(z-b)^2} \quad ; \quad \varphi_2(z) = 0 \quad ; \quad \varphi_3(z) = \frac{1}{z^2} \quad ,$$

so kommt die particularisirte Gleichung (1)

$$(z^2+x^2)(z-b)^2 = tang^2\gamma \cdot z^2y^2 \quad ,$$

welches die Gleichung der Fläche (12) des §. 89 ist. — Setzen wir

$$\varphi_1(z) = -\left(\frac{1}{b^2}cos^2\frac{z}{nr} + \frac{1}{a^2}sin^2\frac{z}{nr}\right) \quad ; \quad \varphi_3(z) = -\left(\frac{1}{b^2}sin^2\frac{z}{nr} + \frac{1}{a^2}cos^2\frac{z}{nr}\right)$$

$$\varphi_2(z) = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)sin\frac{2z}{nr} \quad ,$$

so erhalten wir als particularisirte Gleichung diejenige des §. 97 (S. 10).

Die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 in der Gleichung (1) werden bestimmt, wenn drei Linien gegeben sind, welche auf der Fläche liegen. Nehmen wir z. B. an, die Fläche soll die drei Geraden enthalten, welche respective durch die Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{matrix} x = \alpha \\ \beta z + \gamma y = 0 \end{matrix}\right\} \; ; \; \left\{\begin{matrix} x = \alpha \\ \beta z - \gamma y = 0 \end{matrix}\right\} \; ; \; \left\{\begin{matrix} y = \beta \\ \alpha z - \gamma x = 0 \end{matrix}\right\}$$

ausgedrückt sind, so haben wir, wenn wir y und x zwischen der Gleichung (1) und einem jeden dieser Gleichungssysteme eliminiren, und der Kürze wegen, φ_1, φ_2, φ_3 respective für $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ schreiben,

$$\varphi_1\beta^2z^2 - \varphi_2\alpha\beta\gamma z + \varphi_3\alpha^2\gamma^2 + \gamma^2 = 0 \quad ,$$
$$\varphi_1\beta^2z^2 + \varphi_2\alpha\beta\gamma z + \varphi_3\alpha^2\gamma^2 + \gamma^2 = 0 \quad ,$$
$$\varphi_1\beta^2\gamma^2 + \varphi_2\alpha\beta\gamma z + \varphi_3\alpha^2z^2 + \gamma^2 = 0 \quad ,$$

drei Gleichungen, aus welchen wir

$$\varphi_1(z) = -\frac{\gamma^2}{\beta^2(z^2+\gamma^2)} \quad ; \quad \varphi_2(z) = 0 \quad ; \quad \varphi_3(z) = -\frac{\gamma^2}{\alpha^2(z^2+\gamma^2)}$$

erhalten. Und wenn wir diese Functionen in die allgemeine Gleichung (1) substituiren, so wird sie in

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{z^2}{\gamma^2}$$

particularisirt und drückt alsdann ein hyperbolisches Hyperboloid aus.

§. 98. **Aufgabe [155].** *Es ist eine Linie zweiten Grades C gegeben. Eine veränderliche Linie zweiten Grades bewegt sich so, daß ihre Ebene der Ebene der Curve C parallel, sie selbst aber dieser Curve homothetisch bleibt. Es soll die Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.*

Wir nehmen die Ebene der gegebenen Curve C zur Ebene der xz, und es sey

$$z^2 + mxz + nx^2 + pz + qx + r = 0$$

die Gleichung dieser Curve C. Eine jede, in einer der Ebene der xz parallelen Ebene, y = h, befindliche, der Curve C homothetische Linie zweiten Grades ist durch das Gleichungssystem

$$\left\{ z^2 + mxz + nx^2 + p'z + q'x + r' = 0 \;;\; y = h \right\}$$

auszudrücken. Es muß also die gesuchte Gleichung der erzeugten Fläche so beschaffen seyn, daß sie, wenn in ihr y gleich irgend einer Constanten gesetzt wird, in eine Gleichung vom zweiten Grade

$$z^2 + mxz + nx^2 + p'z + q'x + r' = 0$$

übergehet, in welcher die Glieder zweier Dimensionen die gegebenen Coefficienten 1, m und n haben. Dies ist aber offenbar nur der Fall, wenn die Gleichung der Fläche die Form

$$z^2 + mxz + nx^2 + \varphi_1(y) \cdot z + \varphi_2(y) \cdot x + \varphi_3(y) = 0 \qquad (2)$$

hat, in welcher $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ drei willkürliche Functionen von y bezeichnen. Diese Gleichung (2) ist die gesuchte Gleichung der erzeugten Fläche.

Die drei willkürlichen Functionen werden bestimmt, wenn drei, auf der Fläche befindliche Curven gegeben sind. Nehmen wir, um ein Beispiel einer solchen Bestimmung zu haben, an, daß die Fläche (2) die drei Geraden enthalten soll, welche durch die Gleichungssysteme

$$\left\{ \begin{array}{c} z = \gamma \\ \alpha y + \beta x = 0 \end{array} \right\} ; \quad \left\{ \begin{array}{c} z = -\gamma \\ \alpha y - \beta x = 0 \end{array} \right\} ; \quad \left\{ \begin{array}{c} x = +\alpha \\ \beta z + \gamma y = 0 \end{array} \right\}$$

ausgedrückt werden, und welche drei erzeugende Gerade des, durch die Gleichung

$$\frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$$

ausgedrückten hyperbolischen Hyperboloids sind. Die Elimination von x und z zwischen der Gleichung (2) und einem jeden der genannten drei Gleichungs-

chungssysteme giebt, wenn wir, um abzukürzen, φ_1, φ_2, φ_3 statt $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ schreiben, §. 98.

$$\gamma^2 y^2 + m\alpha\beta\gamma y + n\alpha^2\beta^2 - \beta\gamma y\varphi_1 - \alpha\beta^2\varphi_2 + \beta^2\varphi_3 = 0 \quad ,$$
$$n\alpha^2 y^2 - m\alpha\beta\gamma y + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\gamma\varphi_1 - \alpha\beta y\varphi_2 + \beta^2\varphi_3 = 0 \quad ,$$
$$n\alpha^2 y^2 - m\alpha\beta\gamma y + \beta^2\gamma^2 - \beta^2\gamma\varphi_1 + \alpha\beta y\varphi_2 + \beta^2\varphi_3 = 0 \quad .$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich für φ_1, φ_2, φ_3 die gesuchten Ausdrücke in y, und substituiren wir dieselben in (2), so kommt

$$\left.\begin{array}{l}\beta\gamma[\alpha\beta(z^2-\gamma^2)(y^2+\beta^2)+\gamma(\alpha yz+\beta\gamma x)(y^2-\beta^2)] \\ +m\alpha\beta\gamma[(\beta xz+\alpha\gamma y)(y^2+\beta^2)+2\beta y(\alpha yz+\beta\gamma x)] \\ +n\alpha[\gamma(\beta^2x^2-\alpha^2y^2)(y^2+\beta^2)-\alpha\beta(\alpha yz+\beta\gamma x)(y^2-\beta^2)]\end{array}\right\} = 0$$

als Gleichung der zu bestimmenden Fläche, welche also, im Allgemeinen, vom vierten Grade ist. — Bleiben die drei gegebenen Geraden ungeändert dieselben, und fehlt nur das zweite Glied in der Gleichung der gegebenen Linie zweiten Grades, so ist $m = 0$, und die gefundene Gleichung reducirt sich zwar, bleibt aber dennoch vom vierten Grade. Ist indessen in der gegebenen Gleichung der Linie zweiten Grades, außer $m = 0$ auch $n = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}$, so verwandelt sich die gefundene Gleichung in

$$\alpha^2\beta^2(z^2-\gamma^2)(y^2+\beta^2)+\gamma^2(\beta^2x^2-\alpha^2y^2)(y^2+\beta^2) = 0 \quad ,$$

und zerfällt in zwei Factoren, von welchen der eine, $y^2+\beta^2 = 0$, zwei parallele, imaginaire Ebenen, und der andere,

$$\alpha^2\beta^2z^2-\alpha^2\gamma^2y^2+\beta^2\gamma^2x^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \quad ,$$

das vorher genannte hyperbolische Hyperboloid ausdrückt.

Nehmen wir rechtwinklige Coordinaten an, und setzen in der Gleichung (2), $m = 0$ und $n = 1$, so drückt die dadurch hervorgehende allgemeine Gleichung

$$z^2 + x^2 + z\cdot\varphi_1(y) + x\cdot\varphi_2(y) + \varphi_3(y) = 0 \qquad (3)$$

alle Flächen aus, welche von jeder Ebene, welche der Ebene der xz parallel ist, in einem Kreise geschnitten wird.

Aufgabe [156]. Die allgemeine Gleichung der Fläche zu finden, welche von einem veränderlichen Kreise erzeugt wird, dessen Ebene sich um die Achse der z drehet.

Unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten finden wir, ganz auf dieselbe Weise wie in der Aufgabe 143 des §. 94,

$$x^2\left\{z-\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2+(y^2+x^2)\left\{x-\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)\right\}^2+x^2\cdot\varphi_3\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad (4)$$

als die gesuchte Gleichung der erzeugten Fläche.

§. 98. **Aufgabe [157].** Die allgemeine Gleichung der Fläche zu finden, welche eine sich verändernde Parabel erzeugt, deren Ebene sich einer gegebenen Ebene parallel fortbewegt.

Nehmen wir die gegebene Ebene zur Ebene der xy, so muß die gesuchte Gleichung so beschaffen seyn, daß sie, wenn wir z constant setzen, die Form

$$y^2 + 2bxy + b^2x^2 + dy + ex + f = 0$$

annimmt. Die verlangte Gleichung ist daher

$$y^2 + 2\varphi_1(z)\cdot xy + (\varphi_1(z))^2\cdot x^2 + \varphi_2(z)\cdot y + \varphi_3(z)\cdot x + \varphi_4(z) = 0\ , \quad (5)$$

welche, wie wir sehen, vier willkürliche Functionen enthält.

Wollen wir, daß die Fläche (5) die vier Geraden enthalten soll, welche durch die Gleichungssysteme

$$\left\{\begin{array}{c} x = a \\ y = 0 \end{array}\right\}\ ;\ \left\{\begin{array}{c} x = -a \\ y = 0 \end{array}\right\}\ ;\ \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = mz \end{array}\right\}\ ;\ \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = -nz \end{array}\right\}$$

dargestellt werden, so erhalten wir, durch Elimination von x und y zwischen der Gleichung (5) und einem jeden dieser vier Gleichungssysteme, vier Gleichungen, aus welchen wir $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, $\varphi_4(z)$ bestimmen, und dadurch zwei solche individuelle Flächen finden, welche durch die Gleichung

$$a^2y^2 \pm 2\sqrt{mn}\cdot axyz + mnx^2z^2 + (n-m)a^2yz - mna^2z^2 = 0$$

ausgedrückt sind.

Aufgabe [158]. Die allgemeine Gleichung der Fläche zu finden, welche eine sich verändernde Linie zweiten Grades erzeugt, deren Ebene sich einer gegebenen Ebene parallel fortbewegt.

Nehmen wir die gegebene Ebene zur Ebene der xy, so finden wir ohne Mühe

$$y^2 + xy\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + y\varphi_3(z) + x\varphi_4(z) + \varphi_5(z) = 0$$

als die verlangte allgemeine Gleichung, welche fünf willkürliche Functionen enthält.

§. 99.

Nachdem wir in dem Vorhergehenden gesehen haben, wie eine Reihe von Flächen, welche von einer gegebenen, sich nach einem, zum Theil wenigstens, unbestimmt gelassenen Gesetze bewegenden und verändernden Curve erzeugt werden, durch eine Gleichung mit einer oder mehreren willkürlichen Functionen eines und desselben Ausdrucks dargestellt werden kann, wollen wir den umgekehrten Fall betrachten, denjenigen nämlich, in welchem eine

Gleichung zwischen den rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten x, y, z mit einer oder mehreren willkürlichen Functionen eines und desselben Ausdruckes in x, y, z gegeben ist, und nach der Erzeugung aller, durch diese Gleichung ausgedrückten Flächen gefragt wird. §. 99.

Wir wollen die eben genannte, gegebene Gleichung durch

$$N = 0 \qquad (1)$$

bezeichnen, wo N einen bestimmten Ausdruck bedeutet, welcher die veränderlichen Größen x, y, z und eine gewisse Anzahl, n, willkürlicher Functionen $\varphi_1(M)$, $\varphi_2(M)$,.... $\varphi_n(M)$ eines und desselben gegebenen, mit M bezeichneten Ausdruckes in x, y, z enthält. Setzen wir M constant und gleich a, so werden die Functionen $\varphi_1(M)$, $\varphi_2(M)$, ꝛc. gewisse von a abhängende, constante Werthe erhalten, die, obgleich sie constant sind, doch als willkürlich betrachtet werden müssen, weil die Functionen φ_1, φ_2, ꝛc. willkürlich zu bestimmende sind. Die Gleichung (1) wird also durch die Annahme von $M = a$ zu einer Gleichung zwischen x, y und z mit n willkürlichen Constanten, die sämmtlich, wenngleich nach willkürlichen Gesetzen, von a abhängen. Bezeichnen wir die Gleichung (1) in diesem Stande durch $N_a = 0$, so haben wir das System der beiden gleichzeitigen Gleichungen

$$\left\{ M = a \;;\; N_a = 0 \right\}, \qquad (2)$$

durch welches, im Allgemeinen, eine Curve im Raume dargestellt wird. Legen wir dem a immer andere und andere Werthe bei, so wird das Gleichungssystem (2) immer andere und andere Curven ausdrücken, d. i. die Curve (2) wird sich mit a verändern. Eliminiren wir aber a zwischen den beiden Gleichungen des Systems (2), so erhalten wir die Gleichung (1) wieder. Die gegebene Gleichung (1) drückt daher diejenige Fläche aus, welche durch die Curve (2) erzeugt wird, indem sich diese nach einem gewissen Gesetze ändert, das, in so weit es von der Form der Functionen φ_1, φ_2, ꝛc. abhängt, unbestimmt bleibt.

Wäre z. B. die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

von welcher wir wissen, daß sie alle Kegelflächen ausdrückt, deren Mittelpunkte im Anfangspunkte der Coordinaten liegen, unbekannt; so würden wir, um die Erzeugungsart der Fläche zu finden, $\frac{y}{x} = a$ setzen, daraus das Gleichungssystem

§. 99.

$$y = ax \quad ; \quad z = \varphi(a) \cdot x$$

erhalten, welches eine durch den Anfangspunkt gehende, sich nach dem, durch die Function $\varphi(a)$ ausgedrückten Gesetze bewegende Gerade darstellt, und daraus schließen, daß die Flächen, welche durch die Gleichung $\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ dargestellt sind, durch die Bewegung einer, durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden erzeugt werden können.

Die folgenden Aufgaben enthalten noch einige Beispiele zu dem eben Gesagten.

Aufgabe [159]. *Es soll die Erzeugung der Flächen gefunden werden, welche, in rechtwinkligen Coordinaten, durch die allgemeine Gleichung*

$$z^2\varphi_1(y^2+x^2)+y^2\varphi_2(y^2+x^2)+x^2\varphi_3(y^2+x^2) = 1 \qquad (3)$$

dargestellt werden.

Setzen wir $y^2+x^2 = a$, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$y^2+x^2 = a, \ (4) \quad ; \quad \varphi_1(a)z^2+\varphi_2(a)y^2+\varphi_3(a)x^2 = 1 \ , \qquad (5)$$

wodurch eine Curve dargestellt wird, welche die Durchschnittslinie eines Kreiscylinders (4), dessen Achse die Achse der z, und einer Fläche zweiten Grades (5) ist, deren Achsen auf den Coordinatenachsen liegen. Jener Cylinder und diese Fläche verändern sich mit dem Werthe von a, so aber, daß die Variation dieser Flächen gegenseitig von einem Gesetze abhängt, welches so lange die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 nicht bestimmt werden, willkürlich ist. Die Fläche (3) wird also durch eine Curve doppelter Krümmung erzeugt, welche die Durchschnittslinie eines Kreiscylinders und einer Fläche zweiten Grades ist, die auf diejenige Weise von einander abhängen, welche die Gleichungen (4) und (5) aussprechen.

Aufgabe [160]. *Es soll die Erzeugung der Flächen gefunden werden, welche die Gleichung*

$$z^2+\varphi_1(z^2+y^2+x^2)\cdot y^2+\varphi_2(z^2+y^2+x^2)\cdot x^2+\varphi_3(z^2+y^2+x^2)\cdot yz$$
$$+\varphi_4(z^2+y^2+x^2)\cdot xz+\varphi_5(z^2+y^2+x^2)\cdot xy = 0 \qquad (6)$$

in rechtwinkligen Coordinaten, ausdrückt.

Setzen wir $z^2+y^2+x^2 = a$, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$z^2+y^2+x^2 = a \ ; \ z^2+\varphi_1(a)y^2+\varphi_2(a)x^2+\varphi_3(a)yz+\varphi_4(a)xz+\varphi_5(a)xy = 0,$$

wodurch eine sphärische Linie zweiten Grades dargestellt wird, welche die Durchschnittscurve einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, und einer Kegelfläche zweiten Grades ist, deren Schei-

tel sich in demselben Anfangspunkte befindet. Hierdurch ist die Erzeugung der Flächen (6) ausgesprochen. §. 99.

§. 100.

Da eine Gleichung, welche eine oder mehrere willkürliche Functionen eines und desselben Ausdruckes enthält, unendlich viele Gleichungen in sich begreift, von welchen eine jede eine individuelle Fläche darstellt; so kann, wenn zwei solche allgemeine Gleichungen gegeben sind, gefragt werden, welche individuelle Fläche wird sowohl durch die eine der gegebenen Gleichungen als durch die andere dargestellt. Man sieht leicht ein, daß diese Frage mit der Aufgabe übereinkommt, in welcher diejenige Fläche gesucht wird, welche auf zwei verschiedene, gegebene Erzeugungsarten hervor gebracht werden kann. Von dergleichen Fragen enthalten die folgenden Aufgaben, die wir, ohne die Differentialrechnung in Anspruch zu nehmen, lösen wollen, einige Beispiele.

Aufgabe [161]. Welche Fläche wird in rechtwinkligen Coordinaten sowohl durch die Gleichung $\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ als durch die Gleichung $z = \psi(y^2+x^2)$ dargestellt?

Diese Aufgabe läßt sich offenbar auch so ausdrücken: Welche Kegelfläche ist eine Rotationsfläche, deren Achse durch den Scheitel des Kegels geht? und ist schon im §. 34 gelöst. Wir wollen hier aber die Frage auf einem allgemeineren Wege behandeln.

Führen wir statt der unabhängig-veränderlichen Größen x und y zwei neue Unabhängig-Veränderliche v und u durch die Gleichungen

$$\frac{y}{x} = v \quad ; \quad y^2+x^2 = u^2$$

ein, woraus wir

$$x = \frac{u}{\sqrt{1+v^2}} \quad ; \quad y = \frac{uv}{\sqrt{1+v^2}}$$

erhalten, so gehen die gegebenen Gleichungen in

$$z = \frac{u}{\sqrt{1+v^2}}\cdot\varphi(v) \quad ; \quad z = \psi(u^2)$$

über. Durch Elimination von z ergiebt sich

$$\frac{\varphi(v)}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{\psi(u^2)}{u}\,, \tag{1}$$

eine Gleichung, zufolge welcher v und u von einander abhängig seyn wür-

§. 97. sind, so ist die Polargleichung der Basis

$$n^2r^2t^2 + (u - a)^2 = \varrho^2 \quad ,$$

während die Gleichung der Schraubenfläche

$$z = nr \, arc\left(tang \pm \frac{y}{x}\right) \pm \sqrt{\left\{\varrho^2 - y^2 - x^2 - a^2 + 2a\sqrt{y^2 + x^2}\right\}}$$

ist (vergl. §. 94. G. 22).

Ist die Basis eine Ellipse, deren Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad ,$$

so erhalten wir durch Verwandlung in Polarcoordinaten

$$(a^2 sin^2 t + b^2 cos^2 t)u^2 = a^2b^2 \quad ,$$

und demnach

$$\left(a^2 sin^2 \frac{z}{nr} + b^2 cos^2 \frac{z}{nr}\right)x^2 = a^2b^2$$

als Gleichung des Profils, während die Gleichung der Schraubenfläche

$$\left\{a^2 cos^2 \frac{z}{nr} + b^2 sin^2 \frac{z}{nr}\right\}y^2 - 2(a^2 - b^2) sin \frac{z}{nr} cos \frac{z}{nr} xy$$

$$+ \left\{a^2 sin^2 \frac{z}{nr} + b^2 cos^2 \frac{z}{nr}\right\}x^2 = a^2b^2 \qquad (10)$$

ist.

Ist die Basis eine archimedische Spirale, deren Gleichung

$$at = u \quad ,$$

so ist das Profil eine gerade Linie, deren Gleichung

$$az + nrx = 0$$

ist (vergl. §. 90. Aufg. 133).

Ist die Basis eine hyperbolische Spirale, deren Gleichung

$$ut = a \quad ,$$

so ist das Profil eine gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung

$$xz = -nra.$$

Ist die Basis eine logarithmische Spirale, deren Gleichung

$$t = m \, log \frac{u}{\varrho} \quad ,$$

so ist das Profil eine logarithmische Linie, deren Gleichung

$$z = -mnr \, log \frac{x}{\varrho}$$

ist.

Schneiden sich zwei Schraubenflächen, deren Achsen coincidiren, und für welche der Coefficient nr denselben Werth hat, so besteht die Durchschnittscurve aus einer oder mehreren Schraubenlinien. Denn sind §. 97.

$$z + h = nr\, arc\left(tg = \frac{y}{x}\right) + \varphi(y^2 + x^2)$$

$$z + h' = nr\, arc\left(tg = \frac{y}{x}\right) + \psi(y^2 + x^2)$$

die beiden Gleichungen der genannten Flächen, so erhalten wir durch Elimination von z

$$h - h' = \varphi(y^2 + x^2) - \psi(y^2 + x^2),$$

eine Gleichung, aus welcher $y^2 + x^2$ einen oder mehrere (reelle oder imaginaire) Werthe erhält. Bezeichnen wir einen dieser (reellen) Werthe durch a, so haben wir

$$y^2 + x^2 = a^2$$

und durch Substitution in die Gleichung der ersten Fläche, wenn wir zugleich, indem wir den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen, z für $z + h - \varphi(a^2)$ setzen,

$$\left\{ y^2 + x^2 = a^2 \quad ; \quad z = nr\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) \right\}$$

wodurch eine Schraubenlinie ausgedrückt ist (§. 86. G. 14').

§. 98.

In den vorhergehenden §§. sind wir zu allgemeinen Gleichungen von Flächen mit einer und auch mit zwei willkürlichen Functionen eines und desselben Ausdrucks gelangt; und wir haben gesehen, wie bei der Bestimmung dieser Functionen zu verfahren ist. Durch andere Erzeugungsarten kann man aber auch zu Gleichungen von Flächen mit drei und noch mehreren willkürlichen Functionen eines und desselben Ausdrucks gelangen. Die Bestimmung dieser Functionen, deren Anzahl wir durch n bezeichnen wollen, ist, im Allgemeinen, immer zu bewerkstelligen, wenn eine gleiche Anzahl n Curven gegeben ist, welche auf der Fläche liegen sollen. Denn setzen wir den, unter den Functionszeichen befindlichen Ausdruck gleich U, und betrachten die n Functionen selbst als eben so viele unbekannte Größen, so ist die Gleichung der in Rede stehenden Fläche eine Gleichung zwischen x, y, z und diesen n Größen; und neben dieser Gleichung existirt eine zweite Gleichung, deren erster Theil die eben genannte Functionalgröße (d. i. der unter den Functionszeichen befindliche Ausdruck), und deren zweiter Theil U ist. Das Gleichungssystem einer der gegebenen Curven bestehet aber aus zwei

§. 100. chung constant seyn. Setzen wir sie, der Reihe nach, gleich C_1, $2C_2$, C_3, wodurch diese Gleichung in

$$\psi(z) = C_1 + 2C_2 z + C_3 z^2 \qquad (14)$$

übergeht, so haben wir die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (a^2\nu^2 - C_1)\varphi_1^2 + 2a\nu^2\varphi_1 + 1 + \nu^2 &= 0 \ , \\ (1 + \nu^2 + a\nu^2\varphi_1)\varphi_2 &= [n\nu + (C_2 + na\nu)\varphi_1]\varphi_1 \ , \\ (1 + \nu^2)\varphi_2^2 - 2n\nu\varphi_1\varphi_2 + (n^2 - C_3)\varphi_1^2 &= 0 \ , \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

und wenn wir zwischen ihnen φ_1 und φ_2 eliminiren,

$$(C_2^2 + C_3a^2 - C_1C_3)\nu^2 + 2C_2na\nu + C_2^2 + n^2C_1 - C_1C_3 = 0 \ .$$

Aus dieser letzten Gleichung würde aber ν zwei constante Werthe erhalten, wenn nicht sämmtliche Coefficienten gleich Null sind. Setzen wir daher

$$C_2^2 + C_3a^2 - C_1C_3 = 0 \ ; \ C_2na = 0 \ ; \ C_2^2 + n^2C_1 - C_1C_3 = 0 \ ,$$

so erhalten wir

entweder (I) $C_1 = 0$; $C_2 = 0$; $C_3 = 0$,
oder (II) $C_1 = a^2$; $C_2 = 0$; $C_3 = n^2$.

I. Legen wir den Constanten C_1, C_2, C_3 die Werthe (I) bei, so ist eine jede der drei Gleichungen (15) eine Folge der beiden übrigen, und wir finden aus ihnen

$$\varphi_1(\nu) = -\frac{1}{a}\left(1 \pm \frac{1}{\nu}\sqrt{-1}\right) \ ; \ \varphi_2(\nu) = -\frac{n}{a\nu} \ .$$

Setzen wir diese Formen in die erste der beiden vorgelegten Gleichungen, so giebt sie

$$-\frac{x}{a}\left(1 \pm \frac{x-a}{y-nz}\cdot\sqrt{-1}\right) - \frac{nz}{a}\cdot\frac{x-a}{y-nz} + 1 = 0 \ ,$$

eine Gleichung, welche, wenn sie rational gemacht und von den Nennern befreit wird, in

$$y^2 + x^2 = 0 \qquad (16)$$

übergehet. Und auf dieselbe Gleichung (16) wird die zweite der beiden vorgelegten Gleichungen reducirt, wenn wir die Werthe (I) der Constanten C_1, C_2, C_3 in (14) einsetzen, woraus wir $\psi(z) = 0$ erhalten. Aber diese Gleichung (16) drückt keine Fläche, sondern eine gerade Linie und zwar die Achse der z aus.

II. Legen wir den Constanten C_1, C_2, C_3 die Werthe (II) bei, so ist wiederum eine jede der drei Gleichungen (15) eine Folge der beiden übrigen, und wir finden aus ihnen

$$\varphi_1(\nu) = \frac{1+\nu^2}{a(1-\nu^2)} \quad ; \quad \varphi_2(\nu) = \frac{2n\nu}{a(1-\nu^2)} \quad ,$$

während dieselben Werthe (II) die Gleichung (14) auf

$$\psi(z) = a^2 + n^2z^2$$

reduciren. Beide vorgelegten Gleichungen nehmen, durch diese Bestimmung der Functionen φ_1, φ_2 und ψ, die Gestalt

$$y^2 + x^2 = a^2 + n^2z^2$$

an. Die einzige Fläche, welche der Bedingung der Aufgabe genügt, ist daher ein hyperbolisches Rotationshyperboloid.

Aufgabe [167]. Diejenige Fläche zu finden, deren Gleichung sowohl auf die eine als auf die andere der beiden Formen

$$z + y\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 0 \quad ; \quad z + x\psi_1(y) + \psi_2(y) = 0$$

gebracht werden kann.

Die geometrische Bedeutung dieser Aufgabe ist: Diejenige Fläche zu finden, welche erzeugt werden kann sowohl durch eine Gerade, die sich der Ebene der yz, als durch eine Gerade, die sich der Ebene der xz parallel bewegt.

Eliminiren wir z zwischen den beiden gegebenen Gleichungen, so kommt

$$y\varphi_1(x) - x\psi_1(y) + \varphi_2(x) - \psi_2(y) = 0 \quad , \qquad (17)$$

und wenn wir dem x nach einander zwei verschiedene willkürliche constante Werthe a, b beilegen, und zugleich $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$, $\varphi_1(b)$, $\varphi_2(b)$ respective durch A_1, A_2, B_1, B_2 bezeichnen; so haben wir, in Folge der letzten Gleichung,

$$A_1y - a\psi_1(y) + A_2 - \psi_2(y) = 0 \quad ,$$
$$B_1y - b\psi_1(y) + B_2 - \psi_2(y) = 0 \quad ,$$

zwei Gleichungen, aus welchen wir

$$\psi_1(y) = my + n \quad ; \quad \psi_2(y) = py + q \qquad (18)$$

finden, wenn wir, der Kürze wegen,

$$\frac{A_1 - B_1}{a - b} = m \quad ; \quad \frac{A_2 - B_2}{a - b} = n \quad ; \quad \frac{aB_1 - bA_1}{a - b} = p \quad ; \quad \frac{aB_2 - bA_2}{a - b} = q$$

setzen. Substituiren wir die Ausdrücke (18) in die Gleichung (17), so kommt

$$\{\varphi_1(x) - mx - p\}y + \{\varphi_2(x) - nx - q\} = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, zufolge welcher y von x abhängig seyn würde, wenn nicht

$$\varphi_1(x) = mx + p \quad ; \quad \varphi_2(x) = nx + q \quad . \qquad (19)$$

§. 100. Die Gleichungen (18) und (19) bestimmen die Functionen φ_1, φ_2, ψ_1 und ψ_2, in welchen m, n, p und q willkürliche Constanten bedeuten. Setzen wir diese gefundenen Formen (18) und (19) in die beiden gegebenen Gleichungen, so erhalten wir

aus der ersten: $z + y(mx + p) + (nx + q) = 0$,
aus der zweiten: $z + x(my + n) + (py + q) = 0$,

zwei Gleichungen, welche identisch sind und ein hyperbolisches Paraboloid ausdrücken, welches die einzige Fläche ist, die auf beide Arten erzeugt werden kann.

Aufgabe [168]. Diejenige Fläche zu finden, deren Gleichung sowohl auf die eine als auf die andere der beiden Formen

$$y\varphi_1\left(\frac{z}{y}\right) + x\varphi_2\left(\frac{z}{y}\right) + 1 = 0 \quad ; \quad y\psi_1\left(\frac{z}{x}\right) + x\psi_2\left(\frac{z}{x}\right) + 1 = 0$$

gebracht werden kann.

Die geometrische Bedeutung dieser Aufgabe ist: Welche Fläche kann erzeugt werden sowohl durch eine Gerade, welche fortwährend die Achse der x schneidet, als durch eine Gerade, welche fortwährend die Achse der y schneidet?

Wir führen statt x und y zwei neue unabhängig-veränderliche Größen v und u durch die Gleichungen

$$\frac{z}{y} = v \quad ; \quad \frac{z}{x} = u$$

ein, woraus wir $y = \frac{z}{v}$ und $x = \frac{z}{u}$ finden, und die gegebenen Gleichungen in

$$\frac{z}{v}\varphi_1(v) + \frac{z}{u}\varphi_2(v) + 1 = 0 \quad ; \quad \frac{z}{v}\psi_1(u) + \frac{z}{u}\psi_2(u) + 1 = 0$$

umformen. Eliminiren wir z zwischen diesen letzten Gleichungen, so kommt

$$u\varphi_1(v) + v\varphi_2(v) - u\psi_1(u) - v\psi_2(u) = 0 \quad , \qquad (20)$$

und wenn wir dem u nach einander zwei verschiedene willkürliche constante Werthe a und b beilegen, $\psi_1(a)$, $\psi_2(a)$, $\psi_1(b)$, $\psi_2(b)$ aber durch A_1, A_2, B_1, B_2 bezeichnen, so giebt uns eben diese Gleichung (20) die beiden folgenden

$$a\varphi_1(v) + v\varphi_2(v) - aA_1 - A_2 v = 0 \quad ,$$
$$b\varphi_1(v) + v\varphi_2(v) - bB_1 - B_2 v = 0 \quad ,$$

aus welchen wir, durch Entwicklung,

$$\varphi_1(v) = mv + p \quad ; \quad \varphi_2(v) = \frac{nv + q}{v} \qquad (21)$$

finden, wenn wir, der Kürze wegen,

$$\frac{A_2 - B_2}{a - b} = m \;;\; \frac{aB_2 - bA_2}{a - b} = n \;;\; \frac{aA_1 - bB_1}{a - b} = p \;;\; \frac{ab(B_1 - A_1)}{a - b} = q$$

setzen. Substituiren wir die Ausdrücke (21) in die Gleichung (20), so kommt

$$\left\{\psi_2(u) - mu - n\right\} v + \left\{u\psi_1(u) - pu - q\right\} = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, zufolge welcher v nur dann unabhängig von u bleibt, wenn

$$\psi_2(u) - mu - n = 0 \quad ; \quad u\psi_1(u) - pu - q = 0$$

ist, woraus wir

$$\psi_1(u) = \frac{pu + q}{u} \quad ; \quad \psi_2(u) = mu + n \qquad (22)$$

finden. Setzen wir die gefundenen Functionen (21) und (22), in welchen m, n, p und q willkürliche Constanten bedeuten, in die gegebenen Gleichungen, so erhalten wir, da nämlich

$$\varphi_1\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{mz + py}{y} \quad ; \quad \varphi_2\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{nz + qy}{z} \quad ,$$

$$\psi_1\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{pz + qx}{z} \quad ; \quad \psi_2\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{mz + nx}{x} \quad ,$$

aus der ersten: $\quad y \cdot \frac{mz + py}{y} + x \cdot \frac{nz + qy}{z} + 1 = 0 \quad ,$

aus der zweiten: $\quad y \cdot \frac{pz + qx}{z} + x \cdot \frac{mz + nx}{x} + 1 = 0 \quad ,$

und diese Gleichungen reduciren sich, nach Wegschaffung der Nenner, beide auf

$$mz^2 + pyz + nxz + qxy + z = 0 \quad ,$$

wodurch ein hyperbolisches Hyperboloid ausgedrückt wird, welches die gesuchte Fläche ist.

§. 101.

Ist bei der vorgeschriebenen Erzeugung einer Fläche eine noch größere Willkür gelassen als bei den Erzeugungsarten, die wir bisher betrachtet haben, so enthält die Gleichung der Fläche mehrere willkürliche Functionen von verschiedenen Ausdrücken oder auch willkürliche Functionen von Ausdrücken, welche wiederum willkürliche Functionen in sich schließen. Die folgenden Aufgaben liefern hiervon einige Beispiele.

§. 100. den, wenn nicht ein jeder ihrer beiden Theile einer Constanten gleich ist. Bezeichnen wir diese Constante durch C, so haben wir

$$\frac{\varphi(v)}{\sqrt{1+v^2}} = C \quad \text{und} \quad \frac{\psi(u^2)}{u} = C \quad ,$$

woraus sich

$$\varphi(v) = C\sqrt{1+v^2} \quad \text{und} \quad \psi(u^2) = Cu \qquad (2)$$

ergiebt, und die Form der gesuchten Functionen also gefunden ist.

Wenn wir nun für v und u die von ihnen vertretenen Ausdrücke in die Gleichungen (2) setzen, so erhalten wir

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \quad \text{und} \quad \psi(y^2+x^2) = C\sqrt{y^2+x^2} \quad .$$

Die gegebenen Gleichungen

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{und} \quad z = \psi(y^2+x^2)$$

sind, nach dieser Bestimmung der Functionen φ und ψ, respective

$$\frac{z}{x} = C\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \quad \text{und} \quad z = C\sqrt{y^2+x^2}$$

und allerdings, wie gefordert wurde, dieselben.

Aufgabe [162]. Welche Fläche wird in rechtwinkligen Coordinaten sowohl durch die eine als durch die andere der beiden Gleichungen

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y-b}{x}\right) \quad ; \quad z = \psi(y^2+x^2)$$

dargestellt?

Die geometrische Bedeutung der, in dieser Aufgabe enthaltenen Frage ist: Welche Kegelfläche ist zugleich eine Rotationsfläche, deren Achse nicht durch den Scheitel des Kegels geht? und wir sehen leicht ein, daß es keine solche Kegelfläche giebt, daß aber eine Ebene der Aufgabe genügen wird, da sie durch eine gerade Linie sowohl nach Art der Kegelflächen als nach der Art der Rotationsflächen erzeugt gedacht werden kann, und daß ihr im ersten Falle unendlich viele Scheitel, in dem zweiten unendlich viele Rotationsachsen beigelegt werden können.

Den vorgelegten Gleichungen können wir, durch Umkehrung, die Formen

$$\frac{y-b}{x} = \varphi_1\left(\frac{z}{x}\right) \quad ; \quad y^2+x^2 = \psi_1(z) \qquad (3)$$

geben. Führen wir statt x eine neue Unabhängig-Veränderliche v, durch

die Gleichung $\frac{z}{x} = v$, ein; so haben wir $x = \frac{z}{v}$, und an der Stelle der Gleichungen (3) die Gleichungen

$$y - b = \frac{z}{v}\varphi_1(v) \quad ; \quad y^2 + \frac{z^2}{v^2} = \psi_1(z) \quad , \qquad (4)$$

aus welchen wir, durch Elimination von y,

$$\frac{z^2}{v^2}\Big\{[\varphi_1(v)]^2 + 1\Big\} + 2b\frac{z}{v}\varphi_1(v) + b^2 = \psi_1(z) \qquad (5)$$

erhalten. Legen wir dem v einen constanten Werth c bei, und bezeichnen $\varphi_1(c)$ durch C, so haben wir, in Folge der letzten Gleichung,

$$\psi_1(z) = \frac{C^2+1}{c^2}\cdot z^2 + 2\frac{C}{c}b\cdot z + b^2 \quad , \qquad (6)$$

und, wenn wir $\psi_1(z)$ zwischen den Gleichungen (5) und (6) eliminiren,

$$\Big\{\frac{[\varphi_1(v)]^2+1}{v^2} - \frac{C^2+1}{c^2}\Big\}\cdot z^2 + 2b\Big\{\frac{\varphi_1(v)}{v} - \frac{C}{c}\Big\}\cdot z = 0 \ . \quad (7)$$

Diese Gleichung giebt für z zwei Werthe, von welchen der eine gleich Null, der andere aber von v abhängig ist. Sollte dieser zweite Werth von z unabhängig veränderlich seyn, so müßte

$$\frac{[\varphi_1(v)]^2+1}{v^2} - \frac{C^2+1}{c^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\varphi_1(v)}{v} - \frac{C}{c} = 0$$

seyn, aus welchen letzteren Gleichungen, durch Elimination von $\varphi_1(v)$, sich $v = \pm c$ ergeben, und v also nicht veränderlich seyn würde. Es giebt daher außer der, durch die Gleichung

$$z = 0$$

ausgedrückten Ebene keine Fläche, deren Gleichung sowohl die eine als die andere der beiden, in der Aufgabe gegebenen Formen zuläßt.

Aufgabe [163]. *Welches ist die Fläche, deren Gleichung sowohl unter der einen als unter der andern der beiden Formen*

$$\frac{x}{z+h} = \varphi\left(\frac{y}{z-h}\right) \quad ; \quad \frac{y}{z+h} = \psi\left(\frac{x}{z-h}\right)$$

dargestellt werden kann?

Die geometrische Bedeutung dieser Aufgabe ist, wenn wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen: Welche Fläche kann sowohl durch eine Gerade erzeugt werden, welche bei ihrer Bewegung fortwährend zwei auf einander senkrechte Gerade [$x = 0$; $z+h = 0$],

§. 100. $[y = 0\ ;\ z-h = 0]$ schneidet, als durch eine Gerade, welche fortwährend zwei andere ebenfalls auf einander senkrechte, und jene rechtwinklig schneidende Gerade $[x = 0\ ;\ z-h = 0]$, $[y = 0\ ;\ z+h = 0]$ durchschneidet?

Wir führen zwei neue unabhängig-veränderliche Größen durch die Gleichungen

$$\frac{y}{z-h} = v \quad \text{und} \quad \frac{x}{z-h} = u$$

ein, aus welchen wir

$$y = (z-h)v \quad \text{und} \quad x = (z-h)u$$

erhalten, und dadurch die gegebenen Gleichungen in

$$\frac{z-h}{z+h}\cdot u = \varphi(v) \quad ; \quad \frac{z-h}{z+h}v = \psi(u)$$

verwandeln. Eliminiren wir z zwischen diesen Gleichungen, so ergiebt sich

$$v\varphi(v) = u\psi(u) \quad ,$$

eine Gleichung, welche, da u und v von einander unabhängig seyn sollen, nur bestehen kann, wenn

$$v\varphi(v) = C \quad ; \quad u\psi(u) = C \quad ,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Hieraus erhalten wir

$$\varphi(v) = \frac{C}{v} \quad ; \quad \psi(u) = \frac{C}{u} \quad ,$$

wodurch die Form der Functionen φ und ψ bestimmt ist. Setzen wir für v und u die von ihnen vertretenen Ausdrücke, so kommt

$$\varphi\left(\frac{y}{z-h}\right) = \frac{C(z-h)}{y} \quad ; \quad \psi\left(\frac{x}{z-h}\right) = \frac{C(z-h)}{x} \quad ;$$

und indem wir diese Werthe in die gegebenen Gleichungen substituiren, giebt sowohl die eine als die andere

$$xy = C(z^2-h^2) \quad .$$

Die gesuchte Fläche ist daher ein hyperbolisches Hyperboloid.

Aufgabe [164]. Welches ist die Fläche, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten sowohl auf die eine als auf die andere der beiden Formen

$$z^2\varphi_1(x) + y^2\varphi_2(x) = 1 \quad ; \quad y = x\psi(z)$$

gebracht werden kann?

Die geometrische Deutung dieser Aufgabe ist: Welche Fläche kann

sowohl durch eine veränderliche Ellipse oder Hyperbel, deren §. 100. Mittelpunkt sich auf der Achse der x bewegt und deren Achsen den Achsen der y und der z parallel bleiben, als durch eine Gerade erzeugt werden, welche fortwährend durch die Achse der z gehet und der Ebene der xy parallel bleibt?

Eliminiren wir y zwischen den beiden gegebenen Gleichungen, so kommt

$$z^2\varphi_1(x) + x^2\varphi_2(x)\cdot[\psi(z)]^2 = 1 \quad . \qquad (8)$$

Legen wir dem x einen constanten Werth c bei, und bezeichnen die constanten Werthe von $\varphi_1(c)$, $\varphi_2(c)$ respective durch C_1, C_2, so erhalten wir aus der Gleichung (8)

$$C_1z^2 + c^2C_2[\psi(z)]^2 = 1 \quad ,$$

woraus

$$\psi(z) = \frac{\sqrt{1 - C_1z^2}}{c\sqrt{C_2}} \qquad (9)$$

folgt, und setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung (8), so kommt

$$\left\{c^2C_2\varphi_1(x) - C_1x^2\varphi_2(x)\right\}\cdot z^2 + x^2\varphi_2(x) - c^2C_2 = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, in Folge welcher z nur dann von x unabhängig bleibt, wenn

$$c^2C_2\varphi_1(x) - C_1x^2\varphi_2(x) = 0 \quad \text{und} \quad x^2\varphi_2(x) - c^2C_2 = 0$$

ist. Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$\varphi_1(x) = C_1 \quad ; \quad \varphi_2(x) = \frac{c^2C_2}{x^2} \quad . \qquad (10)$$

Die Functionen ψ, φ_1 und φ_2 sind nun durch die Gleichungen (9) und (10) bestimmt; setzen wir sie in die vorgelegten Gleichungen, so erhalten wir

$$C_1z^2 + \frac{c^2C_2y^2}{x^2} = 1 \quad ; \quad y = \frac{x\sqrt{1 - C_1z^2}}{c\sqrt{C_2}} \quad ,$$

zwei Gleichungen, welche, nach der Wegschaffung der Nenner und dem Rationalmachen der zweiten, eine und dieselbe Gleichung, nämlich

$$C_1x^2z^2 + c^2C_2y^2 - x^2 = 0 \quad ,$$

geben. Die gesuchte Fläche ist daher, wenn C_1 und C_2 positiv genommen werden, ein kegelförmiger Keil (§. 87. S. 10).

Aufgabe [165]. Welches ist die Fläche, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten sowohl auf die eine als auf die andere der beiden Formen

§. 100. $$\frac{x+a}{y+nz} = \varphi\left(\frac{x-a}{y-nz}\right) \quad ; \quad y^2 + x^2 = \psi(z)$$

gebracht werden kann?

Wir führen eine neue unabhängig-veränderliche Größe ν, durch die Gleichung

$$\frac{x-a}{y-nz} = \nu$$

ein, welche, in Verbindung mit der ersten gegebenen Gleichung,

$$y = \frac{2a - n[\varphi(\nu) + \nu]z}{\varphi(\nu) - \nu} \quad ; \quad x = \frac{a[\varphi(\nu) + \nu] - 2nz\nu\varphi(\nu)}{\varphi(\nu) - \nu}$$

giebt. Setzen wir diese Ausdrücke in die zweite gegebene Gleichung, so kommt

$$\psi(z) = a^2 . \frac{4 + [\varphi(\nu) + \nu]^2}{[\varphi(\nu) - \nu]^2} - 4na . \frac{[\varphi(\nu) + \nu][1 + \nu\varphi(\nu)]}{[\varphi(\nu) - \nu]^2} . z$$
$$+ n^2 \frac{[\varphi(\nu) + \nu]^2 + 4\nu^2[\varphi(\nu)]^2}{[\varphi(\nu) - \nu]^2} . z^2 \quad .$$

Da $\psi(z)$ lediglich eine Function von z seyn soll, so müssen die Coefficienten von z in dem zweiten Theile der eben gefundenen Gleichung constant seyn. Setzen wir sie respective gleich C_1, C_2, C_3, wodurch die letzte Gleichung die Form

$$\psi(z) = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 \qquad \text{(II)}$$

annimmt, so haben wir drei Gleichungen, zwischen welchen wir ν und $\varphi(\nu)$ eliminiren, und dadurch zu einer Gleichung zwischen C_1, C_2 und C_3 gelangen können. Legen wir diesen Constanten C_1, C_2 und C_3 solche Werthe bei, welche diese Bedingungsgleichung befriedigen, so wird, wie es die Rechnung zeigt, eine jede der drei genannten Gleichungen eine Folge der beiden übrigen, und aus diesen letzteren finden wir dann für ν und $\varphi(\nu)$ constante Werthe, welche sämmtliche drei Gleichungen befriedigen. Soll aber ν veränderlich seyn, so muß dieselbe Relation zwischen $\varphi(\nu)$ und ν, welche eine der beiden zuletzt genannten Gleichungen ausdrückt, auch durch die andere ausgedrückt werden, und dies findet nur Statt, wenn wir $C_1 = a^2$; $C_2 = 0$ und $C_3 = n^2$ setzen. In diesem Falle nämlich erhalten sämmtliche drei Gleichungen den Factor $\nu \cdot \varphi(\nu) + 1 = 0$, und werden daher zugleich befriedigt, wenn wir $\varphi(\nu) = -\frac{1}{\nu}$ setzen. Wir haben dann

$$\varphi(\nu) \equiv \varphi\left(\frac{x-a}{y-nz}\right) = -\frac{y-nz}{x-a} \quad ,$$

und die erste gegebene Gleichung geht durch diese Bestimmung der Function φ in

$$\frac{x+a}{y+nz} = -\frac{y-nz}{x-a}, \tag{12}$$

die zweite gegebene Gleichung aber dadurch, daß wir in (11) $C_1 = a^2$, $C_2 = 0$ und $C_3 = n^2$ setzen, in

$$y^2 + x^2 = a^2 + n^2 z^2 \tag{13}$$

über, und diese beiden Gleichungen (12) und (13) sind, wenn in (12) die Nenner weggeschafft werden, identisch; sie drücken ein hyperbolisches Rotationshyperboloid aus, welches die gesuchte Fläche ist.

Aufgabe [166]. Welches ist die Fläche, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten sowohl auf die eine als auf die andere der beiden Formen

$$x\cdot\varphi_1\left(\frac{y-nz}{x-a}\right)+z\cdot\varphi_2\left(\frac{y-nz}{x-a}\right)+1=0 \quad ; \quad y^2+x^2=\psi(z)$$

gebracht werden kann?

Die geometrische Deutung dieser Aufgabe ist: Welche Rotationsfläche kann auch durch eine Gerade erzeugt werden, welche bei ihrer Bewegung fortwährend eine feste Gerade schneidet?

Wir führen eine neue unabhängig-veränderliche Größe ν durch die Gleichung

$$\frac{y-nz}{x-a} = \nu$$

ein, woraus wir

$$y = (x-a)\nu + nz$$

erhalten. Setzen wir diesen Ausdruck für y in die beiden gegebenen Gleichungen, so kommt

$$x\cdot\varphi_1(\nu)+z\cdot\varphi_2(\nu)+1=0\ ;\ x^2+(x-a)^2\nu^2+2n(x-a)\nu z+n^2z^2=\psi(z),$$

woraus wir, durch Elimination von x,

$$\psi(z) = \left\{\begin{array}{l} [1+\nu^2+2a\nu^2\varphi_1+a^2\nu^2\varphi_1^2]\varphi_1^{-2} \\ +2[(1+\nu^2)\varphi_2+a\nu^2\varphi_1\varphi_2-n\nu\varphi_1-na\nu\varphi_1^2]\varphi_1^{-2}\cdot z \\ +[(1+\nu^2)\varphi_2^2-2n\nu\varphi_1\varphi_2+n^2\varphi_1^2]\varphi_1^{-2}\cdot z^2 \end{array}\right.$$

erhalten, wenn wir der Kürze wegen, φ_1 und φ_2 respective für $\varphi_1(\nu)$ und $\varphi_2(\nu)$ schreiben. Da nun $\psi(z)$ lediglich eine Function von z seyn soll, so müssen die Coefficienten von z in dem zweiten Theile der letzten Glei-

100. chung constant seyn. Setzen wir sie, der Reihe nach, gleich C_1, $2C_2$, C_3, wodurch diese Gleichung in

$$\psi(z) = C_1 + 2C_2 z + C_3 z^2 \qquad (14)$$

übergeht, so haben wir die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (a^2\nu^2 - C_1)\varphi_1^2 + 2a\nu^2\varphi_1 + 1 + \nu^2 &= 0 \;, \\ (1+\nu^2+a\nu^2\varphi_1)\varphi_2 &= [n\nu + (C_2 + na\nu)\varphi_1]\varphi_1 \;, \\ (1+\nu^2)\varphi_2^2 - 2n\nu\varphi_1\varphi_2 + (n^2 - C_3)\varphi_1^2 &= 0 \;, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

und wenn wir zwischen ihnen φ_1 und φ_2 eliminiren,

$$(C_2^2 + C_3 a^2 - C_1 C_3)\nu^2 + 2C_2 na\nu + C_2^2 + n^2 C_1 - C_1 C_3 = 0 \;.$$

Aus dieser letzten Gleichung würde aber ν zwei constante Werthe erhalten, wenn nicht sämmtliche Coefficienten gleich Null sind. Setzen wir daher

$$C_2^2 + C_3 a^2 - C_1 C_3 = 0 \;;\; C_2 na = 0 \;;\; C_2^2 + n^2 C_1 - C_1 C_3 = 0 \;,$$

so erhalten wir

entweder (I) $C_1 = 0$; $C_2 = 0$; $C_3 = 0$,
oder (II) $C_1 = a^2$; $C_2 = 0$; $C_3 = n^2$.

I. Legen wir den Constanten C_1, C_2, C_3 die Werthe (I) bei, so ist eine jede der drei Gleichungen (15) eine Folge der beiden übrigen, und wir finden aus ihnen

$$\varphi_1(\nu) = -\frac{1}{a}\left(1 \pm \frac{1}{\nu}\sqrt{-1}\right) \;;\; \varphi_2(\nu) = -\frac{n}{a\nu} \;.$$

Setzen wir diese Formen in die erste der beiden vorgelegten Gleichungen, so giebt sie

$$-\frac{x}{a}\left(1 \pm \frac{x-a}{y-nz}\cdot\sqrt{-1}\right) - \frac{nz}{a}\cdot\frac{x-a}{y-nz} + 1 = 0 \;,$$

eine Gleichung, welche, wenn sie rational gemacht und von den Nennern befreit wird, in

$$y^2 + x^2 = 0 \qquad (16)$$

übergehet. Und auf dieselbe Gleichung (16) wird die zweite der beiden vorgelegten Gleichungen reducirt, wenn wir die Werthe (I) der Constanten C_1, C_2, C_3 in (14) einsetzen, woraus wir $\psi(z) = 0$ erhalten. Aber diese Gleichung (16) drückt keine Fläche, sondern eine gerade Linie und zwar die Achse der z aus.

II. Legen wir den Constanten C_1, C_2, C_3 die Werthe (II) bei, so ist wiederum eine jede der drei Gleichungen (15) eine Folge der beiden übrigen, und wir finden aus ihnen

$$\varphi_1(\nu) = \frac{1+\nu^2}{a(1-\nu^2)} \quad ; \quad \varphi_2(\nu) = \frac{2n\nu}{a(1-\nu^2)} \; ,$$

während dieselben Werthe (II) die Gleichung (14) auf

$$\psi(z) = a^2 + n^2z^2$$

reduciren. Beide vorgelegten Gleichungen nehmen, durch diese Bestimmung der Functionen φ_1, φ_2 und ψ, die Gestalt

$$y^2 + x^2 = a^2 + n^2z^2$$

an. Die einzige Fläche, welche der Bedingung der Aufgabe genügt, ist daher ein hyperbolisches Rotationshyperboloid.

Aufgabe [167]. Diejenige Fläche zu finden, deren Gleichung sowohl auf die eine als auf die andere der beiden Formen

$$z + y\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 0 \quad ; \quad z + x\psi_1(y) + \psi_2(y) = 0$$

gebracht werden kann.

Die geometrische Bedeutung dieser Aufgabe ist: Diejenige Fläche zu finden, welche erzeugt werden kann sowohl durch eine Gerade, die sich der Ebene der yz, als durch eine Gerade, die sich der Ebene der xz parallel bewegt.

Eliminiren wir z zwischen den beiden gegebenen Gleichungen, so kommt

$$y\varphi_1(x) - x\psi_1(y) + \varphi_2(x) - \psi_2(y) = 0 \; , \qquad (17)$$

und wenn wir dem x nach einander zwei verschiedene willkürliche constante Werthe a, b beilegen, und zugleich $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$, $\varphi_1(b)$, $\varphi_2(b)$ respective durch A_1, A_2, B_1, B_2 bezeichnen; so haben wir, in Folge der letzten Gleichung,

$$A_1y - a\psi_1(y) + A_2 - \psi_2(y) = 0 \; ,$$
$$B_1y - b\psi_1(y) + B_2 - \psi_2(y) = 0 \; ,$$

zwei Gleichungen, aus welchen wir

$$\psi_1(y) = my + n \quad ; \quad \psi_2(y) = py + q \qquad (18)$$

finden, wenn wir, der Kürze wegen,

$$\frac{A_1 - B_1}{a-b} = m \quad ; \quad \frac{A_2 - B_2}{a-b} = n \quad ; \quad \frac{aB_1 - bA_1}{a-b} = p \quad ; \quad \frac{aB_2 - bA_2}{a-b} = q$$

setzen. Substituiren wir die Ausdrücke (18) in die Gleichung (17), so kommt

$$\{\varphi_1(x) - mx - p\}y + \{\varphi_2(x) - nx - q\} = 0 \; ,$$

eine Gleichung, zufolge welcher y von x abhängig seyn würde, wenn nicht

$$\varphi_1(x) = mx + p \quad ; \quad \varphi_2(x) = nx + q \; . \qquad (19)$$

100. Die Gleichungen (18) und (19) bestimmen die Functionen φ_1, φ_2, ψ_1 und ψ_2, in welchen m, n, p und q willkürliche Constanten bedeuten. Setzen wir diese gefundenen Formen (18) und (19) in die beiden gegebenen Gleichungen, so erhalten wir

aus der ersten: $z + y(mx + p) + (nx + q) = 0$,
aus der zweiten: $z + x(my + n) + (py + q) = 0$,

zwei Gleichungen, welche identisch sind und ein hyperbolisches Paraboloid ausdrücken, welches die einzige Fläche ist, die auf beide Arten erzeugt werden kann.

Aufgabe [168]. Diejenige Fläche zu finden, deren Gleichung sowohl auf die eine als auf die andere der beiden Formen

$$y\varphi_1\left(\frac{z}{y}\right) + x\varphi_2\left(\frac{z}{y}\right) + 1 = 0 \quad ; \quad y\psi_1\left(\frac{z}{x}\right) + x\psi_2\left(\frac{z}{x}\right) + 1 = 0$$

gebracht werden kann.

Die geometrische Bedeutung dieser Aufgabe ist: Welche Fläche kann erzeugt werden sowohl durch eine Gerade, welche fortwährend die Achse der x schneidet, als durch eine Gerade, welche fortwährend die Achse der y schneidet?

Wir führen statt x und y zwei neue unabhängig-veränderliche Größen v und u durch die Gleichungen

$$\frac{z}{y} = v \quad ; \quad \frac{z}{x} = u$$

ein, woraus wir $y = \frac{z}{v}$ und $x = \frac{z}{u}$ finden, und die gegebenen Gleichungen in

$$\frac{z}{v}\varphi_1(v) + \frac{z}{u}\varphi_2(v) + 1 = 0 \quad ; \quad \frac{z}{v}\psi_1(u) + \frac{z}{u}\psi_2(u) + 1 = 0$$

umformen. Eliminiren wir z zwischen diesen letzten Gleichungen, so kommt

$$u\varphi_1(v) + v\varphi_2(v) - u\psi_1(u) - v\psi_2(u) = 0 \ , \qquad (20)$$

und wenn wir dem u nach einander zwei verschiedene willkürliche constante Werthe a und b beilegen, $\psi_1(a)$, $\psi_2(a)$, $\psi_1(b)$, $\psi_2(b)$ aber durch A_1, A_2, B_1, B_2 bezeichnen, so giebt uns eben diese Gleichung (20) die beiden folgenden

$$a\varphi_1(v) + v\varphi_2(v) - aA_1 - A_2v = 0 \ ,$$
$$b\varphi_1(v) + v\varphi_2(v) - bB_1 - B_2v = 0 \ ,$$

aus welchen wir, durch Entwicklung,

$$\varphi_1(v) = mv + p \quad ; \quad \varphi_2(v) = \frac{nv + q}{v} \qquad (21)$$

finden, wenn wir, der Kürze wegen,

$$\frac{A_2 - B_2}{a - b} = m \; ; \; \frac{aB_2 - bA_2}{a - b} = n \; ; \; \frac{aA_1 - bB_1}{a - b} = p \; ; \; \frac{ab(B_1 - A_1)}{a - b} = q$$

setzen. Substituiren wir die Ausdrücke (21) in die Gleichung (20), so kommt

$$\left\{\psi_2(u) - mu - n\right\} v + \left\{u\psi_1(u) - pu - q\right\} = 0 \quad ,$$

eine Gleichung, zufolge welcher v nur dann unabhängig von u bleibt, wenn

$$\psi_2(u) - mu - n = 0 \quad ; \quad u\psi_1(u) - pu - q = 0$$

ist, woraus wir

$$\psi_1(u) = \frac{pu + q}{u} \quad ; \quad \psi_2(u) = mu + n \qquad (22)$$

finden. Setzen wir die gefundenen Functionen (21) und (22), in welchen m, n, p und q willkürliche Constanten bedeuten, in die gegebenen Gleichungen, so erhalten wir, da nämlich

$$\varphi_1\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{mz + py}{y} \quad ; \quad \varphi_2\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{nz + qy}{z} \quad ,$$

$$\psi_1\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{pz + qx}{z} \quad ; \quad \psi_2\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{mz + nx}{x} \quad ,$$

aus der ersten: $\quad y \cdot \dfrac{mz + py}{y} + x \cdot \dfrac{nz + qy}{z} + 1 = 0 \quad ,$

aus der zweiten: $\quad y \cdot \dfrac{pz + qx}{z} + x \cdot \dfrac{mz + nx}{x} + 1 = 0 \quad ,$

und diese Gleichungen reduciren sich, nach Wegschaffung der Nenner, beide auf

$$mz^2 + pyz + nxz + qxy + z = 0 \quad ,$$

wodurch ein hyperbolisches Hyperboloid ausgedrückt wird, welches die gesuchte Fläche ist.

§. 101.

Ist bei der vorgeschriebenen Erzeugung einer Fläche eine noch größere Willkür gelassen als bei den Erzeugungsarten, die wir bisher betrachtet haben, so enthält die Gleichung der Fläche mehrere willkürliche Functionen von verschiedenen Ausdrücken oder auch willkürliche Functionen von Ausdrücken, welche wiederum willkürliche Functionen in sich schließen. Die folgenden Aufgaben liefern hiervon einige Beispiele.

. 101. Aufgabe [169]. **Eine Curve von einfacher Krümmung M bewegt sich ohne sich zu drehen (d. h. dergestalt, daß eine jede mit ihr fest verbundene Gerade, wie z. B. eine jede ihrer Tangenten, parallel mit ihrer eigenen Richtung sich fort bewegt) und so, daß ein mit ihr fest verbundener, in ihrer Ebene befindlicher Punkt A eine ebene Curve N beschreibt. Es soll die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.**

Wir nehmen die Ebene der Curve M in einer ihrer Lagen zur Ebene der xz, die Ebene der Curve N zur Ebene der yz und den Punkt A, welcher sich, der Voraussetzung zufolge, sowohl auf der Curve N als in der Ebene der Curve M, folglich in dem Durchschnitte der Ebene der xz und der Ebene der yz, d. i. auf der Achse der z befindet, zum Anfangspunkte der Coordinaten. Die Curve M wird dann, in der genannten Lage, durch zwei Gleichungen von der Form

$$z = \varphi_1(x) \quad ; \quad y = 0 \quad , \qquad (1)$$

die Curve N aber, wenn wir ihre Coordinaten, zur Unterscheidung durch x', y', z' bezeichnen, durch zwei Gleichungen von der Form

$$z' = \varphi_2(y') \quad ; \quad x' = 0 \qquad (2)$$

darzustellen seyn. In irgend einer anderen Lage, welche die Curve M den Bedingungen der Aufgabe gemäß haben kann, und bei welcher der Punkt A sich nicht mehr im Anfangspunkte der Coordinaten, sondern in dem Punkte x'y'z' befindet, wird die Curve M nicht mehr durch die Gleichungen (1), sondern durch das Gleichungssystem

$$z - z' = \varphi_1(x - x') \quad ; \quad y - y' = 0 \qquad (3)$$

auszudrücken seyn. Eliminiren wir zwischen den vier Gleichungen (2) und (3) die drei Größen x', y', z', so kommt

$$z = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) \qquad (4)$$

als die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche, welche, wie wir sehen, zwei willkürliche Functionen von verschiedenen Größen enthält.

Bei dieser Erzeugungsart ist Folgendes zu bemerken. Wenn, von den beiden Curven M und N, die Curve M sich so bewegt, daß ihre Ebene der Ebene der xz parallel bleibt und der Punkt A die Curve N durchläuft, so ist die Gleichung der erzeugten Fläche, wie wir gefunden haben,

$$z = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) \quad .$$

Wenn aber die Curve N sich so bewegt, daß ihre Ebene der Ebene der yz parallel bleibt, und der Punkt A die Curve M durchläuft, so ist die Gleichung der erzeugten Fläche, ebenfalls dem Gefundenen zufolge,

z

$$z = \varphi_2(y) + \varphi_1(x) \quad ,$$ §. 101.

diese Fläche selbst also dieselbe als die vorher erzeugte. Daraus folgt: Wenn eine ebene Curve M ohne sich zu drehen sich so bewegt, daß ein mit ihr fest verbundener Punkt A die ebene Curve N beschreibt und dadurch eine Fläche S beschreibt; so wird die Curve N, wenn sie ohne sich zu drehen sich so bewegt, daß der mit ihr fest verbundene Punkt A die Curve M durchläuft, eine Fläche S′ erzeugen, welche der Fläche S vollkommen gleich ist, was sich auch auf blos geometrischem Wege leicht nachweisen läßt.

Ist eine der beiden Curven, z. B. N, eine gerade Linie und durch die Gleichungen $z = ay + b \; ; \; x = 0$ ausgedrückt; so ist $\varphi_2(y) = ay + b$, und die Gleichung der erzeugten Fläche also

$$z = \varphi_1(x) + ay + b \quad ,$$

diese Fläche selbst demnach eine Cylinderfläche (§. 29. S. 6), was auch ohnehin klar ist.

Aufgabe [170]. Eine Curve von einfacher Krümmung M bewegt sich folgendermaßen. Ihre Ebene dreht sich um eine gegebene feste Achse und verschiebt sich zugleich so, daß ein bestimmter Punkt A dieser selbigen Ebene eine Curve von einfacher Krümmung N beschreibt, deren Ebene auf jener Achse senkrecht ist, und daß alle mit der Curve M fest verbundenen Geraden, wie z. B. ihre Tangenten, mit derselben Achse unveränderliche Winkel bilden. Es soll die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die Ebene der Curve N zur Ebene der xy, die gegebene feste Achse zur Achse der z und die Coordinaten rechtwinklig. Nun bezeichne

$$u' = \varphi_1(\mathit{tang}\, t) \qquad (5)$$

die Polargleichung der, in der Ebene der xy befindlichen Curve N, und

$$u = \varphi_2(v) \qquad (6)$$

die Gleichung der Curve M, bezogen auf zwei rechtwinklige Achsen, von welchen die Achse der v der Achse der z parallel, und deren Anfangspunkt der Punkt A ist. Wenn nun bei der Bewegung der Curve M ihre Ebene mit der Ebene der xz den Winkel t bildet, so sind die Polarcoordinaten des Punktes A, da dieser Punkt sich auf der Curve (5) befinden soll, t und u′; zu gleicher Zeit aber ist die Gleichung der Curve M, wenn wir sie nicht mehr auf die Achsen der u und v, sondern auf die Achsen der u und z beziehen,

101. $$u - u' = \varphi_2(z) \quad ; \qquad (7)$$

und es ist ferner (I. §. 3. F. 10)

$$y = u \sin t \quad ; \quad x = u \cos t \quad . \qquad (8)$$

Eliminiren wir zwischen den vier Gleichungen (5), (7) und (8) die drei Größen t, u und u', so kommt

$$\sqrt{y^2 + x^2} = \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_2(z) \qquad (9)$$

als die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche, welche zwei willkürliche Functionen von verschiedenen Ausdrücken enthält.

Ist nun z. B. die Curve N ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt und dessen Polargleichung demnach $u' = r$ ist, so ist $\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) = r$, und die Gleichung (9) reducirt sich, wenn wir $\varphi_2(z) + r$ durch $\psi(z)$ bezeichnen, auf

$$\sqrt{y^2 + x^2} = \psi(z) \quad ,$$

wodurch, wie es auch seyn muß, eine Rotationsfläche ausgedrückt wird, deren Rotationsachse die Achse der z ist (§. 96. Aufg. 148).

Ist aber die Curve M eine gerade Linie und durch die Gleichung $u = tg\gamma \cdot v$ dargestellt, so haben wir $\varphi_2(z) = tg\gamma \cdot z$, wodurch die Gleichung (9), wenn wir $-cotang\gamma \cdot \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)$ durch $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ bezeichnen, sich auf

$$z = cot\gamma \cdot \sqrt{y^2 + x^2} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

zurückziehet, und der Gleichung (19) des §. 88, wie es auch seyn muß, identisch wird.

Aufgabe [171]. *Eine Curve von einfacher Krümmung M bewegt sich ohne sich zu drehen (d. h. dergestalt, daß eine jede mit ihr fest verbundene Gerade, wie z. B. eine jede ihrer Tangenten, parallel mit ihrer eigenen Richtung sich fortbewegt), und so, daß ein mit ihr fest verbundener, in ihrer Ebene befindlicher Punkt A eine Curve doppelter Krümmung N beschreibt. Es soll die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.*

Wir nehmen die Curve M in einer ihrer Lagen zur Ebene der xz und den Punkt A zum Anfangspunkte der Coordinaten. Diese Curve M kann alsdann durch zwei Gleichungen von der Form

$$z = \varphi_1(x) \quad ; \quad y = 0 \quad , \qquad (10)$$

die Curve N aber, wenn wir ihre Coordinaten, zur Unterscheidung, durch x', y', z' bezeichnen, durch zwei Gleichungen von der Form

$$z' = \varphi_2(y') \quad ; \quad x' = \varphi_3(y') \qquad (11)$$

dargestellt werden. In irgend einer anderen Lage, welche die Curve M den Bedingungen der Aufgabe gemäß haben kann, und bei welcher der Punkt A sich nicht mehr im Anfangspunkte der Coordinaten, sondern in dem Punkte $x'y'z'$ der Curve N befindet, ist diese Curve (10) durch die beiden Gleichungen

$$z - z' = \varphi_1(x - x') \quad ; \quad y - y' = 0 \qquad (12)$$

auszudrücken. Eliminiren wir zwischen den vier Gleichungen (11) und (12) die drei Größen x', y', z', so kommt

$$z = \varphi_2(y) + \varphi_1(x - \varphi_3(y)) \qquad (13)$$

als die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche, welche zwei willkürliche Functionen enthält, von denen die eine wiederum eine willkürliche Function in sich schließt.

Aufgabe [172]. Eine Curve von doppelter Krümmung N bewegt sich ohne sich zu drehen (d. h. dergestalt, daß eine jede mit ihr fest verbundene Gerade, wie z. B. eine jede ihrer Tangenten, parallel mit ihrer eigenen Richtung sich fortbewegt), und so, daß ein auf ihr befindlicher fester Punkt A eine ebene Curve M beschreibt. Es soll die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die Ebene der Curve M zur Ebene der xz, und einen Punkt a dieser Curve zum Anfangspunkte der Coordinaten. Indem wir ihre Coordinaten zur Unterscheidung mit x', y', z' bezeichnen, drücken wir sie nun durch zwei Gleichungen von der Form

$$z' = \varphi_1(x') \quad ; \quad y' = 0 \qquad (14)$$

aus. Die Curve N aber stellen wir in derjenigen Lage, bei welcher der Punkt A sich in a befindet, durch die Gleichungen

$$z = \varphi_2(y) \quad ; \quad x = \varphi_3(y) \qquad (15)$$

dar. Für eine andere Lage dieser Curve N, bei welcher sich der Punkt A in dem Punkte $x'y'z'$ befindet, haben wir dann

$$z - z' = \varphi_2(y - y') \quad ; \quad x - x' = \varphi_3(y - y') \qquad (16)$$

Eliminiren wir zwischen den vier Gleichungen (14) und (16) die drei Größen x', y', z', so kommt

$$z = \varphi_1(x - \varphi_3(y)) + \varphi_2(y) \qquad (17)$$

als die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche. Diese Gleichung (17)

01. ist mit der, in der vorigen Aufgabe gefundenen, Gleichung (13) identisch; daraus folgt, daß jede Fläche, welche nach der in der vorigen Aufgabe angegebenen Art erzeugt ist, auch nach der in der gegenwärtigen Aufgabe genannten Weise erzeugt werden kann.

Aufgabe [173]. Eine Curve von einfacher Krümmung M bewegt sich folgendermaßen. Ihre Ebene dreht sich um eine gegebene feste Achse und verschiebt sich zugleich so, daß ein bestimmter Punkt A dieser Ebene eine Curve von doppelter Krümmung N beschreibt, und daß alle mit der Curve M fest verbundenen Geraden, wie z. B. ihre Tangenten, mit der genannten Achse unveränderliche Winkel bilden. Es soll die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche gefunden werden.

Wir nehmen die Ebene der Curve M in einer ihrer Lagen zur Ebene der xz, die gegebene Achse zur Achse der z und die Coordinaten rechtwinklig.

Nun sey die Curve N durch das Gleichungssystem

$$u' = \varphi_1(tang\,t) \quad ; \quad z' = \varphi_2(tang\,t) \qquad (18)$$

ausgedrückt, in welchem z′ die senkrechte Ordinate, u′ die Projection des Radiusvector der Punkte dieser Curve und t den Winkel, welchen diese Projection mit der Achse der x macht, bedeutet. Ferner sey

$$u = \varphi_3(v) \qquad (19)$$

die Gleichung der Curve M, bezogen auf zwei rechtwinklige, in der Ebene dieser Curve liegende Achsen, welche sich in dem Punkte A als dem Anfangspunkte der u und der v schneiden, und von welchen die Achse der v der Achse der z parallel ist. Wenn bei der Bewegung der Curve M ihre Ebene mit der Ebene der xz den Winkel t bildet, so befindet sich der Punkt A in dem Punkte tu′z′ der Curve N. Wir müssen also, um die Curve M in dieser Lage auf den Anfangspunkt der xyz zu beziehen, $u - u'$ für u und $z - z'$ für v setzen, wodurch wir aus der Gleichung (19)

$$u - u' = \varphi_3(z - z') \qquad (20)$$

erhalten, neben welcher Gleichung noch die Gleichungen

$$y = u\sin t \quad ; \quad x = u\cos t \qquad (21)$$

existiren. Eliminiren wir zwischen den fünf Gleichungen (18), (20) und (21) die vier Größen t, u, u′, z′, so kommt

$$\sqrt{y^2 + x^2} = \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_3\left[z - \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)\right] \qquad (22)$$

als die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche.

Wir bemerken noch Folgendes. In dem besondern Falle, in welchem

die Curve N auf einem geraden Kreiscylinder liegt, dessen Achse mit der gegebenen festen Achse coincidirt, ist die erste Gleichung (18) $u' = r$, wo r den constanten Radius dieses Cylinders bedeutet. Dann haben wir also $\varphi_1(tang\, t) = \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) = r$, und unsere allgemeine Gleichung (22) ziehet sich auf

$$\sqrt{y^2+x^2} = r + \varphi_3\left[z - \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

zurück. Dieser letzten Gleichung können wir, durch Umkehrung, auch die Form

$$z - \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) = \psi(\sqrt{y^2+x^2} - r) \quad ,$$

also die Form

$$z = \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_4(y^2+x^2) \qquad (23)$$

geben.

In dem noch speciellern Falle, in welchem die Curve N eine Schraubenlinie ist, die (§. 86. G. 14') durch die Gleichungen

$$u' = r \quad ; \quad z' = nr\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)$$

dargestellt wird, haben wir $\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) = nr\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right)$, wodurch die Gleichung (23) in

$$z = nr\, arc\left(tang = \frac{y}{x}\right) + \varphi_4(y^2+x^2)$$

übergehet, und eine jede Schraubenfläche darstellt (§. 97. G. 1).

Aufgabe [174]. Eine Curve von doppelter Krümmung M bewegt sich ohne sich zu drehen (d. h. dergestalt, daß alle mit der Curve fest verbundenen Geraden, wie z. B. ihre Tangenten, sich parallel mit sich selbst fortbewegen), und so, daß ein mit dieser Curve M fest verbundener Punkt A eine Curve von doppelter Krümmung N beschreibt. Es soll der allgemeine Ausdruck der erzeugten Fläche gefunden werden.

Welches auch die Curve M seyn mag, so kann sie, in einer jeden ihrer Lagen, immer in rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten durch zwei Gleichungen von der Form

$$x - \alpha = \varphi_1(z-\gamma) \quad ; \quad y - \beta = \varphi_2(z-\gamma)$$

ausgedrückt werden, in welchen α, β, γ die Coordinaten des Punktes A bedeuten. Und die Curve N kann, auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, durch zwei Gleichungen von der Form

$$\alpha = \varphi_3(\gamma) \quad ; \quad \beta = \varphi_4(\gamma)$$

dargestellt werden. Eliminiren wir α und β zwischen diesen vier Gleichungen, so haben wir

$$x - \varphi_3(\gamma) = \varphi_1(z-\gamma) \quad ; \quad y - \varphi_4(\gamma) = \varphi_2(z-\gamma) \, , \qquad (24)$$

und die Elimination von γ zwischen diesen beiden Gleichungen (24) würde die verlangte allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche geben. Diese Elimination läßt sich aber, so lange die Functionen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 unbestimmt gelassen werden, nicht vollziehen; deshalb betrachten wir das Gleichungssystem (24) selbst als den allgemeinen Ausdruck für die erzeugte Fläche.

Ist, um einen einzelnen Fall zu betrachten, die Curve M diejenige Schraubenlinie, welche die auf rechtwinklige Achsen bezogenen Gleichungen

$$x = r \cos\frac{z}{nr} \quad ; \quad y = r \sin\frac{z}{nr}$$

darstellen, die Curve N aber diejenige, welche die auf dasselbe Coordinatensystem bezogenen Gleichungen

$$\alpha = r \cos\frac{\gamma}{nr} \quad ; \quad \beta = -r \sin\frac{\gamma}{nr}$$

ausdrücken; so haben wir, zufolge der Gleichungen (24),

$$x - r\cos\frac{\gamma}{nr} = r\cos\frac{z-\gamma}{nr} \quad ; \quad y + r\sin\frac{\gamma}{nr} = r\sin\frac{z-\gamma}{nr} \, ,$$

oder auch

$$x = r \cdot \left\{\cos\frac{z-\gamma}{nr} + \cos\frac{\gamma}{nr}\right\} \quad ; \quad y = r \cdot \left\{\sin\frac{z-\gamma}{nr} - \sin\frac{\gamma}{nr}\right\} \, ,$$

folglich

$$x = 2r \cdot \cos\frac{z}{2nr}\cos\frac{z-2\gamma}{2nr} \quad ; \quad y = 2r \cdot \cos\frac{z}{2nr}\sin\frac{z-2\gamma}{2nr} \, ,$$

woraus, durch Elimination von γ,

$$y^2 + x^2 = 4r^2 \cdot \cos^2\frac{z}{2nr} \qquad (25)$$

als die Gleichung der erzeugten Fläche hervorgehet. Diese Fläche ist also eine Rotationsfläche, deren Meridiancurve durch die Gleichung

$$x = 2r\cos\frac{z}{2nr}$$

ausgedrückt wird.

„Eine Fläche S, welche durch eine Curve doppelter Krümmung M erzeugt wird, indem diese, ohne sich zu drehen, sich so bewegt, daß ein mit ihr

fest verbundener Punkt A eine Curve doppelter Krümmung N durchläuft, §. 101.
und eine Fläche S', welche dadurch erzeugt wird, daß diese Curve N ohne sich zu drehen sich so bewegt, daß ein mit ihr fest verbundener Punkt B jene Curve M durchläuft, sind zwei vollkommen gleiche Flächen."

Dieser Satz läßt sich auf verschiedene Arten, und analytisch wie folgt erweisen. Wir beziehen die beiden Curven M, N, auf ein und dasselbe rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinatensystem, und es sey die Curve M in derjenigen Lage, in welcher sich der Punkt A im Anfangspunkte der Coordinaten befindet, durch das Gleichungssystem

$$x = \varphi_1(z) \quad ; \quad y = \varphi_2(z) \quad ,$$

und die Curve N in derjenigen Lage, in welcher sich der Punkt B in demselben Anfangspunkte befindet, durch das Gleichungssystem

$$x = \varphi_3(z) \quad ; \quad y = \varphi_4(z)$$

ausgedrückt. Zufolge der vorigen Aufgabe erhalten wir die Gleichung der Fläche S, wenn wir γ zwischen den Gleichungen

$$x = \varphi_3(\gamma) + \varphi_1(z-\gamma) \quad ; \quad y = \varphi_4(\gamma) + \varphi_2(z-\gamma) \quad , \quad (24)$$

und die Gleichung der Fläche S', wenn wir γ' zwischen den Gleichungen

$$x = \varphi_1(\gamma') + \varphi_3(z-\gamma') \quad ; \quad y = \varphi_2(\gamma') + \varphi_4(z-\gamma') \quad (26)$$

eliminiren. Sehen wir nun, in den Gleichungen (24), γ und $(z-\gamma)$ als zwei unbekannte Größen an, so können wir diese aus den eben genannten Gleichungen (24) entwickeln, wodurch wir

$$\gamma = f_1(x, y) \quad ; \quad z-\gamma = f_2(x, y) \quad ,$$

und daraus, durch Elimination von γ,

$$z = f_1(x, y) + f_2(x, y) \qquad (27)$$

als die Gleichung der Fläche S erhalten. Und sehen wir, in den Gleichungen (26), γ' und $z-\gamma'$ als zwei unbekannte Größen an, so können wir auch diese aus den so eben genannten Gleichungen (26) entwickeln, wodurch wir dann offenbar

$$\gamma' = f_2(x, y) \quad ; \quad z-\gamma' = f_1(x, y) \quad ,$$

und daraus, durch Elimination von γ',

$$z = f_2(x, y) + f_1(x, y) \qquad (28)$$

als die Gleichung der Fläche S' erhalten. Da nun aber die Gleichungen (27) und (28) identisch sind, so sind die Flächen S und S' einander vollkommen gleich, was behauptet worden war.

101. Aufgabe [175]. Die allgemeine Gleichung der Fläche zu finden, welche die Beschaffenheit hat, daß alle, einer festen Ebene parallelen Durchschnitte, wenn sie nach einer gegebenen Richtung auf diese Ebene projicirt werden, ähnliche und ähnlich-liegende Curven geben, die sämmtlich einen und denselben Aehnlichkeitspunkt haben.

Wir nehmen die feste Ebene zur Ebene der xy und den gemeinschaftlichen Aehnlichkeitspunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten, durch den wir die Achse der z der genannten Richtung parallel legen. Ist nun die Gleichung der Projection eines der Ebene der xy parallelen Durchschnitts, für welchen $z = a$,

$$y = \varphi(x) \quad ,$$

so muß, der Bedingung der Aufgabe gemäß, die Gleichung der Projection eines Durchschnittes, für welchen $z = z$ ist,

$$ny = \varphi(nx)$$

seyn, wo n von z abhängig, und also $n = \psi(z)$ ist. Wir haben demnach

$$y \cdot \psi(z) = \varphi[x \cdot \psi(z)] \qquad (29)$$

als die allgemeine Gleichung der Fläche.

Aufgabe [176]. Die allgemeine Gleichung der Fläche zu finden, welche so beschaffen ist, daß alle, einer festen Ebene parallelen Durchschnitte, wenn sie nach einer gegebenen Richtung auf diese Ebene projicirt werden, Curven geben, welche in der, durch die Gleichungen $t = x$, $u = ny$ ausgedrückten Verwandtschaft der Affinität stehen, wo n eine, für jeden einzelnen Durchschnitt constante Zahl bedeutet.

Wir nehmen die feste Ebene zur Ebene der xy, und die Achse der z der gegebenen Richtung parallel. Ist nun die Gleichung der Projection eines, der Ebene der xy parallelen Durchschnittes, für welchen $z = a$,

$$y = \varphi(x) \quad ,$$

so muß die Gleichung der Projection eines Durchschnittes, für welchen $z = z$ ist,

$$ny = \varphi(x)$$

seyn, wo n von z abhängig, also $n = \psi(z)$ ist. Wir haben demnach

$$y \cdot \psi(z) = \varphi(x)$$

als die allgemeine Gleichung der Fläche, welcher wir auch die Form

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(z)} \quad ,$$

oder, wenn wir $\frac{1}{\psi(z)}$ für $\psi(z)$ setzen, die Form

$$y = \varphi(x) \cdot \psi(z) \qquad (30) \quad §. 101.$$

geben können.

§. 102.

Ist die allgemeine Gleichung einer Fläche, welche mehrere willkürliche Functionen von verschiedenen Ausdrücken enthält, bekannt, und ist eine solche Anzahl von Curven, welche auf der Fläche liegen sollen, gegeben, daß diese Fläche dadurch individualisirt ist; so werden zwar die genannten Functionen dadurch particularisirt, aber die Bestimmung dieser Functionen ist in den meisten Fällen mit sehr großen Schwierigkeiten verknüpft. Die allgemeine Methode dieser Bestimmung führt zu Differenzen-Gleichungen, deren Integration sich nur in sehr wenigen Fällen in geschlossenen Ausdrücken bewirken läßt. Wir dürfen hier auf diesen Gegenstand nicht weiter eingehen, und uns begnügen ihn erwähnt zu haben.

Wenn zwei allgemeine Gleichungen, welche mehrere willkürliche Functionen verschiedener Ausdrücke enthalten, gegeben sind, so kann (wie in §. 100) gefragt werden, welche individuelle Fläche sowohl durch die eine als durch die andere dieser Gleichungen dargestellt werde, was wieder mit der Aufgabe übereinkommt, diejenige Fläche zu finden, welche durch zwei verschiedene gegebene Erzeugungsarten hervorgebracht werden kann. Die allgemeine Methode zur Bestimmung jener Functionen führt dann zu gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir wollen hier nur einige der einfachsten Aufgaben dieser Art vorlegen, welche ohne tiefere Kenntniß der Differentialrechnung gelöst werden können.

Aufgabe [177]. Welche Fläche wird in rechtwinkligen Coordinaten sowohl durch die eine als durch die andere der beiden Gleichungen

$$z = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) \quad ; \quad z = \psi(y^2 + x^2)$$

dargestellt?

Diese Aufgabe läßt sich, zufolge des §. 101 (G. 4) und des §. 96. (G. 4), offenbar auch so ausdrücken: Welche Rotationsfläche kann dadurch erzeugt werden, daß eine noch unbekannte Curve einfacher Krümmung M sich parallel mit sich selbst und mit der Rotationsachse, und ferner so bewegt, daß ein bestimmter Punkt derselben eine ebenfalls noch unbekannte Curve einfacher Krümmung N beschreibt, deren Ebene auf der Ebene der Curve M senkrecht ist?

Eliminiren wir z zwischen den gegebenen Gleichungen, so erhalten wir

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = \psi(y^2 + x^2) \qquad (1)$$

102. Da nun x und y von einander unabhängig sind, so können wir diese Gleichung blos nach x und blos y differentiiren, wodurch wir, wenn wir $\frac{d\varphi_1(x)}{dx}$ durch $\varphi'_1(x)$, $\frac{d\varphi_2(y)}{dy}$ durch $\varphi'_2(y)$ und $\frac{d\psi(u)}{du}$ durch $\psi'(u)$ bezeichnen,

$$\varphi'_1(x) = 2x\psi'(y^2+x^2) \quad ; \quad \varphi'_2(y) = 2y\psi'(y^2+x^2)$$

erhalten. Eliminiren wir $\psi'(y^2+x^2)$ zwischen diesen Gleichungen, so kommt

$$y\varphi'_1(x) = x\varphi'_2(y) \quad ,$$

oder, wenn wir die Variabeln separiren,

$$\frac{\varphi'_1(x)}{x} = \frac{\varphi'_2(y)}{y} \quad ,$$

eine Gleichung, die, weil x und y von einander unabhängig seyn sollen, nur bestehen kann, wenn

$$\frac{\varphi'_1(x)}{x} = c \quad \text{und} \quad \frac{\varphi'_2(y)}{y} = c$$

ist, wo c eine willkürliche Constante bedeutet. Aus diesen letzten Gleichungen erhalten wir

$$\varphi'_1(x) = cx \quad \text{und} \quad \varphi'_2(y) = cy \quad ,$$

und daraus, durch Integration,

$$\varphi_1(x) = 2cx^2 + C_1 \quad ; \quad \varphi_2(y) = 2cy^2 + C_2 \quad .$$

Wir haben demnach, wenn wir $C_1 + C_2 = a$ setzen,

$$z - a = 2cx^2 + 2cy^2 \tag{2}$$

als die gesuchte Gleichung der Fläche, welche somit ein Rotationsparaboloid ist (§. 48). Die einzige Fläche, welche auf die genannte zwiefache Art erzeugt werden kann, ist also das Rotationsparaboloid.

Aufgabe [178]. *Welche Fläche wird sowohl durch die eine als durch die andere der beiden Gleichungen*

$$z = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) \quad ; \quad z = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

dargestellt?

Diese Aufgabe läßt sich, zufolge des §. 101. (G. 4) und des §. 88. (G. 18), auch wie folgt ausdrücken: Welche Fläche kann erzeugt werden sowohl durch eine Gerade, welche bei ihrer Bewegung fortwährend die Achse der z schneidet und der Ebene der xy parallel bleibt, als durch eine ebene Curve M, welche sich parallel mit

sich selbst und mit der Achse der z ferner aber so bewegt, daß §. 102. ein jeder bestimmte Punkt derselben eine Curve einfacher Krümmung beschreibt, deren Ebene gleichfalls der Achse der z parallel ist?

Eliminiren wir z zwischen den gegebenen Gleichungen, so kommt

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = \psi\left(\frac{y}{x}\right) , \qquad (3)$$

und wenn wir, nach einander, nach x und nach y differentiiren,

$$\varphi'_1(x) = -\frac{y}{x^2}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \quad \varphi'_2(y) = \frac{1}{x}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right) ,$$

woraus, durch Elimination von $\psi'\left(\frac{y}{x}\right)$,

$$x\cdot\varphi'_1(x) = -y\cdot\varphi'_2(y)$$

hervorgeht, eine Gleichung, die nur bestehen kann, wenn

$$x\cdot\varphi'_1(x) = -c \quad \text{und} \quad y\cdot\varphi'_2(y) = c$$

ist, wo c eine willkürliche Constante bedeutet. Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$\varphi'_1(x) = -\frac{c}{x} \quad \text{und} \quad \varphi'_2(y) = \frac{c}{y} ,$$

und daraus, durch Integration,

$$\varphi_1(x) = -c\,log\,mx \quad ; \quad \varphi_2(y) = c\,log\,ny ,$$

wenn wir die, durch die Integration eintretenden Constanten durch m und n bezeichnen. Wir haben demnach, wenn wir $\frac{n}{m} = k$ setzen,

$$z = c(log\,y - log\,x + log\,k)$$

als die gesuchte Gleichung der Fläche. Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach demjenigen Punkte der Achse der z, für welchen jetzt $z = c\,log\,k$ ist, indem wir $z + c\,log\,k$ für z setzen, so kommt

$$z = c(log\,y - log\,x)$$

oder auch

$$y = x\cdot e^{\frac{z}{c}} \qquad (4)$$

als die Gleichung der gesuchten Fläche.

Aufgabe [179]. Welche Flächen werden sowohl durch die eine als durch die andere der beiden Gleichungen

$$x = \varphi_1(y) + \varphi_2(z) \quad ; \quad y = \psi_1(x) + \psi_2(z)$$

estellt?

Diese Aufgabe läßt sich, zufolge des §. 101 (S. 4), auch folgenderma- ausdrücken: Welche Flächen werden sowohl erzeugt durch eine ie Curve, welche sich der Ebene der xz parallel und so be- t, daß jeder bestimmte Punkt derselben eine Curve einfacher mmung beschreibt, deren Ebene der Ebene der xy parallel als durch eine ebene Curve, welche sich der Ebene der yz pa- el und so bewegt, daß jeder bestimmte Punkt derselben eine ve einfacher Krümmung beschreibt, deren Ebene gleichfalls Ebene der xy parallel ist?

Differentiiren wir die beiden gegebenen Gleichungen, nach einander, x und nach y, so kommt:

$$1 = \varphi'_2(z)\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right) \quad ; \quad 0 = \psi'_1(x) + \psi'_2(z)\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right) \quad ,$$

$$0 = \varphi'_1(y) + \varphi'_2(z)\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right) \; ; \quad 1 = \psi'_2(z)\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad .$$

iniren wir $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, so ergeben sich

$$\frac{\psi'_2(z)}{\varphi'_2(z)} = -\psi'_1(x) \quad ; \quad \frac{\psi'_2(z)}{\varphi'_2(z)} = -\frac{1}{\varphi'_1(y)} \quad ,$$

Gleichungen, welche, da x und z, und ebenso y und z als unab- ige Veränderliche angesehen werden können, nur bestehen, wenn

$$\frac{\psi'_2(z)}{\varphi'_2(z)} = c \quad ; \quad \psi'_1(x) = -c \quad ; \quad \varphi'_1(y) = -\frac{1}{c}$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet. Durch Integration erhal- wir

$$(z) = c\varphi_2(z) + C_1 \; ; \; \psi_1(x) = -cx + C_2 \; ; \; \varphi_1(y) = -\frac{1}{c}y + C_3 \; ,$$

urch nun die Form der Functionen φ_1 und ψ_1, und eine Relation zwi- den Functionen φ_2 und ψ_2 gefunden ist. Setzen wir jetzt den eben ndenen Ausdruck von $\varphi_1(y)$ in die erste, und die ferner gefundenen drücke von $\psi_1(x)$ und $\psi_2(z)$ in die zweite der gegebenen Gleichungen, rhalten wir

$$y + cx = c\cdot\varphi_2(z) + cC_3 \quad ; \quad y + cx = c\cdot\varphi_2(z) + C_1 + C_2 \; ,$$

woraus die Relation $cC_3 = C_1 + C_2$ zwischen den, durch die Integration §. 102. eingetretenen Constanten folgt; und bezeichnen wir

$$c \cdot \varphi_2(z) + cC_3 \equiv c \cdot \varphi_2(z) + C_1 + C_2 \text{ durch } F(z) \quad ,$$

so haben wir

$$y + cx = F(z) \qquad (5)$$

als die allgemeine Gleichung der gesuchten Flächen, welche somit Cylinderflächen sind, deren erzeugende Gerade der Ebene der xy parallel liegen.

§. 103.

Wenn ein gerader Kreiscylinder auf einer festen Ebene E, ohne sich zu verschieben, rollt, so beschreibt jeder bestimmte Punkt dieser Cylinderfläche eine Cycloide, und ein jeder nicht auf der Cylinderfläche befindliche, aber mit ihr fest verbundene Punkt beschreibt eine verkürzte oder verlängerte Cycloide, je nachdem er außerhalb oder innerhalb des Cylinders liegt. Bei derselben Bewegung beschreibt die Achse des Cylinders eine Ebene A, welche der Ebene E parallel ist.

Aufgabe [180]. Ein gerader Kreiscylinder, mit welchem eine Curve M von einfacher oder doppelter Krümmung fest verbunden ist, rollt, ohne sich zu verschieben, auf einer festen Ebene E. Es soll die allgemeine Gleichung der Fläche gefunden werden, welche die Curve M bei der angegebenen Bewegung erzeugt.

Wir nehmen die Achse des Cylinders in derjenigen Lage, welche sie im Anfange der Bewegung hat, zur Achse der x, die Ebene A, welche diese Achse enthält und der Ebene E parallel ist, zur Ebene der xy, und die Coordinaten rechtwinklig. Wir bezeichnen den Radius des Kreiscylinders durch a, und es sey

$$\left| \; y = \varphi_1(x) \quad ; \quad z = \varphi_2(x) \; \right| \qquad (1)$$

das Gleichungssystem, welches die Curve M in derjenigen Lage darstellt, die sie im Anfange der Bewegung hat. — Wir wollen uns jetzt drei, auf einander senkrechte Ebenen P, Q, R vorstellen, welche mit dem Cylinder und mit der Curve M fest verbunden sind, und welche im Anfange der Bewegung mit den zu Coordinatenebenen genommenen coincidiren. Wenn nun die Achse des Cylinders, durch dessen Fortrollen, in eine neue Lage gekommen ist, in welcher sie durch die Gleichungen

$$z = 0 \quad ; \quad y = \eta$$

dargestellt wird, befinden sich die Ebenen P, Q, R in einer solchen Lage, daß die Ebenen P und Q, welche im Anfange der Bewegung respective mit den

in der so eben genannten Lage auf das ursprüngliche Coordinatensystem zu beziehen, in Folge der Formeln (22) des §. 13 die Gleichungen

$$x = x' \; ,$$

$$y = y' \cdot \cos \frac{r \pm a}{\pm a} \vartheta - z' \cdot \sin \frac{r \pm a}{\pm a} \vartheta + (r \pm a) \cdot \cos \vartheta \quad ,$$

$$z = y' \cdot \sin \frac{r \pm a}{\pm a} \vartheta + z' \cdot \cos \frac{r \pm a}{\pm a} \vartheta + (r \pm a) \cdot \sin \vartheta$$

in Anwendung zu bringen. Eliminiren wir nun zwischen diesen drei Gleichungen und den beiden Gleichungen (7) die drei Größen x', y', z', so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} y &= (r \pm a) \cdot \cos \vartheta + \varphi_1(x) \cdot \cos \frac{r \pm a}{\pm a} \vartheta - \varphi_2(x) \cdot \sin \frac{r \pm a}{\pm a} \vartheta \\ z &= (r \pm a) \cdot \sin \vartheta + \varphi_1(x) \cdot \sin \frac{r \pm a}{\pm a} \vartheta + \varphi_2(x) \cdot \cos \frac{r \pm a}{\pm a} \vartheta \end{aligned}\right\} , \quad (8)$$

[zw]ei Gleichungen, zwischen welchen man ϑ eliminiren müßte, um die Glei[ch]ung der erzeugten Fläche zu erhalten, und welche also zusammen genom[me]n diese Fläche darstellen. — In diesen Gleichungen (8) gelten die oberen [Vo]rzeichen, wenn die Cylinderflächen A und B sich von außen, und die [unt]eren Vorzeichen, wenn diese Cylinderflächen sich von innen berühren.

Wir wollen, um einen speciellen Fall zu betrachten, annehmen, daß [a] = ½ r sey, und daß die Cylinder A und B sich von innen berühren. [D]ann ist r = 2a, r — a = a und $\frac{r - a}{-a} = -1$, und die Gleichungen geben uns auf der Stelle

$$y = [a + \varphi_1(x)] \cdot \cos \vartheta + \varphi_2(x) \cdot \sin \vartheta \quad ,$$
$$z = [a - \varphi_1(x)] \cdot \sin \vartheta + \varphi_2(x) \cdot \cos \vartheta \quad ;$$

[wor]aus, durch Elimination von ϑ, und wenn wir, der Kürze wegen, für [φ_1(x)] und $\varphi_2(x)$ respective φ_1 und φ_2 schreiben,

$$[\varphi_2^2 + \varphi_1^2 + 2a\varphi_1 + a^2] \cdot z^2 - 4a\varphi_2 \cdot yz + [\varphi_2^2 + \varphi_1^2 - 2a\varphi_1 + a^2] \cdot y^2 = [\varphi_2^2 + \varphi_1^2 - a^2]^2 \quad (9)$$

die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche hervorgehet. — Wollen [wir] diejenigen Curven finden, in welchen diese Fläche (9) von Ebenen, [wel]che auf der Achse des Cylinders B senkrecht sind, geschnitten wird, so [müss]en wir x constant setzen, wodurch φ_1 und φ_2 ebenfalls constant werden;

den; und dann: bildet die Gleichung (9) eine Ellipse aus. Alle auf diese Weise erzeugten Flächen haben demnach die Eigenschaft, daß die auf der Achse des Cylinders B senkrechten, ebenen Durchschnitte Ellipsen sind, deren Mittelpunkte in der Achse des Cylinders B liegen (vergl. I. §. 67 S. 311). §. 103.

§. 104.

Aufgabe [182]. Ein gegebener Rotationskegel A rollt auf einer festen Ebene E ohne sich zu verschieben. Es soll gefunden werden: erstens die Curve, welche ein mit dem Kegel A fest verbundener Punkt p beschreibt, zweitens die Fläche, welche eine mit dem Kegel A fest verbundene Curve M erzeugt.

Bei der vorausgesetzten Bewegung der Kegelfläche A verändert der Mittelpunkt (Scheitel) dieser Fläche offenbar seinen Ort nicht. Wir nehmen diesen festen Punkt zum Anfangspunkte zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme xyz und x′y′z′, von welchen das erste System mit der Ebene E, und das zweite mit der Kegelfläche A fest verbunden sey. Die Ebene E nehmen wir zur Ebene der xy, und diejenige Gerade a_0, in welcher im Anfange der Bewegung die Ebene E von der Kegelfläche A berührt wird, zur Achse der y. Die Achse der Kegelfläche A nehmen wir zur Achse der z′, und diejenige mit der Kegelfläche fest verbundene Ebene, welche im Anfange der Bewegung diese Achse und die eben genannte Achse der y enthält, zur Ebene der y′z′. Den Winkel der Kegelfläche A, d. i. den Winkel, welchen jede ihrer erzeugenden Geraden mit ihrer Achse macht, bezeichnen wir durch δ.

Die Achse der Kegelfläche A macht offenbar mit der Ebene E fortwährend den Winkel δ, und mit der Achse der z also den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \delta$. Da nun die Ebene der x′y′ auf der Achse der z′, d. i. auf der Achse des Kegels senkrecht ist, so bildet sie mit der Ebene E, d. i. mit der Ebene der xy, gleichfalls den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \delta$.

Ist im Laufe der Bewegung der Kegel A in diejenige Lage gekommen, in welcher er die Ebene E in der Geraden a_η berührt, die mit der Geraden a_0, d. i. mit der Achse der y den Winkel η bildet, so wird die Ebene der x′y′ die Ebene E in einer Geraden D schneiden, welche auf der Geraden a_η senkrecht steht und welche also mit der Achse der x den Winkel $\psi = \eta$ macht; zugleich wird dann aber die Ebene der y′z′ gegen diejenige Ebene F, welche in der Geraden a_η auf der Ebene E senkrecht steht, unter einem Winkel ε geneigt seyn, welcher offenbar gleich $\frac{\eta}{\sin\delta}$ ist. Da nun die Achse

§. 104. der x′ auf der Ebene der y′z′, und die Gerade D auf der so eben genannten Ebene F senkrecht ist, so wird alsdann die Achse der x′ mit der Geraden D den Winkel $\varphi = -\varepsilon = -\frac{\eta}{\sin\delta}$ einschließen. Setzen wir nun in die Transformationsformeln (19) des §. 13 überall η für ψ, $\frac{1}{2}\pi - \delta$ für ϑ und $-\varepsilon$ für φ, so haben wir

$$\left.\begin{array}{l} x' = \begin{cases} [\cos\eta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\eta\sin\varepsilon]\cdot x \\ + [\sin\eta\cos\varepsilon - \sin\delta\cos\eta\sin\varepsilon]\cdot y \\ - \cos\delta\sin\varepsilon\cdot z \end{cases} \\ y' = \begin{cases} [\cos\eta\sin\varepsilon - \sin\delta\sin\eta\cos\varepsilon]\cdot x \\ + [\sin\eta\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\eta\cos\varepsilon]\cdot y \\ + \cos\delta\cos\varepsilon\cdot z \end{cases} \\ z' = \cos\delta\sin\eta\cdot x - \cos\delta\cos\eta\cdot y + \sin\delta\cdot z \end{array}\right\} \quad (1)$$

in welchen Formeln ε überall $\frac{\eta}{\sin\delta}$ bedeutet, und aus denen zugleich

$$z'^2 + y'^2 + x'^2 = z^2 + y^2 + x^2 \quad (2)$$

folgt.

I. Ist nun erstens ein, mit der Kegelfläche A fest verbundener Punkt p gegeben, dessen Coordinaten in Beziehung auf das Coordinatensystem x′y′z′ die constanten Werthe

$$x' = \alpha \quad ; \quad y' = \beta \quad ; \quad z' = \gamma \quad (3)$$

haben, so erhalten wir, durch Elimination der vier Größen η, x′, y′ und z′, zwischen den sechs Gleichungen (1) und (3), zwei Gleichungen in x, y und z, welche zusammengenommen diejenige Curve darstellen, die der Punkt p während der Bewegung des Kegels A beschreibt. — Bei dieser Elimination können wir statt der drei Gleichungen (1) irgend zwei derselben und die Gleichung (2) anwenden, und dann ist die eine der beiden Finalgleichungen der Elimination

$$z^2 + y^2 + x^2 = \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2 \quad ,$$

die von dem Punkte p beschriebene Curve wird also immer eine sphärische seyn. — Diese Curve heißt sphärische Cycloide.

II. Ist zweitens eine mit der Kegelfläche A fest verbundene Curve M, durch die beiden Gleichungen

$$F_1(x', y', z') = 0 \quad ; \quad F_2(x', y', z') = 0 \quad (4)$$

gegeben, so erhalten wir, durch Elimination der vier Größen η, x′, y′ und z′ zwischen den fünf Gleichungen (1) und (4), eine Gleichung in x, y und

...che diejenige Fläche darstellt, die von der Curve M während der Be- §. 104.
...g des Kegels A erzeugt wird.

Ist z. B. der Winkel δ des Kegels A dem dritten Theile eines rech...
...leich, so ist $\sin\delta = \frac{1}{2}$, $\cos\delta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $\varepsilon = 2\eta$; und dann geben
...ormeln (1)

$$= \cos^3\eta \cdot x - \sin^3\eta \cdot y - \sqrt{3}\sin\eta\cos\eta \cdot z \quad ,$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin\eta(1+2\cos^2\eta)x + \tfrac{1}{2}\cos\eta(1+2\sin^2\eta)y + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(\cos^2\eta-\sin^2\eta)z \quad ,$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sin\eta \cdot x - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos\eta \cdot y + \tfrac{1}{2}z \quad .$$

...nun ferner die Linie M diejenige erzeugende Gerade des Kegels A,
...che im Anfange der Bewegung mit der Achse der y coincidirt, und
...che daher durch die Gleichungen

$$x' = 0 \quad ; \quad y' = -\tang\delta \cdot z'$$

...so, da $\delta = \frac{1}{6}\pi$, durch die Gleichungen

$$x' = 0 \quad ; \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z'$$

...ausgedrückt ist; so haben wir, in Folge der so eben aus den Gleichungen
(1) abgeleiteten Formeln,

$$\cos^3\eta \cdot x - \sin^3\eta \cdot y - \sqrt{3}\sin\eta\cos\eta \cdot z = 0 \quad ,$$
$$\sqrt{3} \cdot \sin\eta(1+\cos^2\eta)x + \sqrt{3} \cdot \cos\eta\sin^2\eta \cdot y + (2-3\sin^2\eta)z = 0 \quad ,$$

zwei Gleichungen, zwischen welchen wir η eliminiren müssen. Eliminiren wir y zwischen ihnen, so kommt

$$\sqrt{3} \cdot x = \sin\eta \cdot z \quad ,$$

woraus wir

$$\sin\eta = \sqrt{3} \cdot \frac{x}{z} \quad , \quad \text{und daher} \quad \cos\eta = \frac{\sqrt{z^2 - 3x^2}}{z}$$

erhalten. Substituiren wir diese Ausdrücke in die erste jener beiden Gleichungen, so kommt

$$27x^4y^2 = (2z^2 + 3x^2)^2(z^2 - 3x^2) \qquad (5)$$

als Gleichung der erzeugten Fläche, welche somit eine Kegelfläche vom sechsten Grade ist.

Aufgabe [183]. Ein gegebener Rotationskegel A rollt, ohne sich zu verschieben, auf der Fläche eines andern, ebenfalls gegebenen Rotationskegel B, mit welchem er einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt (Scheitel) hat. Es soll gefunden werden: erstens die Curve, welche ein mit dem Kegel A fest verbundener Punkt p beschreibt, zweitens die Fläche, welche eine mit dem Kegel A fest verbundene Curve M erzeugt.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06525 5633

